

5.1 Diskretisierung

Lösungen

Aufgabe 1

a) Randbedingungen

Für die Werte der Ansatzfunktion an den Rändern folgt unmittelbar:

$$w(0) = w_1, \quad w(1) = w_2$$

Mit den Ableitungen

$$\frac{dH_1}{d\xi} = 6\xi^2 - 6\xi, \quad \frac{dH_2}{d\xi} = -L(3\xi^2 - 4\xi + 1)$$

$$\frac{dH_3}{d\xi} = -6\xi^2 + 6\xi, \quad \frac{dH_4}{d\xi} = -L(3\xi^2 - 2\xi)$$

der Interpolationsfunktionen und mit $d/dx = (1/L)d/d\xi$ folgt für die Werte der Ableitungen der Ansatzfunktion an den Rändern:

$$\frac{dw}{dx}(0) = \frac{1}{L} \frac{dw}{d\xi}(0) = -\phi_1, \quad \frac{dw}{dx}(1) = \frac{1}{L} \frac{dw}{d\xi}(1) = -\phi_2$$

b) Starrkörperbewegungen

Translation in z-Richtung: $w_1 = w_2 = w_0, \quad \phi_1 = \phi_2 = 0$

$$w(\xi) = (H_1(\xi) + H_3(\xi)) w_0 = (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 - 2\xi^3 + 3\xi^2) w_0 = w_0 \quad \checkmark$$

Rotation um die z-Achse, z. B. um Knoten 1:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = -L\phi$$

$$\begin{aligned} w(\xi) &= (H_2(\xi) + H_4(\xi) - H_3(\xi)) L\phi \\ &= (-\xi^3 + 2\xi^2 - \xi - \xi^3 + \xi^2 + 2\xi^3 - 3\xi^2) L\phi = -\xi L\phi \quad \checkmark \end{aligned}$$

c) Matrizen

Mit $d^2/dx^2 = (1/L^2)d^2/d\xi^2$ gilt für die Elemente der Steifigkeitsmatrix:

$$K_{mn} = \frac{EI_y}{L^3} \int_0^1 \frac{d^2 H_m}{d\xi^2} \frac{d^2 H_n}{d\xi^2} d\xi$$

Mit

$$\frac{d^2 H_1}{d\xi^2} = 12\xi - 6, \quad \frac{d^2 H_2}{d\xi^2} = -L(6\xi - 4), \quad \frac{d^2 H_3}{d\xi^2} = -12\xi + 6, \quad \frac{d^2 H_4}{d\xi^2} = -L(6\xi - 2)$$

folgt:

$$K_{11} = \frac{EI_y}{L^3} \int_0^1 (12\xi - 6)^2 d\xi = 12 \frac{EI_y}{L^3}$$

$$K_{12} = -\frac{EI_y}{L^2} \int_0^1 (12\xi - 6)(6\xi - 4) d\xi = -6 \frac{EI_y}{L^2}$$

$$K_{13} = \frac{EI_y}{L^3} \int_0^1 (12\xi - 6)(-12\xi + 6) d\xi = -12 \frac{EI_y}{L^3}$$

$$K_{14} = -\frac{EI_y}{L^2} \int_0^1 (12\xi - 6)(6\xi - 2) d\xi = -6 \frac{EI_y}{L^2}$$

$$K_{22} = \frac{EI_y}{L} \int_0^1 (6\xi - 4)^2 d\xi = 4 \frac{EI_y}{L}$$

$$K_{23} = -\frac{EI_y}{L^2} \int_0^1 (6\xi - 4)(-12\xi + 6) d\xi = 6 \frac{EI_y}{L^2}$$

$$K_{24} = \frac{EI_y}{L} \int_0^1 (6\xi - 4)(6\xi - 2) d\xi = 2 \frac{EI_y}{L^2}$$

$$K_{33} = \frac{EI_y}{L^3} \int_0^1 (-12\xi + 6)^2 d\xi = 12 \frac{EI_y}{L^3}$$

$$K_{34} = -\frac{EI_y}{L^2} \int_0^1 (-12\xi + 6)(6\xi - 2) d\xi = 6 \frac{EI_y}{L^2}$$

$$K_{44} = \frac{EI_y}{L} \int_0^1 (6\xi - 2)^2 d\xi = 4 \frac{EI_y}{L}$$

Damit lautet die Steifigkeitsmatrix:

$$[k^E] = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Für Starrkörperbewegungen müssen die elastischen Kräfte null sein:

Starrkörpertranslation in z-Richtung:

$$\begin{bmatrix} u_z^E \end{bmatrix} = w_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [k^E] \begin{bmatrix} u_z^E \end{bmatrix} = \frac{E I_y w_0}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Starrkörperrotation um den Mittelpunkt des Elements:

$$\begin{bmatrix} u_\phi^E \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} L/2 \\ 1 \\ -L/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [k^E] \begin{bmatrix} u_\phi^E \end{bmatrix} = \frac{E I_y \phi}{2L^2} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6L & 4L & 6L & 2L \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6L & 2L & 6L & 4L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Für die Elemente der Massenmatrix gilt:

$$M_{mn} = \rho A L \int_0^1 H_m H_n d\xi$$

Die Berechnung der Integrale ergibt:

$$M_{11} = \rho A L \int_0^1 (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)^2 d\xi = \frac{13}{35} \rho A L$$

$$M_{12} = -\rho A L^2 \int_0^1 (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) d\xi = -\frac{11}{210} \rho A L^2$$

$$M_{13} = \rho A L \int_0^1 (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(-2\xi^3 + 3\xi^2) d\xi = \frac{9}{70} \rho A L$$

$$M_{14} = -\rho A L^2 \int_0^1 (2\xi^3 - 3\xi^2 + 1)(\xi^3 - \xi^2) d\xi = \frac{13}{420} \rho A L^2$$

$$M_{22} = \rho A L^3 \int_0^1 (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)^2 d\xi = \frac{1}{105} \rho A L^3$$

$$M_{23} = -\rho A L^2 \int_0^1 (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(-2\xi^3 + 3\xi^2) d\xi = -\frac{13}{420} \rho A L^2$$

$$M_{24} = \rho A L^3 \int_0^1 (\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)(\xi^3 - \xi^2) d\xi = -\frac{1}{140} \rho A L^3$$

$$M_{33} = \rho A L \int_0^1 (-2\xi^3 + 3\xi^2)^2 d\xi = \frac{13}{35} \rho A L$$

$$M_{34} = -\rho A L^2 \int_0^1 (-2\xi^3 + 3\xi^2)(\xi^3 - \xi^2) d\xi = \frac{11}{210} \rho A L^2$$

$$M_{44} = \rho A L^3 \int_0^1 (\xi^3 - \xi^2)^2 d\xi = \frac{1}{105} \rho A L^3$$

Mit $m = \rho A L$ lautet die Massenmatrix:

$$[m^E] = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L & 54 & 13L \\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2 \\ 54 & -13L & 156 & 22L \\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Die Massenmatrix kann durch Berechnung der kinetischen Energie für die Starrkörperbewegungen überprüft werden.

Für eine Starrkörpertranslation in z-Richtung gilt:

$$[\dot{u}_z^E] = \dot{w}_0 [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$E^K = \frac{1}{2} [\dot{u}_z^E]^T [m^E] [\dot{u}_z^E] = \frac{1}{840} m \dot{w}_0^2 [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 210 \\ -35L \\ 210 \\ 35L \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m \dot{w}_0^2 \quad \checkmark$$

Für eine Starrkörperrotation um den Mittelpunkt des Elements gilt:

$$[\dot{u}_\phi^E] = \frac{\dot{\phi}}{2} [L \quad 2 \quad -L \quad 2]^T$$

$$E^K = \frac{1}{2} [\dot{u}_\phi^E]^T [m^E] [\dot{u}_\phi^E] = \frac{m \dot{\phi}^2}{3360} [L \quad 2 \quad -L \quad 2] \begin{bmatrix} 84L \\ -7L^2 \\ -84 \\ -7 \end{bmatrix} = \frac{1}{24} m L^2 \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} J_z \dot{\phi}^2 \quad \checkmark$$