

4.2 Eigenschwingungen

Lösungen

Aufgabe 1

Mit $\xi = x/a$ und $\eta = y/b$ lauten die Eigenfunktionen:

$$W_{kl}(\xi, \eta) = \sin(k\pi\xi)\sin(l\pi\eta), \quad W_{mn}(\xi, \eta) = \sin(m\pi\xi)\sin(n\pi\eta)$$

Für das Integral des Produkts über die Plattenfläche folgt:

$$\int_0^b \int_0^a W_{kl}(x, y) W_{mn}(x, y) dx dy = ab \int_0^1 \int_0^1 W_{kl}(\xi, \eta) W_{mn}(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

Einsetzen der Eigenfunktionen ergibt:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 W_{kl}(\xi, \eta) W_{mn}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sin(k\pi\xi)\sin(l\pi\eta)\sin(m\pi\xi)\sin(n\pi\eta) d\xi d\eta \\ &= \int_0^1 \sin(k\pi\xi)\sin(m\pi\xi) d\xi \int_0^1 \sin(l\pi\eta)\sin(n\pi\eta) d\eta \end{aligned}$$

Für $k \neq m$ gilt für das erste Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(k\pi\xi)\sin(m\pi\xi) d\xi &= \left[\frac{\sin((k-m)\pi\xi)}{2\pi(k-m)} - \frac{\sin((k+m)\pi\xi)}{2\pi(k+m)} \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \\ &= \frac{\sin((k-m)\pi)}{2\pi(k-m)} - \frac{\sin((k+m)\pi)}{2\pi(k+m)} = 0 \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise folgt für das zweite Integral:

$$\int_0^1 \sin(l\pi\eta)\sin(n\pi\eta) d\eta = 0 \quad \text{für } l \neq n$$

Für $k = m$ gilt für das erste Integral:

$$\int_0^1 \sin^2(k\pi\xi) d\xi = \left[\frac{\xi}{2} - \frac{\sin(2k\pi\xi)}{4} \right]_{\xi=0}^{\xi=1} = \frac{1}{2}$$

Für das zweite Integral folgt entsprechend:

$$\int_0^1 \sin^2(l\pi \eta) d\eta = \frac{1}{2}$$

Damit ist gezeigt:

$$\int_0^1 \int_0^1 W_{kl}(x, y) W_{mn}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq m \text{ oder } l \neq n \\ \frac{1}{4} ab & \text{für } k = m \text{ und } l = n \end{cases}$$

Aufgabe 2

Das folgende GNU Octave-Skript löst die Aufgabe.

```
# Übungsblatt 4.2, Aufgabe 2: Eigenschwingungen einer gelenkig
# gelagerten rechteckigen ebenen Platte
#
# -----

colormap("jet");
set(0, "defaultaxesfontsize", 10);

file = mfilename();

# Daten (kg, m)

geom = struct("a", 2.0, "b", 1.5, "h", 0.01);
mat = struct("E", 2.1E11, "ny", 0.3, "rho", 7850);
fmax = 400;
modes = [ 8, 16, 24, 32]; % Auswahl für die Ausgabe

# Eigenfrequenzen

[f, mn] = platevib(geom, mat, fmax);

# Wellenlängen

lambda = (2 ./ mn) * diag([geom.a, geom.b]);
lmax = max(max(lambda));
lmin = min(min(lambda));

# Ausgabe

fid = fopen([file, ".res"], "wt");

fprintf(fid, " Nr.      m      n  Frequenz ");
fprintf(fid, "  lambda_x  lambda_y\n");
fprintf(fid, "  -----");
fprintf(fid, " -----\n");

nf = length(f);
for k = 1 : nf
    fprintf(fid, "   %3d   %3d   %3d   %5.1f Hz", k, mn(k, :),
            f(k));
```

```

        fprintf(fid, "      %5.2f m      %5.2f m\n", lambda(k, :));
    end

    fprintf(fid, "\n Größte Wellenlänge: %5.2f m\n", lmax);
    fprintf(fid, " Kleinste Wellenlänge: %5.2f m\n", lmin);

    fclose(fid);

# Eigenfunktionen

function w = Wmn(xi, eta, m, n)
    w = sin(pi * m * xi) .* sin(pi * n * eta);
end

# Darstellung

mnmax = max(mn);
mmax = 12 * mnmax(1);
nmax = 12 * mnmax(2);

x = linspace(0, geom.a, mmax);
y = linspace(0, geom.b, nmax);

[x, y] = meshgrid(x, y);

xi = x / geom.a;
eta = y / geom.b;

figure(1, "position", [10, 500, 1000, 750],
        "paperposition", [0, 0, 16, 16 * geom.b / geom.a]);

for k = 1 : 4
    subplot(2, 2, k)
    modno = modes(k);
    w = Wmn(xi, eta, mn(modno, 1), mn(modno, 2));
    contourf(x, y, w);
    txt = sprintf("Mode %2d: f = %5.1f Hz", modno, f(modno));
    title(txt, "fontsize", 12);
    set(gca(), "visible", "off");
end

print([file, ".svg"], "-dsvg");

```

Die Funktion `platevib` berechnet die Eigenfrequenzen.

```

function [f, mn] = platevib(geom, mat, fmax)

# usage: [f, mn] = platevib(geom, mat, fmax)
#
# Input   geom      Structure with geometrical data
#          geom.a, geom.b, geom.h
#         mat      Structure with material data
#          mat.E, mat.ny, mat.rho
#         fmax     maximal frequency
#
# Output  f(:)     List of frequencies

```

```

#          mn(:, 2) List of (m, n)-coefficients
#
# The function computes all frequencies of a rectangular
# plate below fmax. The frequencies are in ascending
# order.
# -----
# Constants

B = mat.E * geom.h^3 / (12 * (1 - mat.nu^2));
C = 0.5 * pi * sqrt(B / (mat.rho * geom.h));

# Frequencies

f1 = 0;
k  = 0;

m      = 0;
loop_m = 1;

while (loop_m)

    ma      = (++m / geom.a)^2;
    n        = 0;
    loop_m   = 0;
    loop_n   = 1;

    while (loop_n)
        f1 = C * (ma + (++n / geom.b)^2);
        if (f1 < fmax)
            f(++k) = f1;
            mn(k, :) = [m, n];
            loop_m = 1;
        else
            loop_n = 0;
        end
    end

end

[f, I] = sort(f);
mn      = mn(I, :);

end

```

Die Ausgabedatei hat folgenden Inhalt:

Nr.	m	n	Frequenz	lambda_x	lambda_y
1	1	1	17.1 Hz	4.00 m	3.00 m
2	2	1	35.5 Hz	2.00 m	3.00 m
3	1	2	49.9 Hz	4.00 m	1.50 m
4	3	1	66.2 Hz	1.33 m	3.00 m
5	2	2	68.3 Hz	2.00 m	1.50 m
6	3	2	99.0 Hz	1.33 m	1.50 m

7	1	3	104.5 Hz	4.00 m	1.00 m
8	4	1	109.3 Hz	1.00 m	3.00 m
9	2	3	122.9 Hz	2.00 m	1.00 m
10	4	2	142.1 Hz	1.00 m	1.50 m
11	3	3	153.7 Hz	1.33 m	1.00 m
12	5	1	164.6 Hz	0.80 m	3.00 m
13	1	4	181.0 Hz	4.00 m	0.75 m
14	4	3	196.7 Hz	1.00 m	1.00 m
15	5	2	197.4 Hz	0.80 m	1.50 m
16	2	4	199.4 Hz	2.00 m	0.75 m
17	3	4	230.1 Hz	1.33 m	0.75 m
18	6	1	232.2 Hz	0.67 m	3.00 m
19	5	3	252.0 Hz	0.80 m	1.00 m
20	6	2	265.0 Hz	0.67 m	1.50 m
21	4	4	273.2 Hz	1.00 m	0.75 m
22	1	5	279.3 Hz	4.00 m	0.60 m
23	2	5	297.8 Hz	2.00 m	0.60 m
24	7	1	312.1 Hz	0.57 m	3.00 m
25	6	3	319.6 Hz	0.67 m	1.00 m
26	3	5	328.5 Hz	1.33 m	0.60 m
27	5	4	328.5 Hz	0.80 m	0.75 m
28	7	2	344.9 Hz	0.57 m	1.50 m
29	4	5	371.5 Hz	1.00 m	0.60 m
30	6	4	396.1 Hz	0.67 m	0.75 m
31	1	6	399.5 Hz	4.00 m	0.50 m

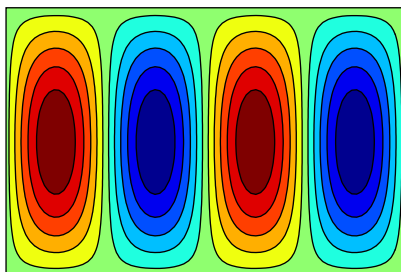
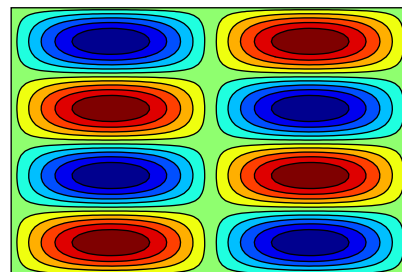
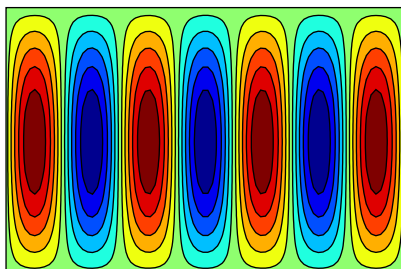
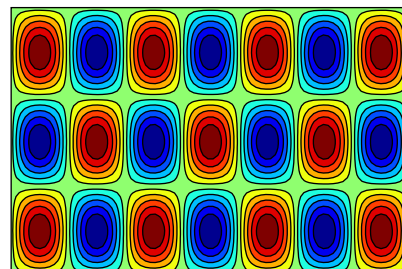
Mode 8: $f = 109.3$ HzMode 16: $f = 199.4$ HzMode 24: $f = 312.1$ HzMode 32: $f = 399.5$ Hz

Abbildung 2.1: Einige Eigenschwingungen

32 7 3 399.5 Hz 0.57 m 1.00 m

Größte Wellenlänge: 4.00 m

Kleinste Wellenlänge: 0.50 m

Einige der Eigenschwingungen sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

Aufgabe 3

Wegen $K[u_s, u_s] = 0$ folgt aus dem Rayleigh-Quotienten:

$$\omega_s^2 = \frac{K[u_s, u_s]}{M[u_s, u_s]} = 0$$

Mit $\omega_s = 0$ gilt für den zeitlichen Verlauf: $\ddot{\phi}_s = 0$

Integration ergibt: $\phi_s(t) = c_1 t + c_2$

Aufgabe 4

Die Eigenkreisfrequenz kann mit dem Rayleigh-Quotienten bestimmt werden.

Mit

$$w_1(x) = \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right), \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

und den Ergebnissen von Aufgabe 1 von Übungsblatt 4.1 gilt:

$$K[w_1, w_1] = E I_y \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

$$M[w_1, w_1] = \rho A \int_0^L \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx$$

Damit folgt:

$$\omega_1^2 = \frac{K[w_1, w_1]}{M[w_1, w_1]} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{E I_y}{\rho A} \rightarrow \omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{E I_y}{\rho A}}$$

Wird der Term mit dem Trägheitsradius nicht vernachlässigt, gilt:

$$\begin{aligned} M[\tilde{w}, w] &= \rho A L \int_0^1 \left(\frac{i_y^2}{L^2} \frac{d\tilde{w}}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} + \tilde{w} w \right) d\xi \\ &= \rho A L \int_0^1 \left(\frac{i_y^2}{L^2} \cos^2(\pi \xi) + \sin^2(\pi \xi) \right) d\xi = \frac{1}{2} \rho A L \left(1 + \frac{i_y^2}{L^2} \right) \end{aligned}$$

Dabei wurde

$$\int_0^1 \sin^2(\pi \xi) d\xi = \int_0^1 \cos^2(\pi \xi) d\xi = \frac{1}{2}$$

benutzt.

Mit

$$K[w_1, w_1] = EI_y \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \sin^2\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx = EI_y L \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \int_0^1 \sin^2(\pi \xi) d\xi = \frac{1}{2} EI_y L \left(\frac{\pi}{L}\right)^4$$

folgt:

$$\omega_1^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \frac{EI_y}{\rho A} \frac{1}{1 + (i_y/L)^2}$$