4.3 Frequenzganganalysen

Lösungen

Aufgabe 1

Für die Übertragungsfunktionen für die Beschleunigungen gilt:

$$\begin{aligned} {}^{a}H_{QP}(\Omega) &= -\frac{4}{m_P}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega^2}{\omega_{mn}^2}H(\eta_{mn}, D_{mn})\,W_{mn}(x_P, y_P)\,W_{mn}(x_Q, y_Q) \\ &= -\frac{4}{m_P}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_{mn}^2 H(\eta_{mn}, D_{mn})\,W_{mn}(x_P, y_P)\,W_{mn}(x_Q, y_Q) \end{aligned}$$

Für die Berechnung wird zunächst anstelle der Doppelsumme eine einfache Summe verwendet, indem die Eigenschwingungen nach aufsteigenden Eigenfrequenzen sortiert und durchgezählt werden. Dann gilt:

$$ {}^{a}H_{QP}(f) = -\frac{4}{m_P}\sum_{k=1}^{\infty}\eta_k^2 H(\eta_k, D_k)\,W_k(x_P, y_P)\,W_k(x_Q, y_Q)$$

Das GNU Octave-Skript beginnt mit der Definition der Daten. Anschließend werden die nach aufsteigenden Frequenzen sortierten Eigenfrequenzen sowie die Parameter m und n der zugehörigen Eigenfunktionen berechnet. Dazu wird die in Aufgabe 2 von Übungsblatt 4.2 beschriebene Funktion **`platevib`** verwendet.

```
# Übungsblatt 4.3, Aufgabe 1: Übertragungsfunktionen
#
# ------------------------------------------------------------------

  set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

  file = mfilename();

# Daten (kg, m)

  geom = struct("a", 2.0, "b", 1.5, "h", 0.01);
  mat  = struct("E", 2.10E11, "ny", 0.3, "rho", 7850);
  D    = 0.02;

  P = [ 0.5, 0.5]; Q = [ 1.5, 1.0];

  f1 =  10;    % Startfrequenz
  f2 = 300;    % Endfrequenz
  df =   2;    % Frequenzschritt

  g  = 9.81;   % Erdbeschleunigung
```

```
# Eigenfrequenzen

  [fr, mn] = platevib(geom, mat, 3 * f2);
  nofmod   = length(fr);
```

Als nächstes werden die modalen Verschiebungen an den Punkten P und Q berechnet. Sie werden in den Matrizen

$$[W_P]=[W_1(x_P, y_P) \quad \cdots \quad W_K(x_P, y_P)]^T$$

und

$$[W_Q]=[W_1(x_Q, y_Q) \quad \cdots \quad W_K(x_Q, y_Q)]^T$$

zusammengefasst. Dabei ist K die Anzahl der berechneten Eigenschwingungen. Damit werden die Matrizen

$$[W_{PP}]=[W_1^2(x_P, y_P) \quad \cdots \quad W_K^2(x_P, y_P)]^T$$

und

$$[W_{PQ}]=[W_1(x_P, y_P)W_1(x_Q, y_Q) \quad \cdots \quad W_K(x_P, y_P)W_K(x_Q, y_Q)]^T$$

berechnet.

```
# Eigenfunktionen

  function w = Wmn(xi, eta, m, n)
     w = sin(pi * m * xi) .* sin(pi * n * eta);
  end

# Modale Verschiebungen in P und Q

  xiP = P(1) / geom.a; etaP = P(2) / geom.b;
  xiQ = Q(1) / geom.a; etaQ = Q(2) / geom.b;

  WP = Wmn(xiP, etaP, mn(:, 1), mn(:, 2));
  WQ = Wmn(xiQ, etaQ, mn(:, 1), mn(:, 2));

  WPP = WP .^2; WPQ = WP .* WQ;
```

Für die Erregerfrequenzen wird ein gleichmäßiges Grundraster definiert, dem zusätzlich die Resonanzfrequenzen hinzugefügt werden. Die Erregerfrequenzen werden nach aufsteigenden Frequenzen sortiert.

```
# Erregerfreqenzen

  fb = f1 : df : f2;          % Gleichmäßiges Grundraster
  im = lookup(fr, f2);
  fm = fr(1 : im);            % Resonanzen im untersuchten Bereich
  fe = sort([fb, fm]);        % Gesamte Erregerfrequenzen
  ne = length(fe);
```

Für die Berechnung der modalen Übertragungsfunktionen werden zunächst die Erregerfrequenzverhältnisse berechnet. Sie werden in der Matrix

$$[\eta]=\begin{bmatrix}\eta_{11} & \cdots & \eta_{1K}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \eta_{N1} & \cdots & \eta_{NK}\end{bmatrix}$$

gespeichert, wobei N die Anzahl der Erregerfrequenzen ist. Die Spalten der Matrix entsprechen den Eigenschwingungen und die Zeilen den Erregerfrequenzen. Mithilfe dieser Matrix kann dann die modale Übertragungsmatrix

$$[H]=-\begin{bmatrix}\eta_{11}^2 H(\eta_{11}, D_1) & \cdots & \eta_{1K}^2 H(\eta_{1K}, D_K)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \eta_{N1}^2 H(\eta_{N1}, D_1) & \cdots & \eta_{NK}^2 H(\eta_{NK} D_K)\end{bmatrix}$$

berechnet werden.

```
# Modale Übertragungsfunktionen

  eta  = fe' * (1 ./ fr);
  eta2 = eta.^2;
  H    = -eta2 ./ (1 - eta2 + 2 * i * D * eta);
```

Die Matrixmultiplikationen

$$[A_{PP}]=\frac{4}{m_P\, g}[H][W_{PP}],\quad [A_{QP}]=\frac{4}{m_P\, g}[H][W_{PQ}]$$

liefern die Übertragungsfunktionen für die gewünschten Erregerfrequenzen. Dabei werden die Beschleunigungen auf die Erdbeschleunigung bezogen.

```
# Übertragungsfunktionen

  mP = mat.rho * geom.a * geom.b * geom.h;
  S  = 4 / (mP * g);          % Beschleunigungen in g

  APP = S * H * WPP; AQP = S * H * WPQ;
```

Für die Darstellung der Übertragungsfunktionen wird eine logarithmische y-Skala gewählt, da die Werte an den Resonanzstellen sehr groß werden.

```
# Ausgabe

  figure(1, "position", [100, 400, 1000, 700],
            "paperposition", [0, 0, 15, 9.5]);

  semilogy(fe, abs(APP), "color", "red",
           fe, abs(AQP), "color", "green");
  legend("H_{PP}", "H_{QP}", "location", "southeast");
  grid;
  xlabel("f [Hz]"); ylabel("H [g/N]");

  print([file, ".svg"], "-dsvg");

  dlmwrite([file, ".csv"], [fe', abs(APP), abs(AQP)],
```

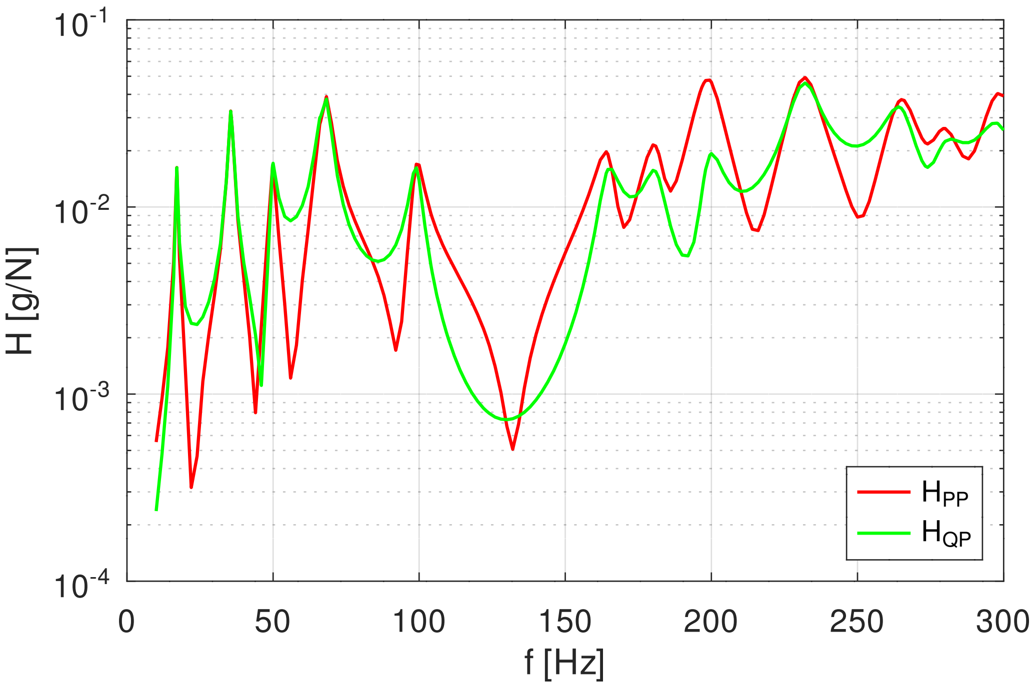

Abbildung 1.1: Übertragungsfunktionen

```
"precision", 5);
```

Das Ergebnis ist in Abbildung 1.1 dargestellt.