

5.3 Frequenzganganalyse

Lösungen

Aufgabe 1

GNU Octave-Skript

```
# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 1: Ebenes Rahmentragwerk
#
# -----

set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

file = mfilename();
fid = fopen([file, ".res"], "wt");

# Daten (N, mm)
# -----

nmodes = 20; % Anzahl der Eigenschwingungen

a = 2500; % Längeneinheit
nela = 10; % Anzahl Elemente pro Längeneinheit

E = 2.1E5; % E-Modul
rho = 7.85E-9; % Massendichte

A = 106E2; % Querschnittsfläche
I = 11260E4; % Flächenträgheitsmoment

aK = 1E-5; % Koeffizient für Rayleigh-Dämpfung
aM = 2; % Koeffizient für Rayleigh-Dämpfung

f = 2 : 2 : 200; % Erregerfrequenzen
nb = 7; % Frequenzen pro Halbwertsbreite

# Modell
# -----

model = struct("type", "solid", "subtype", "2d");

# Geometrie- und Materialdaten

geom = struct("A", A, "I", I);
mat = struct("type", "iso", "E", E, "rho", rho);

# Äußerer Rahmen
```

```

idA = 1;
idB = idA + nela;
idC = idB + nela;
idD = idC + nela;
idE = idD + nela;
idF = idE + nela;
idG = idF + nela;
idH = idG + nela;
idK = idH + nela;

nodes(1).id = idA; nodes(1).coord = [-a, 0];
nodes(2).id = idD; nodes(2).coord = [-a, 3 * a];
nodes(3).id = idF; nodes(3).coord = [ a, 3 * a];
nodes(4).id = idK; nodes(4).coord = [ a, 0];

[nodes, elem1] = mfs_line(nodes, idA, idD,
    (idA + 1) : (idD - 1),
    1 : (3 * nela), "b2",
    geom, mat);
[nodes, elem2] = mfs_line(nodes, idD, idF,
    (idD + 1) : (idF - 1),
    (3 * nela + 1) : (5 * nela),
    "b2", geom, mat);
[nodes, elem3] = mfs_line(nodes, idF, idK,
    (idF + 1) : (idK - 1),
    (5 * nela + 1) : (8 * nela),
    "b2", geom, mat);

# Querbalken BH und CG

id1 = idK + 1;
id2 = idK + 2 * nela - 1;
[nodes, elem4] = mfs_line(nodes, idB, idH, id1 : id2,
    (8 * nela + 1) : (10 * nela),
    "b2", geom, mat);

id1 = id2 + 1;
id2 = id1 + 2 * nela - 2;
[nodes, elem5] = mfs_line(nodes, idC, idG, id1 : id2,
    (10 * nela + 1) : (12 * nela),
    "b2", geom, mat);

model.nodes = nodes;
model.elements = [elem1, elem2, elem3, elem4, elem5];

# Einspannung

model.constraints.prescribed = struct("id", {idA, idK},
    "dofs", 1 : 3);

# Last

model.loads.point = struct("id", {idG, idH},
    "data", [1, 0],
    "lc", {1, 2});

```

```
# Dämpfung

model.damping = struct("type", "Rayleigh", "data", [aK, aM]);

# Rechnungen
# -----

# Komponente erzeugen

frame = mfs_new(fid, model);
mfs_plot(frame, "force", 1, "loadcase", 1 : 2);
mfs_export([file, ".msh"], "msh", frame, "mesh");

# Matrizen aufstellen

frame = mfs_stiff(frame);
frame = mfs_mass(frame);

# Eigenschwingungen

frame = mfs_freevib(frame, nmodes);
mfs_print(fid, frame, "modes", "freq");
mfs_export([file, ".dsp"], "msh", frame, "modes", "disp");

# Fehlerabschätzung

rederr = mfs_reductionerror(fid, frame, f);
figure(3, "position", [100, 500, 800, 400],
       "paperposition", [0, 0, 15, 8]);
semilogy(f, rederr(1).erel, f, rederr(2).erel);
legend("Lastfall 1", "Lastfall 2",
       "location", "northwest");
axis([10, f(end), 1e-6, 1e-2]);
grid;
xlabel("f [Hz]");
ylabel("e");
print([file, "e.svg"], "-dsvg");

# Direkte Frequenzganganalyse für Lastfall 1

frame_d = mfs_freqresp(frame, f, "method", "direct",
                      "nband", nb);

# Modale Frequenzganganalyse für Lastfall 1

frame_m = mfs_freqresp(frame, f, "nband", nb);

# Auswertung von Lastfall 1

rid = [idG, 1; idH, 1];
freq = mfs_getresp(frame_d, "freqresp", "freq");
Rd1 = mfs_getresp(frame_d, "freqresp", "acce",
                  rid, 1);
Rm1 = mfs_getresp(frame_m, "freqresp", "acce",
                  rid, 1);
```

```

figure(4, "position", [1100, 500, 700, 700],
      "paperposition", [0, 0, 15, 13]);
subplot(2, 1, 1)
    semilogy(freq, abs(Rd1(1, :)), "color", "green",
             freq, abs(Rm1(1, :)), "color", "red");
    grid;
    legend("direkt", "modal", "location", "north");
    axis("labely");
    ylabel("A_{GG} [mm/(s^2 N)]");
subplot(2, 1, 2)
    semilogy(freq, abs(Rd1(2, :)), "color", "green",
             freq, abs(Rm1(2, :)), "color", "red");
    grid;
    ylabel("A_{HG} [mm/(s^2 N)]");
    xlabel("f [Hz]");
print([file, "lc1.svg"], "-dsvg");

# Modale Frequenzganganalyse für Lastfall 2

frame_m = mfs_freqresp(frame_m, f, "nband", nb,
                      "loadcase", 2);

# Auswertung von Lastfall 2

Rm2 = mfs_getresp(frame_m, "freqresp", "acce", rid, 2);

figure(5, "position", [1100, 100, 700, 400],
      "paperposition", [0, 0, 15, 7]);

semilogy(freq, abs(Rm2(1, :)), "color", "green",
         freq, abs(Rm2(2, :)), "color", "blue",
         freq, abs(Rm1(2, :)), "color", "red");
grid;
legend("A_{GH}", "A_{HH}", "A_{HG}",
      "location", "south");
ylabel("A [mm/(s^2 N)]");
xlabel("f [Hz]");

print([file, "lc2.svg"], "-dsvg");

fclose(fid);

```

Bewertung der modalen Basis

Liste der modalen Formänderungsenergien:

Modal strain energies of component "frame"

Loadcase 1:

mode	frequency	En/ES	Sum	1 - Sum
1	8.96 Hz	9.30454e-01	0.930454	6.95463e-02
2	31.01 Hz	3.87895e-02	0.969243	3.07568e-02

3	51.51 Hz	1.63209e-05	0.969259	3.07405e-02
4	59.17 Hz	7.82493e-06	0.969267	3.07327e-02
5	59.77 Hz	2.58846e-02	0.995152	4.84813e-03
6	61.98 Hz	9.84296e-06	0.995162	4.83829e-03
7	124.16 Hz	4.98295e-05	0.995212	4.78846e-03
8	143.51 Hz	3.02381e-05	0.995242	4.75822e-03
9	157.06 Hz	1.79365e-06	0.995244	4.75643e-03
10	164.89 Hz	3.69889e-04	0.995613	4.38654e-03
11	185.38 Hz	9.68425e-06	0.995623	4.37685e-03
12	207.79 Hz	8.76724e-04	0.996500	3.50013e-03
13	219.46 Hz	7.56990e-06	0.996507	3.49256e-03
14	242.16 Hz	5.18513e-05	0.996559	3.44071e-03
15	243.91 Hz	1.04400e-05	0.996570	3.43027e-03
16	278.83 Hz	1.74757e-04	0.996744	3.25551e-03
17	331.48 Hz	1.21273e-04	0.996866	3.13424e-03
18	332.85 Hz	3.72847e-04	0.997239	2.76139e-03
19	371.72 Hz	7.41962e-05	0.997313	2.68719e-03
20	373.75 Hz	1.17852e-04	0.997431	2.56934e-03

Upper bound on relative strain energy error (fmax = 200.00 Hz)
 with static correction: 1.2377e-03
 without static correction: 2.5224e-03

Loadcase 2:

mode	frequency	En/ES	Sum	1 - Sum
1	8.96 Hz	5.53900e-01	0.553900	4.46100e-01
2	31.01 Hz	3.24652e-01	0.878552	1.21448e-01
3	51.51 Hz	1.57780e-05	0.878568	1.21432e-01
4	59.17 Hz	2.71079e-05	0.878595	1.21405e-01
5	59.77 Hz	1.05276e-01	0.983871	1.61289e-02
6	61.98 Hz	3.15149e-06	0.983874	1.61258e-02
7	124.16 Hz	1.44072e-05	0.983889	1.61114e-02

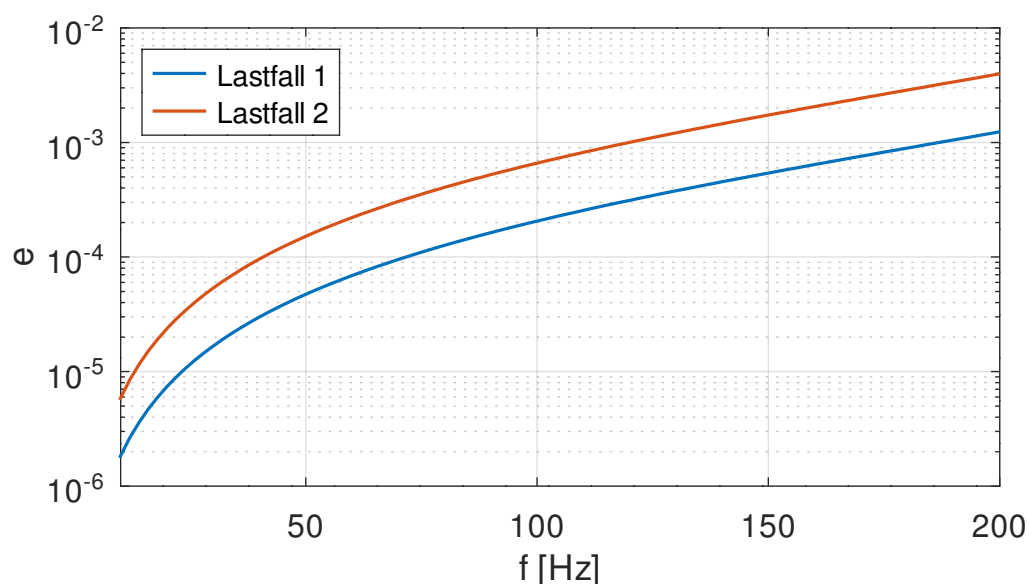
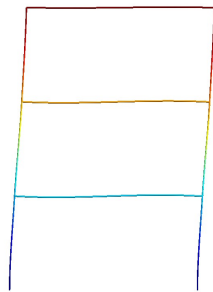


Abbildung 1.1: Relativer Fehler in der Formänderungsenergie

8	143.51 Hz	9.15492e-04	0.984804	1.51959e-02
9	157.06 Hz	1.52272e-06	0.984806	1.51943e-02
10	164.89 Hz	2.35244e-05	0.984829	1.51708e-02
11	185.38 Hz	3.57751e-04	0.985187	1.48131e-02
12	207.79 Hz	3.23289e-04	0.985510	1.44898e-02
13	219.46 Hz	6.64528e-05	0.985577	1.44233e-02
14	242.16 Hz	3.71254e-03	0.989289	1.07108e-02
15	243.91 Hz	6.99403e-05	0.989359	1.06409e-02
16	278.83 Hz	2.08442e-04	0.989568	1.04324e-02
17	331.48 Hz	6.70481e-04	0.990238	9.76193e-03
18	332.85 Hz	2.86290e-04	0.990524	9.47564e-03
19	371.72 Hz	1.64943e-04	0.990689	9.31070e-03
20	373.75 Hz	1.06949e-03	0.991759	8.24121e-03

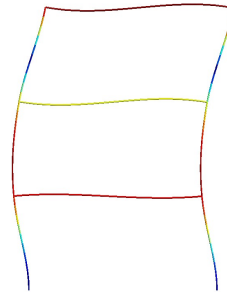
Upper bound on relative strain energy error (fmax = 200.00 Hz)
 with static correction: 3.9700e-03
 without static correction: 8.0906e-03

Die modalen Formänderungsenergien der ersten zwanzig Eigenschwingungen summieren sich für beide Lastfälle zu mehr als 99 % der statischen Formänderungsenergie. Die ersten zwanzig Eigenschwingungen sind daher für die modale Reduktion ausreichend, obwohl die höchste Eigenfrequenz nur um einen Faktor von ca. 1,9 größer ist als die höchste Erregerfrequenz.



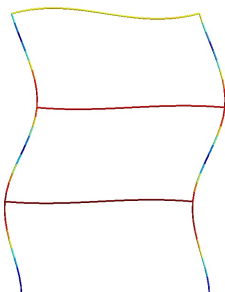
Y
Z X

1. Eigenschwingung: 8,96 Hz



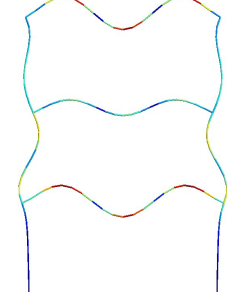
Y
Z X

2. Eigenschwingung: 31,01 Hz



Y
Z X

5. Eigenschwingung: 59,77 Hz



Y
Z X

20. Eigenschwingung: 373,8 Hz

Abbildung 1.2: Einige Eigenschwingungen

Abbildung 1.1 zeigt, dass der relative Fehler in der Formänderungsenergie für beide Lastfälle für alle Frequenzen kleiner als 1 % der statischen Formänderungsenergie ist.

Am stärksten angeregt werden bei beiden Lastfällen die Eigenschwingungen 1, 2 und 5. Sie sind in Abbildung 1.2 zusammen mit der 20. Eigenschwingung dargestellt. Die Diskretisierung ist ausreichend, um die 20. Eigenform abzubilden.

Übertragungsfunktionen

Abbildung 1.3 zeigt zwei Übertragungsfunktionen für eine Kraft am Punkt G. Die mit modaler Reduktion berechneten Ergebnisse stimmen sehr gut mit den Ergebnissen aus einer direkten Frequenzganganalyse überein. Kleinere Abweichungen sind ab etwa 150 Hz zu beobachten.

Die Beschleunigung am Kraftangriffspunkt zeigt im Bereich bis 50 Hz zwei deutlich ausgeprägte Antiresonanzen.

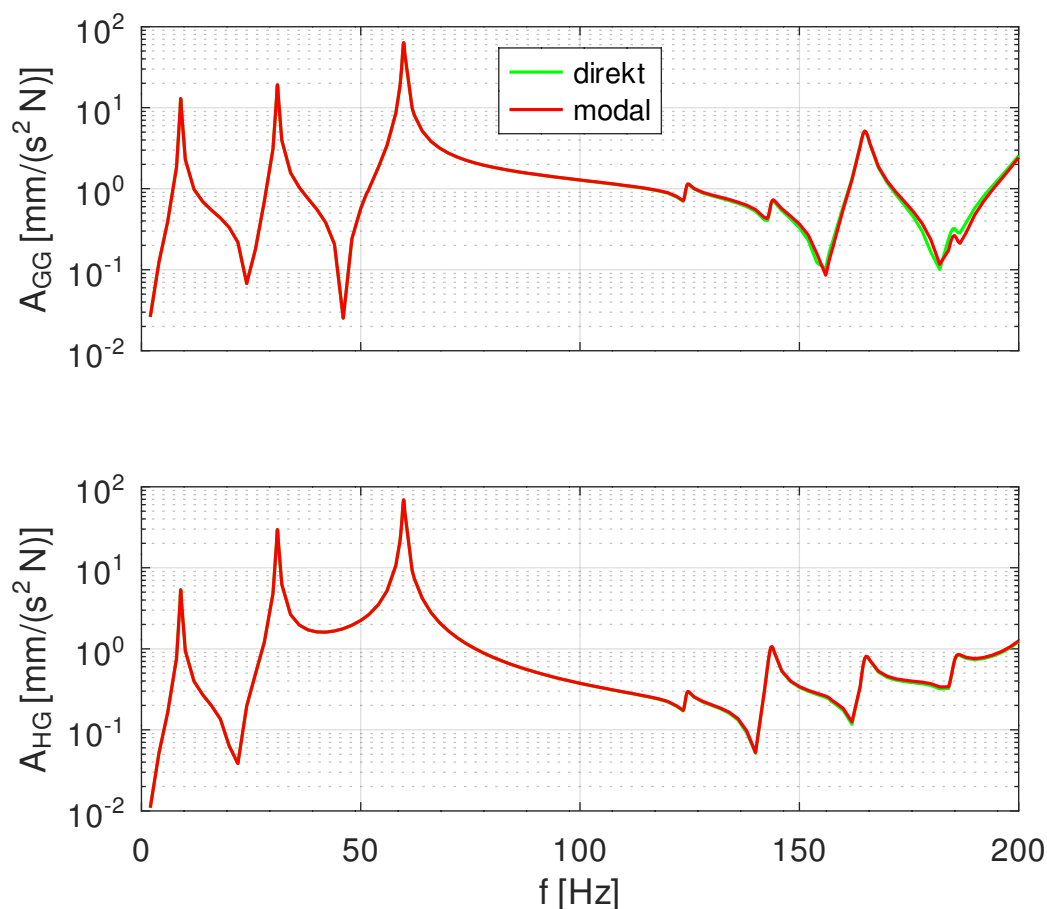


Abbildung 1.3: Übertragungsfunktionen für eine Kraft am Punkt G

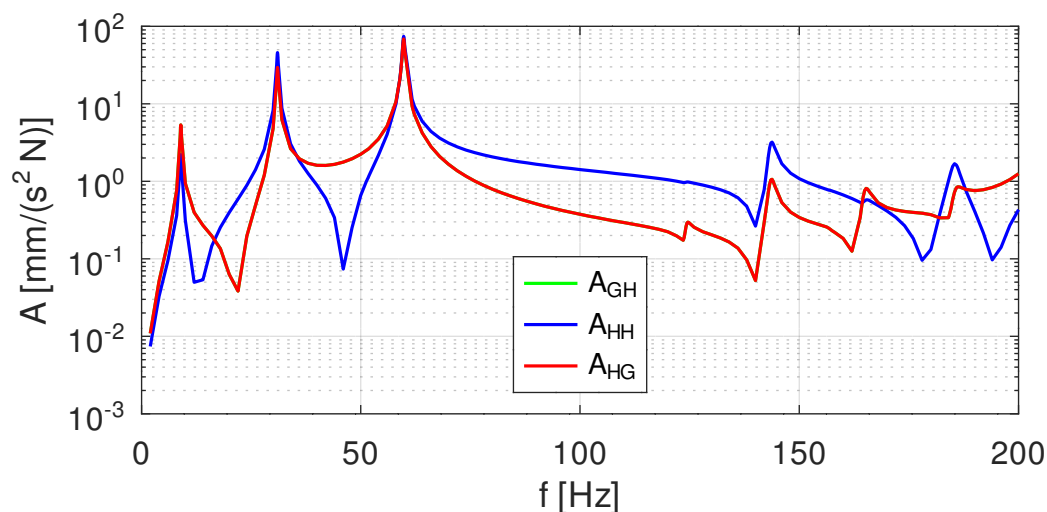


Abbildung 1.4: Übertragungsfunktionen für eine Kraft am Punkt H

Abbildung 1.4 zeigt zwei Übertragungsfunktionen für eine Kraft am Punkt H . Die Beschleunigung am Punkt G infolge einer Kraft H stimmt mit der Beschleunigung am Punkt H infolge einer Kraft am Punkt G überein (Reziprozität).

Aufgabe 2

a) Frequenzbereich für die Analyse

Der Frequenzbereich für die Analyse wird durch das Leistungsdichtespektrum der Anregung festgelegt. Das folgende GNU Octave-Skript liest das Leistungsdichtespektrum ein, stellt es graphisch dar und berechnet den quadratischen Mittelwert für das komplette Leistungsdichtespektrum und das an der unteren und oberen Frequenz abgeschnittene Leistungsdichtespektrum.

```
# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 2:
# Gitterstruktur mit Kraftanregung
#
# a) Leistungsdichtespektrum der Kraft
#
# -----

set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

file = mfilename()(1 : end-1);

# Frequenzbereich für Analyse

f1 = 5; % Niedrigste Frequenz
fu = 60; % Höchste Frequenz

# Leistungsdichtespektrum der Kraft einlesen und darstellen
```



```

data = dlmread([file, ".csv"]);
f     = data(:, 1)';
GFF   = data(:, 2)';

figure(1, "position", [100, 500, 750, 500],
        "paperposition", [0, 0, 12, 8]);
plot(f, GFF);
grid;
xlabel("f [Hz]");
ylabel("G_{FF} [N^2 / Hz]");
print([file, "GFF.svg"], "-dsvg");

# Quadratischer Mittelwert des gesamten Leistungsdichtespektrums

psiF1 = trapz(f, GFF);
printf("psiF1 = %8.0f\n", psiF1);

# Quadratischer Mittelwert des abgeschnittenen
# Leistungsdichtespektrums

i1 = lookup(f, fl);
i2 = lookup(f, fu);
psiF2 = trapz(f(i1 : i2), GFF(i1 : i2));
printf("psiF2 = %8.0f\n", psiF2);
dpsi = 100 * (1 - psiF1 / psiF2);
printf("Loss   = %8.2f %%\n", dpsi);

```

Das Skript gibt die folgenden Werte aus:

```

psiF1 =    40000
psiF2 =    39928
Loss  =   -0.18 %

```

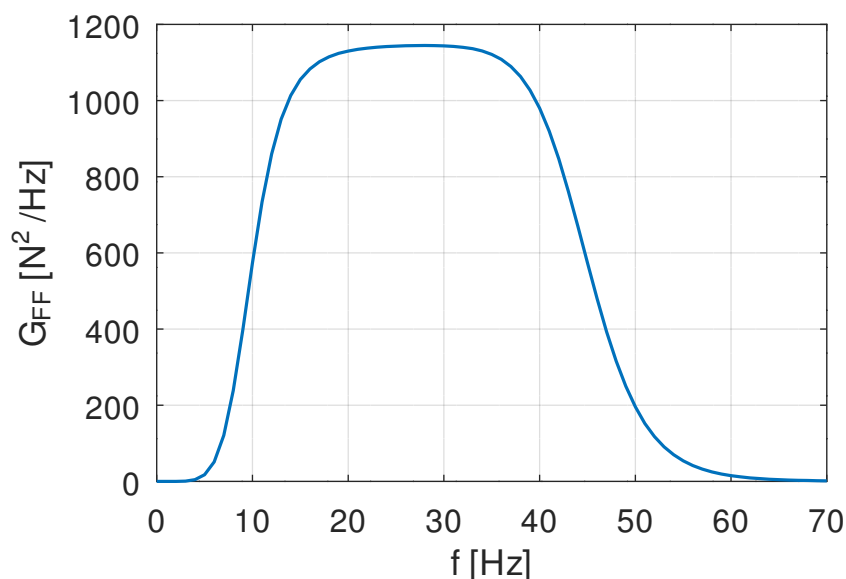


Abbildung 2.1: Leistungsdichtespektrum der Anregung

Der Frequenzbereich zwischen 5 Hz und 60 Hz ist für die Analyse ausreichend. Der Fehler ist kleiner als 0,2 %. Dieses Ergebnis wird auch durch die Darstellung des Leistungsdichtespektrums in Abbildung 2.1 bestätigt.

b) Geometrie und Vernetzung

Das folgenden Gmsh-Skript definiert die Geometrie und die Vernetzung. Es empfiehlt sich, zunächst mit einer gröberen Vernetzung zu beginnen und diese gegebenenfalls zu verfeinern, wenn die höheren Eigenformen damit nicht ausreichend genau abgebildet werden können.

```
/* -----

Übungsblatt 5.3, Aufgabe 2:
Gitterstruktur mit Kraftanregung

Physical Groups:  Beams      Line      Elemente
                  Bearings   Point     Lagerung
                  Force      Point     Kraft
                  F          Point     Auswertepunkt
                  G          Point     Auswertepunkt
                  H          Point     Auswertepunkt

----- */

/* Abmessung eines Gitterfelds */

DefineConstant [ a = 1000 ];

/* Netzfeinheit */

ne = GetValue("Anzahl Elemente pro Gitterlänge = ?", 10);

/* Abgeleitete Größen */

le = Ceil(a / ne); // Elementlänge
Printf("Kantenlänge = %f", le);

/* Schrift für Views */

fontsize = 24;
fonttype = 4;
textpos = 1;
font = fontsize + 2^8 * fonttype + 2^16 * textpos;

/* Punkte */

For k In {0 : 4}
  For l In {0 : 3}
    Point(newp) = {k * a, l * a, 0, le};
  EndFor
EndFor
```

```
/* Balken in y-Richtung */

p1 = 1;
For k In {1 : 5}
    For l In {1 : 3}
        p2 = p1 + 1;
        Line(newl) = {p1, p2};
        p1 = p2;
    EndFor
    p1 += 1;
EndFor

/* Balken in x-Richtung */

p0 = 1;
For k In {1 : 4}
    p1 = p0;
    For l In {1 : 4}
        p2 = p1 + 4;
        Line(newl) = {p1, p2};
        p1 = p2;
    EndFor
    p0++;
EndFor

/* Alle Balken */

Physical Curve("Beams") = {1 : 31};

/* Einspannung */

Physical Point("Bearings") = {1, 4, 17, 20};

coorA = Point{1};
coorB = Point{4};
coorC = Point{17};
coorD = Point{20};

View "Lagerpunkte" {
    T3(coorA[0], coorA[1], coorA[2], font){ "A" };
    T3(coorB[0], coorB[1], coorB[2], font){ "B" };
    T3(coorC[0], coorC[1], coorC[2], font){ "C" };
    T3(coorD[0], coorD[1], coorD[2], font){ "D" };
};

/* Krafteinleitungspunkt */

Physical Point("Force") = {15};

/* Auswertepunkte */

Physical Point("G") = {10};
Physical Point("F") = {15};
Physical Point("H") = {18};
```

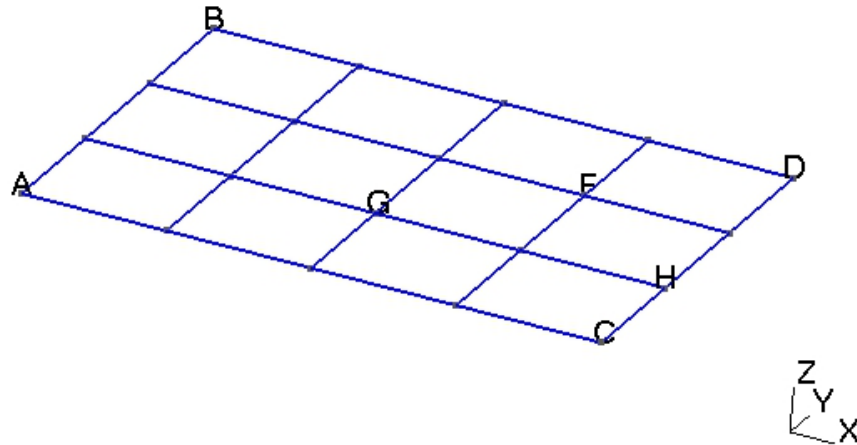


Abbildung 2.2: Geometrie mit Lager- und Auswertepunkten

```

coorG = Point{10};
coorF = Point{15};
coorH = Point{18};

View "Auswertepunkte" {
    T3(coorG[0], coorG[1], coorG[2], font){ "G" };
    T3(coorF[0], coorF[1], coorF[2], font){ "F" };
    T3(coorH[0], coorH[1], coorH[2], font){ "H" };
};

```

Abbildung 2.2 zeigt die mit diesem Skript erzeugte Geometrie mit den Lagerpunkten und den Auswertepunkten.

c) Eigenschwingungen und Fehlerabschätzungen

Das folgende GNU Octave-Skript berechnet die Eigenschwingungen und schätzt den Fehler in der Formänderungsenergie ab:

```

# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 2:
# Gitterstruktur mit Kraftanregung
#
# c) Modalanalyse und Fehlerabschätzung
#
# -----

set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

file = mfilename()(1 : end-1);
fid = fopen([file, "c.res"], "wt");

# Daten (N, mm):

```

```
nmodes    =      50;    % Anzahl der Eigenschwingungen
fmax       =      60;    % höchste Erregerfrequenz
D          =      0.02;  % Lehrsches Dämpfungsmaß

geom = struct("A",      22.8e2,      % Querschnittsfläche
             "Iy",      935e4,      % Flächenträgheitsmomente
             "Iz",      54.7e4,
             "Iyz",      0,
             "IT",      6.57e4,      % Torsionsträgheitsmoment
             "v",      [0, 0, 1]); % Vektor in der xz-Ebene des
Elements
mat = struct("type", "iso",
            "E",      210000,      % Elastizitätsmodul
            "ny",      0.3,      % Querkontraktionszahl
            "rho",      7.85e-9); % Massendichte

# Modelltyp

data = struct("type", "solid", "subtype", "3d");

# Balkendaten

data.Beams = struct("type", "elements", "name", "b2",
                   "geom", geom, "mat", mat);

# Einspannung

data.Bearings = struct("type", "constraints",
                      "name", "prescribed", "dofs", 1 : 3);

# Kraft

data.Force = struct("type", "loads", "name", "point",
                   "data", [0, 0, -1], "lc", 1);

# Dämpfung

data.damping = struct("type", "ratios", "data", D);

# Auswertepunkte

data.F.type = "nodeset";
data.G.type = "nodeset";
data.H.type = "nodeset";

# msh-Datei einlesen

model = mfs_import(fid, [file, ".msh"], "msh", data);

# Komponente initialisieren und plotten

lattice = mfs_new(fid, model);
mfs_export("axes.msh", "msh", lattice, "mesh", "axes");
```

Matrizen aufstellen

```
lattice = mfs_stiff(lattice);
lattice = mfs_mass(lattice);
mfs_massproperties(fid, lattice);
```

Eigenschwingungen

```
lattice = mfs_freevib(lattice, nmodes);
mfs_print(fid, lattice, "modes", "freq");
mfs_export([file, ".dsp"], "msh", lattice, "modes", "disp");
```

Fehlerabschätzung der modalen Reduktion

```
mfs_reductionerror(fid, lattice, fmax);

fclose(fid);
```

Daten speichern

```
save("-binary", [file, "c.bin"], "fmax", "lattice");
```

Zur Überprüfung der korrekten Definition der Koordinatensysteme der Balkenelemente werden die Achsen der Koordinatensysteme nach Gmsh exportiert. Abbildung 2.3 zeigt, dass die z-Achsen korrekt definiert sind.

Die folgende Liste zeigt die Formänderungsenergien:

Modal strain energies of component "lattice"

Loadcase 1:

mode	frequency	En/ES	Sum	1 - Sum
------	-----------	-------	-----	---------

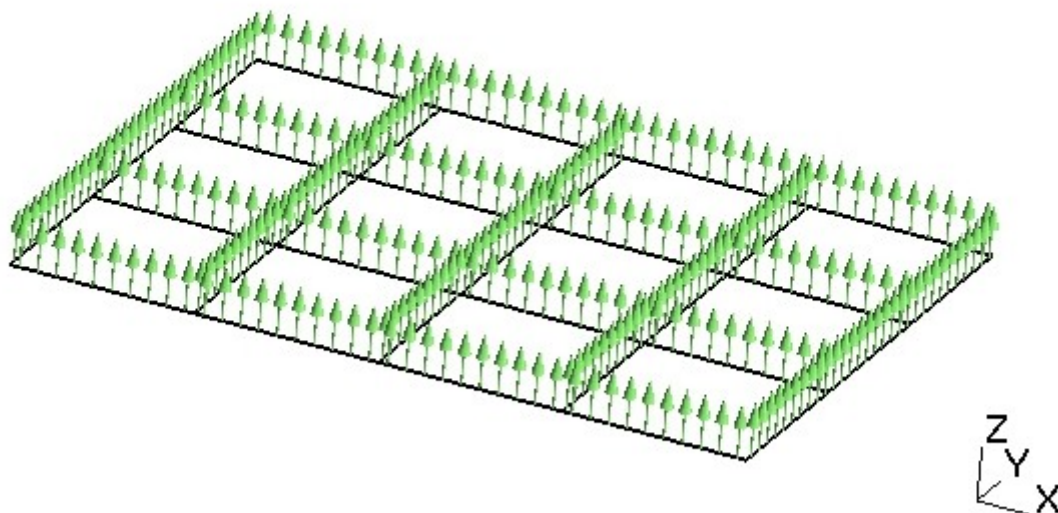


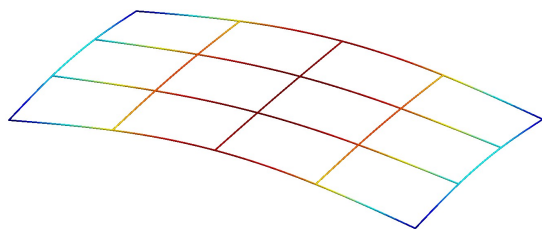
Abbildung 2.3: z-Achsen des Balkensystems

1	18.94 Hz	6.80891e-31	0.000000	1.00000e+00
2	21.90 Hz	6.31692e-01	0.631692	3.68308e-01
3	26.40 Hz	5.22807e-30	0.631692	3.68308e-01
4	26.98 Hz	8.91194e-02	0.720811	2.79189e-01
5	41.06 Hz	4.68016e-32	0.720811	2.79189e-01
6	45.23 Hz	1.35367e-01	0.856178	1.43822e-01
7	57.46 Hz	1.38288e-32	0.856178	1.43822e-01
8	58.78 Hz	9.34469e-03	0.865523	1.34477e-01
9	65.50 Hz	6.75382e-32	0.865523	1.34477e-01
10	73.59 Hz	2.52645e-02	0.890787	1.09213e-01
11	104.84 Hz	1.67086e-02	0.907496	9.25041e-02
12	111.08 Hz	2.36317e-02	0.931128	6.88724e-02
13	125.81 Hz	4.09121e-30	0.931128	6.88724e-02
14	127.06 Hz	4.54976e-03	0.935677	6.43227e-02
15	128.96 Hz	3.54269e-04	0.936032	6.39684e-02
16	129.38 Hz	1.59183e-04	0.936191	6.38092e-02
17	129.46 Hz	4.74731e-05	0.936238	6.37618e-02
18	129.72 Hz	5.25111e-06	0.936243	6.37565e-02
19	129.75 Hz	5.66055e-06	0.936249	6.37509e-02
20	129.77 Hz	5.62775e-06	0.936255	6.37452e-02
21	129.77 Hz	8.33315e-06	0.936263	6.37369e-02
22	129.83 Hz	5.66509e-06	0.936269	6.37312e-02
23	129.91 Hz	4.55459e-07	0.936269	6.37308e-02
24	129.96 Hz	9.20163e-08	0.936269	6.37307e-02
25	130.00 Hz	1.69624e-06	0.936271	6.37290e-02
26	130.02 Hz	5.65828e-07	0.936272	6.37284e-02
27	130.03 Hz	1.53269e-07	0.936272	6.37283e-02
28	130.04 Hz	4.22596e-08	0.936272	6.37282e-02
29	130.06 Hz	1.94193e-07	0.936272	6.37280e-02
30	130.07 Hz	4.89078e-08	0.936272	6.37280e-02
31	130.07 Hz	5.15228e-06	0.936277	6.37228e-02
32	130.08 Hz	9.39988e-07	0.936278	6.37219e-02
33	130.09 Hz	2.20223e-08	0.936278	6.37219e-02
34	130.09 Hz	5.32389e-08	0.936278	6.37218e-02
35	130.11 Hz	3.34542e-07	0.936279	6.37215e-02
36	130.11 Hz	4.84404e-06	0.936283	6.37166e-02
37	130.12 Hz	9.01305e-08	0.936283	6.37165e-02
38	130.12 Hz	2.57476e-08	0.936283	6.37165e-02
39	130.17 Hz	1.08618e-05	0.936294	6.37057e-02
40	130.18 Hz	4.03681e-05	0.936335	6.36653e-02
41	130.35 Hz	8.05726e-07	0.936336	6.36645e-02
42	130.62 Hz	1.71960e-04	0.936507	6.34925e-02
43	130.74 Hz	3.27185e-04	0.936835	6.31653e-02
44	131.85 Hz	9.79629e-04	0.937814	6.21857e-02
45	135.52 Hz	2.27900e-29	0.937814	6.21857e-02
46	137.21 Hz	1.39606e-02	0.951775	4.82251e-02
47	141.08 Hz	8.76260e-31	0.951775	4.82251e-02
48	153.95 Hz	5.13379e-32	0.951775	4.82251e-02
49	158.39 Hz	1.14116e-33	0.951775	4.82251e-02
50	171.00 Hz	5.74391e-32	0.951775	4.82251e-02

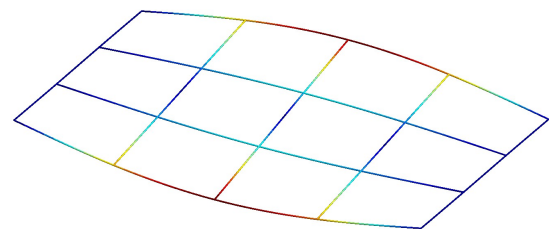
Upper bound on relative strain energy error (fmax = 60.00 Hz)
 with static correction: 7.2464e-03
 without static correction: 3.1359e-02

Die Formänderungsenergien summieren sich zu 95 % der statischen Formänderungsenergie auf. Der größte relative Fehler in der Formänderungsenergie tritt bei der höchsten Erregerfrequenz, d. h. bei 60 Hz, auf. Bei einer Rechnung mit Restmodekorrektur beträgt er 0,72 %.

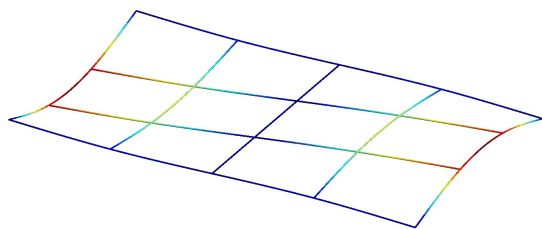
Abbildung 2.4 zeigt einige der Eigenschwingungen. Die wesentlichen Eigenschwingungen im betrachteten Frequenzbereich sind die Eigenschwingungen 2, 4, 6 und 8. Die höchste Eigenschwingung, die einen Beitrag zur Antwort liefert, ist die 46. Eigenschwingung. Abbildung 2.4 zeigt, dass die Vernetzung mit 10 Elementen pro Gitterlänge fein genug ist.



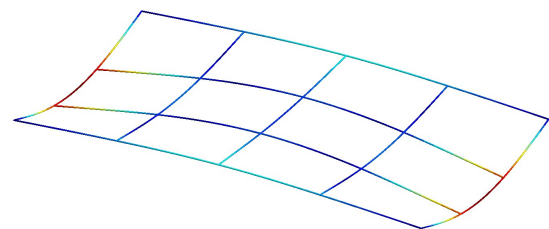
2. Eigenschwingung: 21,90 Hz



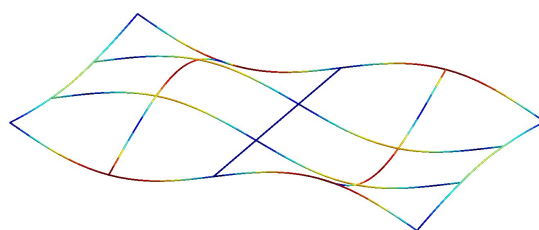
4. Eigenschwingung: 26,98 Hz



6. Eigenschwingung: 45,23 Hz



8. Eigenschwingung: 57,78 Hz



46. Eigenschwingung: 137,2 Hz

Abbildung 2.4: Einige Eigenschwingungen

d) Übertragungsfunktionen

Das folgende GNU Octave-Skript berechnet die benötigten Übertragungsfunktionen:

```
# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 2:
# Gitterstruktur mit Kraftanregung
#
# d) Übertragungsfunktionen
#
# -----

colors = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1];
set(0, "defaultaxescolororder", colors);
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

file = mfilename()(1 : end-1);
load([file, "c.bin"]);

# Daten (N, mm):

f = 5 : 1 : fmax;    % Erregerfrequenzen
nb = 7;             % Erregerfrequenzen pro Bandbreite
g = 9810;           % Erdbeschleunigung

# Frequenzganganalyse

[lattice, f] = mfs_freqresp(lattice, f, "nband", nb);

# Ausgabe der Übertragungsfunktionen

rid = {"F", 3; "G", 3; "H", 3};
R = mfs_getresp(lattice, "freqresp", "acce", rid)/g;

figure(1, "position", [100, 500, 800, 500],
        "paperposition", [0, 0, 12, 8]);
semilogy(f, abs(R));
legend("H_{FF}", "H_{GF}", "H_{HF}",
        "location", "southeast");
grid;
xlabel("f [Hz]");
ylabel("a/F [g/N]");
print([file, "d.svg"], "-dsvg");

# Übertragungsfunktionen speichern

save("-binary", [file, "d.bin"], "f", "R");
```

Abbildung 2.5 zeigt die Übertragungsfunktionen. Die Resonanzen der zweiten und der sechsten Eigenschwingung bei 21,90 Hz bzw. bei 45,23 Hz sind am stärksten ausgeprägt. Da Punkt G auf einem Knoten der sechsten Eigenschwingung liegt, zeigt sich diese Resonanz in der zugehörigen Übertragungsfunktion nicht.

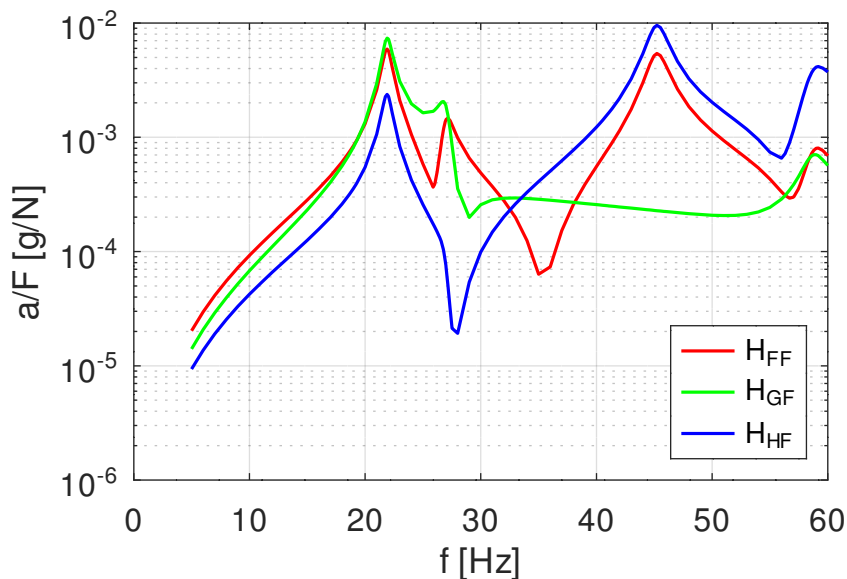


Abbildung 2.5: Übertragungsfunktionen

e) Leistungsdichtespektren der Antworten

Da die Struktur nur durch einen einzigen stochastischen Prozess angeregt wird, berechnen sich die Leistungsdichtespektren der Antworten, indem das Leistungsdichtespektrum der Anregung mit dem Quadrat des Betrags der Übertragungsfunktionen multipliziert wird.

Das folgende GNU Octave-Skript berechnet die Leistungsdichtespektren der Antworten und stellt sie graphisch dar. Zusätzlich werden die RMS-Werte der Beschleunigungen, d. h. die Wurzeln aus den quadratischen Mittelwerten, berechnet und ausgegeben.

Die Leistungsdichtespektren werden für die Frequenzen berechnet, für die die Übertragungsfunktionen berechnet wurden. Dadurch wird der Einfluss der Resonanzen erfasst. Das Leistungsdichtespektrum der Anregung wird daher zunächst durch Interpolation auf diese Frequenzen umgerechnet.

```
# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 2:
# Gitterstruktur mit Kraftanregung
#
# e) Leistungsdichtespektren der Antworten
#
# -----
```

```
colors = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1];
set(0, "defaultaxescolororder", colors);
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

file = mfilename()(1 : end-1);
fid = fopen([file, "e.res"], "wt");

load([file, "d.bin"]);
```

Leistungsdichtespektrum der Kraft

```
data = dlmread([file, ".csv"]);
fin = data(:, 1)';
GFFin = data(:, 2)';
```

Interpolation auf die Erregerfrequenzen

```
GFF = interp1(fin, GFFin, f);

figure(1, "position", [100, 500, 750, 500]);
plot(f, GFF, fin, GFFin);
grid;
legend("Gegeben", "Interpoliert");
xlabel("f [Hz]");
ylabel("G_{FF} [N^2/Hz]");
```

Leistungsdichtespektren der Antworten

```
GAF = abs(R(1, :)).^2 .* GFF;
GAG = abs(R(2, :)).^2 .* GFF;
GAH = abs(R(3, :)).^2 .* GFF;

figure(2, "position", [600, 500, 750, 500],
        "paperposition", [0, 0, 12, 8]);
semilogy(f, GAF, f, GAG, f, GAH);
legend("G_{aF}", "G_{aG}", "G_{aH}", "location", "southeast");
grid;
xlabel("f [Hz]");
ylabel("G_a [g^2/Hz]");
print([file, "e.svg"], "-dsvg");
```

RMS-Werte der Beschleunigungen

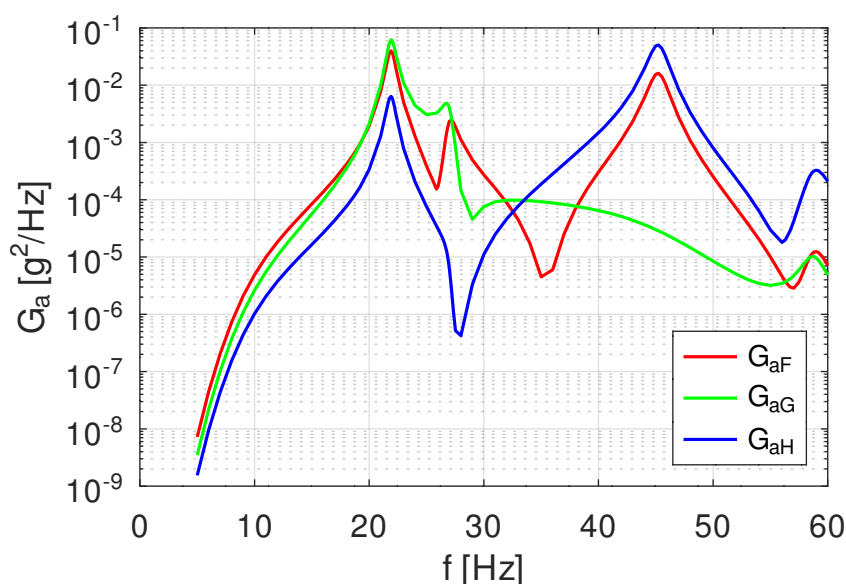


Abbildung 2.6: Leistungsdichtespektren der Antworten

```

aFRMS = sqrt(trapz(f, GAF));
aGRMS = sqrt(trapz(f, GAG));
aHRMS = sqrt(trapz(f, GAH));

fprintf(fid, "RMS-Werte der Beschleunigungen:\n");
fprintf(fid, "   Punkt F: %6.4f g\n", aFRMS);
fprintf(fid, "   Punkt G: %6.4f g\n", aGRMS);
fprintf(fid, "   Punkt H: %6.4f g\n", aHRMS);

fclose(fid);

```

Abbildung 2.6 zeigt die Leistungsdichtespektren der Beschleunigungen. Die Ausgabedatei enthält die folgenden RMS-Werte der Beschleunigungen:

RMS-Werte der Beschleunigungen:

```

Punkt F: 0.3137 g
Punkt G: 0.3099 g
Punkt H: 0.3744 g

```

Aufgabe 3

a) Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren der Anregung

Das folgende GNU Octave-Skript berechnet die Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren der Anregung sowie die Kohärenzen für Punkt A. Für die Kohärenzen gilt:

$$\gamma_{AX}^2 = \frac{|G_{AX}|^2}{G_{AA} G_{XX}}, \quad X \in [B, C, D]$$

```

# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 3:
# Gitterstruktur mit Beschleunigungsanregung
#
# a) Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren
#
# -----

```

```

pkg load signal

colors = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 1];
set(0, "defaultaxescolororder", colors);
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

file = mfilename(1 : end-1);
fid = fopen([file, "a.res"], "wt");

# Frequenzbereich für Analyse

fl = 1; % Niedrigste Frequenz
fu = 60; % Höchste Frequenz

```

```
# Parameter für die Berechnung der Spektren

wln = 128; % Fensterlänge
ovl = 0.5; % Overlap

# Daten einlesen

data = dlmread([file, ".csv"]);
t     = data(:, 1)';
aA    = data(:, 2)';
aB    = data(:, 3)';
aC    = data(:, 4)';
aD    = data(:, 5)';

# Quadratische Mittelwerte aus Zeitreihen

psiAt = meansq(aA);
psiBt = meansq(aB);
psiCt = meansq(aC);
psiDt = meansq(aD);

# Abtastrate

dt = mean(diff(t));
fs = 1 / dt;

# Leistungsdichtespektren

[GAA, f] = pwelch(aA, wln, ovl, [], fs);
[GBB, f] = pwelch(aB, wln, ovl, [], fs);
[GCC, f] = pwelch(aC, wln, ovl, [], fs);
[GDD, f] = pwelch(aD, wln, ovl, [], fs);

figure(1, "position", [100, 500, 750, 500],
       "paperposition", [0, 0, 12, 8]);
plot(f, GAA, f, GBB, f, GCC, f, GDD);
legend("G_{AA}", "G_{BB}", "G_{CC}", "G_{DD}",
       "location", "northeast");
grid;
xlabel("f [Hz]");
ylabel("G [g^2/Hz]");
print([file, "a.svg"], "-dsvg");

# Quadratische Mittelwerte der abgeschnittenen Spektren

i1 = lookup(f, fl);
i2 = lookup(f, fu);
psiAf = trapz(f(i1 : i2), GAA(i1 : i2));
psiBf = trapz(f(i1 : i2), GBB(i1 : i2));
psiCf = trapz(f(i1 : i2), GCC(i1 : i2));
psiDf = trapz(f(i1 : i2), GDD(i1 : i2));

fprintf(fid, "Quadratische Mittelwerte:\n");
fprintf(fid, "  Punkt   aus Zeitreihe       aus PSD\n");
```

```

fprintf(fid, "      A      %8.4e g^2      %8.4e g^2\n", psiAt, psiAf);
fprintf(fid, "      B      %8.4e g^2      %8.4e g^2\n", psiBt, psiBf);
fprintf(fid, "      C      %8.4e g^2      %8.4e g^2\n", psiCt, psiCf);
fprintf(fid, "      D      %8.4e g^2      %8.4e g^2\n", psiDt, psiDf);

fclose(fid);

# Kreuzleistungsdichtespektren

[GAB, f] = cpsd(aA, aB, wln, ovl, [], fs);
[GAC, f] = cpsd(aA, aC, wln, ovl, [], fs);
[GAD, f] = cpsd(aA, aD, wln, ovl, [], fs);
[GBC, f] = cpsd(aB, aC, wln, ovl, [], fs);
[GBD, f] = cpsd(aB, aD, wln, ovl, [], fs);
[GCD, f] = cpsd(aC, aD, wln, ovl, [], fs);

# Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren speichern
# (transponiert, aber nicht komplex konjugiert)

Gxx = [GAA, GBB, GCC, GDD]';
Gxy = [GAB, GAC, GAD, GBC, GBD, GCD].';

save("-binary", [file, "a.bin"], "f", "Gxx", "Gxy");

# Kohärenzen

gAB = abs(GAB).^2 ./ (GAA .* GBB);
gAC = abs(GAC).^2 ./ (GAA .* GCC);
gAD = abs(GAD).^2 ./ (GAA .* GDD);

figure(2, "position", [600, 500, 750, 500],
       "paperposition", [0, 0, 12, 8]);
plot(f, gAB, f, gAC, f, gAD);
grid;
legend('AB', 'AC', 'AD', "location", "east");
xlabel("f [Hz]");
ylabel('\gamma^2');
print([file, "ag.svg"], "-dsvg");

```

Die Ausgabedatei enthält die folgenden Werte der quadratischen Mittelwerte:

Quadratische Mittelwerte:

Punkt	aus Zeitreihe	aus PSD
A	7.8542e-02 g ²	7.8373e-02 g ²
B	7.8828e-02 g ²	7.8785e-02 g ²
C	7.8808e-02 g ²	7.8727e-02 g ²
D	7.8764e-02 g ²	7.8654e-02 g ²

Abbildung 3.1 zeigt die Leistungsdichtespektren der Anregung. Anhand der Leistungsdichtespektren wird für die Analyse ein Frequenzbereich von 5 Hz bis 60 Hz festgelegt.

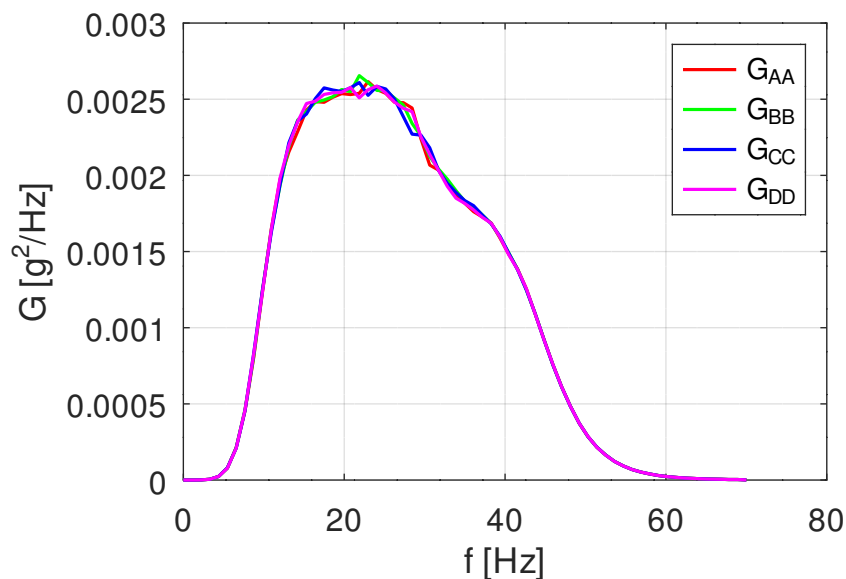


Abbildung 3.1: Leistungsdichtespektren der Anregung

Abbildung 3.2 zeigt die Kohärenzen für Punkt A. Für Frequenzen oberhalb von 40 Hz sind die Kohärenzen nahezu eins, d. h. die Beschleunigungen an den Punkten A bis D werden in diesem Frequenzbereich praktisch durch den selben stochastischen Prozess beschrieben.

b) Geometrie und Vernetzung

Das folgenden Gmsh-Skript definiert die Geometrie und die Vernetzung:

```
/* -----
```

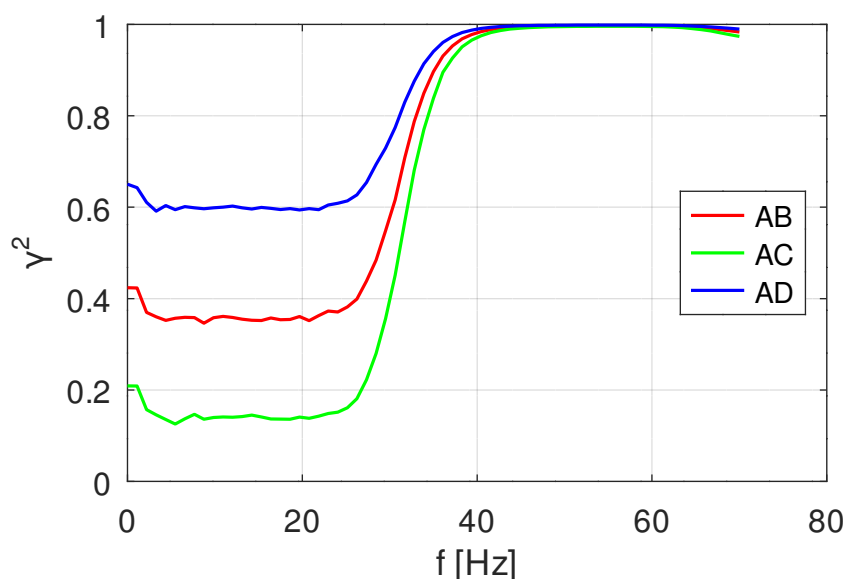


Abbildung 3.2: Kohärenzen zwischen den Anregungen

Übungsblatt 5.3, Aufgabe 3:
Gitterstruktur mit Beschleunigungsanregung

Physical Groups:	Beams	Line	Elemente
	Bearings	Point	Lagerung
	azA	Point	Punkt A
	azB	Point	Punkt B
	azC	Point	Punkt C
	azD	Point	Punkt D
	E	Point	Punkt E

```

----- */

/* Abmessung eines Gitterfelds */

DefineConstant [ a = 1000 ];

/* Netzfeinheit */

ne = GetValue("Anzahl Elemente pro Gitterlänge = ?", 10);

/* Abgeleitete Größen */

le = Ceil(a / ne); // Elementlänge
Printf("Kantenlänge = %f", le);

/* Schrift für Views */

fontsize = 24;
fonttype = 4;
textpos = 1;
font = fontsize + 2^8 * fonttype + 2^16 * textpos;

/* Punkte */

For k In {0 : 4}
  For l In {0 : 3}
    Point(newp) = {k * a, l * a, 0, le};
  EndFor
EndFor

/* Balken in y-Richtung */

p1 = 1;
For k In {1 : 5}
  For l In {1 : 3}
    p2 = p1 + 1;
    Line(newl) = {p1, p2};
    p1 = p2;
  EndFor
  p1 += 1;
EndFor

/* Balken in x-Richtung */

```



```

p0 = 1;
For k In {1 : 4}
  p1 = p0;
  For l In {1 : 4}
    p2 = p1 + 4;
    Line(newl) = {p1, p2};
    p1 = p2;
  EndFor
  p0++;
EndFor

/* Alle Balken */

Physical Curve("Beams") = {1 : 31};

/* Einspannung */

Physical Point("Bearings") = {1, 4, 17, 20};

/* Vorgeschriebene Beschleunigungen */

Physical Point("azA") = { 1};
Physical Point("azB") = {17};
Physical Point("azC") = {20};
Physical Point("azD") = { 4};

coorA = Point{1};
coorB = Point{4};
coorC = Point{17};
coorD = Point{20};

View "Lagerpunkte" {
  T3(coorA[0], coorA[1], coorA[2], font){ "A" };

```

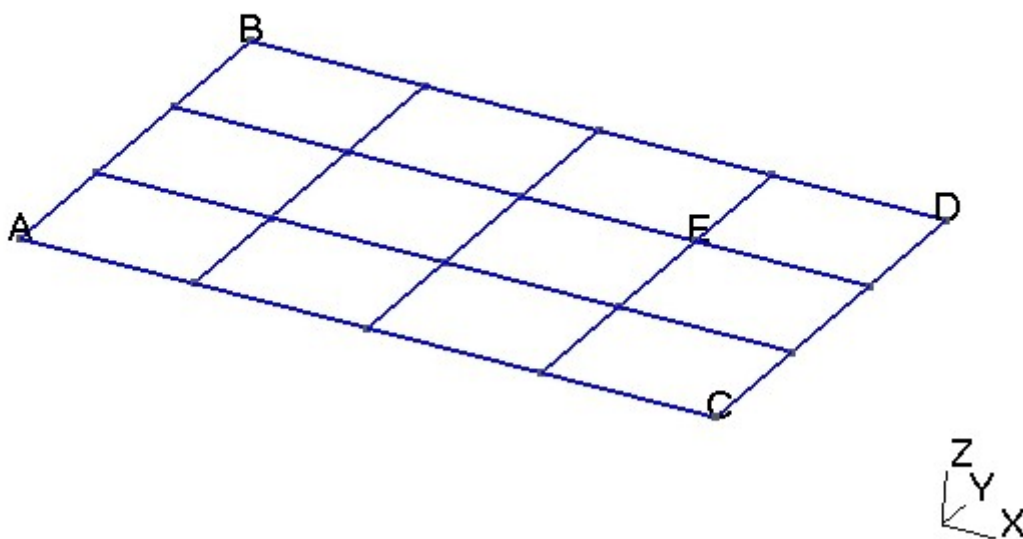


Abbildung 3.3: Geometrie mit Lagerung und Auswertepunkt

```

        T3(coorB[0], coorB[1], coorB[2], font){ "B" };
        T3(coorC[0], coorC[1], coorC[2], font){ "C" };
        T3(coorD[0], coorD[1], coorD[2], font){ "D" };
    };

/* Auswertepunkt */

    Physical Point("E") = {15};

    coorE = Point{15};

    View "Auswertepunkt" {
        T3(coorE[0], coorE[1], coorE[2], font){ "E" };
    };

```

Abbildung 3.3 zeigt die mit diesem Skript erzeugte Geometrie mit den Lagerpunkten und dem Auswertepunkt.

c) Eigenschwingungen und Fehlerabschätzungen

Das folgende GNU Octave-Skript berechnet die Eigenschwingungen, schätzt den Fehler in der Formänderungsenergie ab und berechnet die modalen effektiven Massen:

```

# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 3:
# Gitterstruktur mit Beschleunigungsanregung
#
# c) Modalanalyse
#
# -----

file = mfilename()(1 : end-1);
fid = fopen([file, "c.res"], "wt");

# Daten (N, mm):

nmodes =          45; % Anzahl der Eigenschwingungen
fmax    =          60; % höchste Erregerfrequenz

D        =          0.02; % Lehrsches Dämpfungsmaß

geom = struct("A",      22.8e2,      % Querschnittsfläche
              "Iy",      935e4,      % Flächenträgheitsmomente
              "Iz",      54.7e4,
              "Iyz",      0,
              "IT",      6.57e4,      % Torsionsträgheitsmoment
              "v",      [0, 0, 1]); % Vektor in der xz-Ebene des
                                   % Elements

mat = struct("type", "iso",
              "E",      210000,      % Elastizitätsmodul
              "ny",      0.3,        % Querkontraktionszahl
              "rho",     7.85e-9); % Massendichte

```

```
# Modelltyp

data = struct("type", "solid", "subtype", "3d");

# Balkendaten

data.Beams = struct("type", "elements", "name", "b2",
                    "geom", geom, "mat", mat);

# Einspannung

data.Bearings = struct("type", "constraints",
                       "name", "prescribed", "dofs", 1 : 3);

# Beschleunigungen

data.azA = struct("type", "loads", "name", "acce",
                  "data", [0, 0, 1], "lc", 1);
data.azB = struct("type", "loads", "name", "acce",
                  "data", [0, 0, 1], "lc", 2);
data.azC = struct("type", "loads", "name", "acce",
                  "data", [0, 0, 1], "lc", 3);
data.azD = struct("type", "loads", "name", "acce",
                  "data", [0, 0, 1], "lc", 4);

# Dämpfung

data.damping = struct("type", "ratios", "data", D);

# Auswertepunkt

data.E.type = "nodeset";

# msh-Datei einlesen

model = mfs_import(fid, [file, ".msh"], "msh", data);

# Komponente initialisieren

lattice = mfs_new(fid, model);

# Matrizen aufstellen

lattice = mfs_stiff(lattice);
lattice = mfs_mass(lattice);
mp = mfs_massproperties(fid, lattice);

# Eigenschwingungen

lattice = mfs_freevib(lattice, nmodes);
mfs_print(fid, lattice, "modes", "freq");
mfs_export([file, ".dsp"], "msh", lattice, "modes", "disp");

# Fehlerabschätzung der modalen Reduktion
```

```

mfs_reductionerror(fid, lattice, fmax);
mfs_meffmass(fid, lattice, mp.cm);

fclose(fid);

# Daten speichern

save("-binary", [file, "c.bin"], "fmax", "lattice");

```

Formänderungsenergien

Modal strain energies of component "lattice"

Loadcase 1:

mode	frequency	En/ES	Sum	1 - Sum
1	18.94 Hz	1.95746e-30	0.000000	1.00000e+00
2	21.90 Hz	7.30719e-01	0.730719	2.69281e-01
3	26.40 Hz	1.46513e-29	0.730719	2.69281e-01
4	26.98 Hz	1.91633e-01	0.922352	7.76480e-02
5	41.06 Hz	1.25130e-30	0.922352	7.76480e-02
6	45.23 Hz	6.24673e-02	0.984819	1.51807e-02
7	57.46 Hz	9.64198e-32	0.984819	1.51807e-02
8	58.78 Hz	8.17385e-03	0.992993	7.00684e-03
9	65.50 Hz	1.45385e-33	0.992993	7.00684e-03
10	73.59 Hz	1.63070e-03	0.994624	5.37614e-03
11	104.84 Hz	3.01044e-03	0.997634	2.36570e-03
12	111.08 Hz	2.51815e-04	0.997886	2.11389e-03
13	125.81 Hz	1.97317e-32	0.997886	2.11389e-03
14	127.06 Hz	3.48156e-04	0.998234	1.76573e-03
15	128.96 Hz	3.57857e-07	0.998235	1.76537e-03
16	129.38 Hz	4.67849e-07	0.998235	1.76491e-03
17	129.46 Hz	2.92299e-08	0.998235	1.76488e-03
18	129.72 Hz	3.86326e-08	0.998235	1.76484e-03
19	129.75 Hz	3.72091e-06	0.998239	1.76112e-03
20	129.77 Hz	2.92980e-07	0.998239	1.76082e-03
21	129.77 Hz	1.70143e-08	0.998239	1.76081e-03
22	129.83 Hz	1.64450e-10	0.998239	1.76081e-03
23	129.91 Hz	2.91885e-06	0.998242	1.75789e-03
24	129.96 Hz	1.70525e-06	0.998244	1.75618e-03
25	130.00 Hz	8.68488e-06	0.998253	1.74750e-03
26	130.02 Hz	7.61500e-07	0.998253	1.74674e-03
27	130.03 Hz	7.09279e-06	0.998260	1.73964e-03
28	130.04 Hz	2.70947e-06	0.998263	1.73693e-03
29	130.06 Hz	2.19788e-07	0.998263	1.73672e-03
30	130.07 Hz	2.50714e-08	0.998263	1.73669e-03
31	130.07 Hz	5.06336e-06	0.998268	1.73163e-03
32	130.08 Hz	2.13393e-06	0.998271	1.72949e-03
33	130.09 Hz	1.07385e-06	0.998272	1.72842e-03
34	130.09 Hz	1.07856e-09	0.998272	1.72842e-03
35	130.11 Hz	2.21694e-09	0.998272	1.72842e-03
36	130.11 Hz	3.00087e-06	0.998275	1.72541e-03
37	130.12 Hz	2.57048e-07	0.998275	1.72516e-03

38	130.12 Hz	3.21779e-07	0.998275	1.72484e-03
39	130.17 Hz	3.38063e-06	0.998279	1.72146e-03
40	130.18 Hz	8.49035e-06	0.998287	1.71296e-03
41	130.35 Hz	2.53051e-06	0.998290	1.71043e-03
42	130.62 Hz	1.26502e-07	0.998290	1.71031e-03
43	130.74 Hz	5.63497e-05	0.998346	1.65396e-03
44	131.85 Hz	3.27818e-05	0.998379	1.62118e-03
45	135.52 Hz	2.11908e-32	<u>0.998379</u>	1.62118e-03

Upper bound on relative strain energy error (fmax = 60.00 Hz)
 with static correction: 4.4340e-04
 without static correction: 1.2540e-03

Wegen der doppelten Symmetrie der Struktur stimmen die Formänderungsenergien für die übrigen drei Lastfälle mit denen des ersten Lastfalls überein.

Die Fehlerabschätzung anhand der Formänderungsenergien zeigt, dass die Anzahl der Eigenschwingungen ausreichend ist. Die wesentlichen Eigenschwingungen im betrachteten Frequenzbereich sind die Eigenschwingungen 2, 4, 6 und 8. Sie sind in Abbildung 2.4 dargestellt. Da die gleiche Vernetzung wie in Aufgabe 2 verwendet wird (10 Elemente pro Gitterlänge), ist die Vernetzung ausreichend, um die höchste berücksichtigte Eigenschwingung gut darzustellen.

Modale effektive Massen

Modal effective masses of component "lattice"

Coordinates of reference point: 2000.0000, 1500.0000, 0.0000

mode	frequency	tx	ty	tz	sum tx	sum ty	sum tz
1	18.94 Hz	1.0843e-29	6.9253e-01	2.0554e-30	0.00000	0.69253	0.00000
2	21.90 Hz	1.1701e-31	1.7761e-30	8.3554e-01	0.00000	0.69253	0.83554
3	26.40 Hz	6.4096e-01	1.3310e-29	2.4234e-31	0.64096	0.69253	0.83554
4	26.98 Hz	3.6655e-29	1.5643e-31	2.6247e-22	0.64096	0.69253	0.83554
5	41.06 Hz	9.7112e-30	1.0674e-25	5.2358e-33	0.64096	0.69253	0.83554
6	45.23 Hz	1.0900e-31	9.9352e-33	3.0688e-24	0.64096	0.69253	0.83554
7	57.46 Hz	1.4674e-29	5.7293e-29	7.5861e-31	0.64096	0.69253	0.83554
8	58.78 Hz	7.4067e-31	5.2113e-34	6.7332e-02	0.64096	0.69253	0.90288
9	65.50 Hz	9.1149e-31	4.1041e-02	1.2006e-32	0.64096	0.73357	0.90288
10	73.59 Hz	2.2643e-32	8.3615e-32	2.1052e-02	0.64096	0.73357	0.92393
11	104.84 Hz	1.7532e-31	1.2771e-31	1.0464e-26	0.64096	0.73357	0.92393
12	111.08 Hz	6.2718e-36	1.1427e-31	2.9246e-26	0.64096	0.73357	0.92393
13	125.81 Hz	7.8232e-04	2.8971e-30	2.1851e-32	0.64174	0.73357	0.92393
14	127.06 Hz	5.8210e-32	9.4582e-31	5.5488e-27	0.64174	0.73357	0.92393
15	128.96 Hz	4.6044e-32	1.5865e-32	5.0385e-28	0.64174	0.73357	0.92393
16	129.38 Hz	1.0576e-32	4.7987e-32	3.1727e-31	0.64174	0.73357	0.92393
17	129.46 Hz	4.7868e-31	2.4894e-30	1.1677e-06	0.64174	0.73357	0.92393
18	129.72 Hz	4.8443e-31	1.2394e-32	1.5496e-06	0.64174	0.73357	0.92393
19	129.75 Hz	9.4792e-34	1.4448e-32	5.8673e-28	0.64174	0.73357	0.92393
20	129.77 Hz	2.8898e-31	5.2695e-33	5.5350e-29	0.64174	0.73357	0.92393
21	129.77 Hz	9.2169e-32	1.5394e-32	1.9211e-29	0.64174	0.73357	0.92393
22	129.83 Hz	4.0193e-33	1.0734e-36	4.6821e-28	0.64174	0.73357	0.92393
23	129.91 Hz	3.4386e-32	2.8297e-32	2.8420e-31	0.64174	0.73357	0.92393
24	129.96 Hz	6.9371e-31	1.4690e-30	6.8655e-05	0.64174	0.73357	0.92400
25	130.00 Hz	3.8335e-33	9.7288e-31	8.7086e-32	0.64174	0.73357	0.92400
26	130.02 Hz	4.2765e-31	1.2186e-33	3.0686e-05	0.64174	0.73357	0.92403
27	130.03 Hz	1.8915e-32	4.3002e-31	1.1557e-26	0.64174	0.73357	0.92403
28	130.04 Hz	8.0213e-33	1.3186e-32	1.2359e-27	0.64174	0.73357	0.92403
29	130.06 Hz	4.3999e-32	4.6504e-33	6.4016e-30	0.64174	0.73357	0.92403

30	130.07 Hz	2.8295e-32	5.1467e-32	2.3940e-26	0.64174	0.73357	0.92403
31	130.07 Hz	1.0417e-32	3.3872e-32	2.0422e-04	0.64174	0.73357	0.92423
32	130.08 Hz	3.6660e-32	1.5977e-33	8.2675e-27	0.64174	0.73357	0.92423
33	130.09 Hz	3.4685e-34	1.5974e-32	2.4137e-27	0.64174	0.73357	0.92423
34	130.09 Hz	1.0294e-33	4.9372e-35	2.0018e-28	0.64174	0.73357	0.92423
35	130.11 Hz	6.6587e-33	9.5908e-32	3.4314e-25	0.64174	0.73357	0.92423
36	130.11 Hz	1.1873e-33	6.1250e-34	1.2110e-04	0.64174	0.73357	0.92436
37	130.12 Hz	2.7848e-34	2.5403e-31	3.8733e-27	0.64174	0.73357	0.92436
38	130.12 Hz	9.8930e-35	1.4783e-35	4.8479e-29	0.64174	0.73357	0.92436
39	130.17 Hz	2.2193e-32	1.0605e-32	3.0713e-26	0.64174	0.73357	0.92436
40	130.18 Hz	3.0104e-32	5.9616e-35	9.9457e-30	0.64174	0.73357	0.92436
41	130.35 Hz	1.4056e-33	4.8096e-31	1.0250e-04	0.64174	0.73357	0.92446
42	130.62 Hz	3.5944e-31	2.4093e-31	5.1453e-06	0.64174	0.73357	0.92446
43	130.74 Hz	7.2671e-32	2.5910e-31	1.3324e-28	0.64174	0.73357	0.92446
44	131.85 Hz	4.4108e-32	8.7028e-32	5.9315e-28	0.64174	0.73357	0.92446
45	135.52 Hz	1.2995e-30	1.0086e-29	2.1983e-32	0.64174	0.73357	0.92446
mode	frequency	rx	ry	rz	sum rx	sum ry	sum rz
1	18.94 Hz	2.4423e-33	1.7415e-33	3.5290e-26	0.00000	0.00000	0.00000
2	21.90 Hz	2.3633e-22	5.6899e-24	1.9780e-33	0.00000	0.00000	0.00000
3	26.40 Hz	2.1533e-29	1.0065e-34	2.9397e-30	0.00000	0.00000	0.00000
4	26.98 Hz	7.5207e-01	9.9475e-26	6.3866e-32	0.75207	0.00000	0.00000
5	41.06 Hz	2.4680e-31	6.5874e-30	2.2778e-01	0.75207	0.00000	0.22778
6	45.23 Hz	8.6631e-26	7.4835e-01	1.6855e-30	0.75207	0.74835	0.22778
7	57.46 Hz	2.3610e-32	2.8416e-32	7.5848e-02	0.75207	0.74835	0.30362
8	58.78 Hz	1.4807e-25	7.8010e-24	7.0698e-30	0.75207	0.74835	0.30362
9	65.50 Hz	1.9211e-32	4.8258e-31	1.0864e-27	0.75207	0.74835	0.30362
10	73.59 Hz	3.0425e-25	1.1143e-25	6.7898e-34	0.75207	0.74835	0.30362
11	104.84 Hz	5.6780e-27	7.1787e-26	1.7687e-32	0.75207	0.74835	0.30362
12	111.08 Hz	3.1983e-27	1.8194e-02	9.3052e-32	0.75207	0.76654	0.30362
13	125.81 Hz	1.3325e-33	1.5661e-28	8.2876e-30	0.75207	0.76654	0.30362
14	127.06 Hz	5.1768e-28	3.2917e-02	3.1053e-32	0.75207	0.79946	0.30362
15	128.96 Hz	3.2083e-05	5.0413e-29	1.1409e-31	0.75210	0.79946	0.30362
16	129.38 Hz	3.7264e-28	3.8844e-28	3.5506e-33	0.75210	0.79946	0.30362
17	129.46 Hz	2.3040e-29	5.5452e-28	6.1268e-32	0.75210	0.79946	0.30362
18	129.72 Hz	3.2292e-29	1.5953e-28	2.1927e-32	0.75210	0.79946	0.30362
19	129.75 Hz	3.3773e-04	4.3909e-30	3.0175e-34	0.75244	0.79946	0.30362
20	129.77 Hz	2.6597e-05	4.5103e-30	8.5889e-35	0.75247	0.79946	0.30362
21	129.77 Hz	6.8438e-28	1.6780e-06	3.4346e-32	0.75247	0.79946	0.30362
22	129.83 Hz	2.5517e-30	1.6234e-08	1.1394e-32	0.75247	0.79946	0.30362
23	129.91 Hz	1.5888e-28	2.3293e-27	6.6276e-34	0.75247	0.79946	0.30362
24	129.96 Hz	2.9249e-27	3.1348e-28	7.7882e-32	0.75247	0.79946	0.30362
25	130.00 Hz	4.0540e-27	2.9443e-26	7.6014e-33	0.75247	0.79946	0.30362
26	130.02 Hz	3.4915e-26	2.1889e-27	1.2887e-32	0.75247	0.79946	0.30362
27	130.03 Hz	6.4651e-04	1.0785e-27	2.0175e-33	0.75311	0.79946	0.30362
28	130.04 Hz	3.3571e-27	2.6833e-04	2.6559e-33	0.75311	0.79973	0.30362
29	130.06 Hz	6.0690e-26	8.9569e-26	6.1255e-34	0.75311	0.79973	0.30362
30	130.07 Hz	8.2993e-29	2.4840e-06	4.1859e-33	0.75311	0.79973	0.30362
31	130.07 Hz	1.5938e-26	3.8581e-29	4.3915e-33	0.75311	0.79973	0.30362
32	130.08 Hz	4.3665e-27	1.1009e-25	2.5720e-34	0.75311	0.79973	0.30362
33	130.09 Hz	9.7968e-05	2.5133e-28	3.4008e-32	0.75321	0.79973	0.30362
34	130.09 Hz	7.9151e-26	1.0689e-07	4.8045e-34	0.75321	0.79973	0.30362
35	130.11 Hz	1.5393e-28	2.1977e-07	3.8293e-32	0.75321	0.79973	0.30362
36	130.11 Hz	2.7111e-27	4.3752e-28	1.6212e-33	0.75321	0.79973	0.30362
37	130.12 Hz	1.3855e-29	2.5486e-05	2.6250e-32	0.75321	0.79976	0.30362
38	130.12 Hz	8.6340e-26	3.0594e-27	5.3577e-35	0.75321	0.79976	0.30362
39	130.17 Hz	3.0883e-04	4.8948e-26	6.7478e-32	0.75352	0.79976	0.30362
40	130.18 Hz	1.6835e-26	8.4258e-04	1.8115e-32	0.75352	0.80060	0.30362
41	130.35 Hz	5.3063e-27	2.8791e-29	7.9511e-32	0.75352	0.80060	0.30362
42	130.62 Hz	3.8679e-28	1.6443e-27	8.9777e-34	0.75352	0.80060	0.30362
43	130.74 Hz	1.3268e-28	2.2136e-27	3.7065e-32	0.75352	0.80060	0.30362
44	131.85 Hz	1.7078e-28	3.3372e-03	6.9681e-32	0.75352	0.80394	0.30362
45	135.52 Hz	1.0817e-32	5.4425e-30	5.0014e-30	0.75352	0.80394	0.30362

Ausschlaggebend sind die modalen effektiven Massen für eine Starrkörpertranslation in z-Richtung und für Starrkörperrotationen um die x-Achse und die y-Achse. Sie summieren sich zu 92 %, 75 % und 80 % auf. Die modalen effektiven Massen liefern eine konservativere Fehlerabschätzung als die Formänderungsenergien. Als wesentliche Eigenschwingungen im betrachte-

ten Frequenzbereich werden auch hier die Eigenschwingungen 2, 4, 6 und 8 identifiziert.

d) Übertragungsfunktionen

Das folgende GNU Octave-Skript berechnet die benötigten Übertragungsfunktionen:

```
# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 3:
# Gitterstruktur mit Beschleunigungsanregung
#
# d) Übertragungsfunktionen
#
# -----

colors = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1; 1, 0, 1];
set(0, "defaultaxescolororder", colors);
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);

file = mfilename()(1 : end-1);

load([file, "c.bin"]);

# Daten (N, mm):

f = 1 : 1 : fmax; % Erregerfrequenzen
nb = 7; % Erregerfrequenzen pro Bandbreite

# Frequenzganganalysen

for lc = 1 : 4
    [lattice, f] = mfs_freqresp(lattice, f,
                               "nband", nb, "loadcase", lc);
end

# Ausgabe der Übertragungsfunktionen

rid = {"E", 3}; % Punkt E

HEA = mfs_getresp(lattice, "freqresp", "acce", rid, 1);
HEB = mfs_getresp(lattice, "freqresp", "acce", rid, 2);
HEC = mfs_getresp(lattice, "freqresp", "acce", rid, 3);
HED = mfs_getresp(lattice, "freqresp", "acce", rid, 4);

figure(1, "position", [100, 500, 800, 500],
       "paperposition", [0, 0, 12, 8]);
semilogy(f, abs(HEA), f, abs(HEB), f, abs(HEC),
          f, abs(HED));
legend("H_{EA}", "H_{EB}", "H_{EC}", "H_{ED}",
       "location", "southeast");
grid;
xlabel("f [Hz]");
ylabel("H");
print([file, "d.svg"], "-dsvg");
```

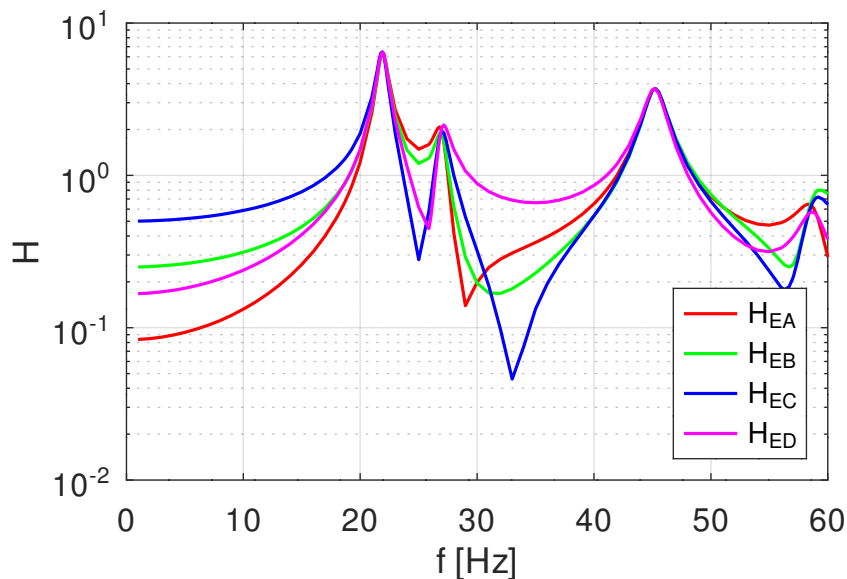


Abbildung 3.4: Übertragungsfunktionen

Komponente mit Übertragungsfunktionen speichern

```
save("-binary", [file, "d.bin"], "lattice");
```

Die berechneten Übertragungsfunktionen sind in Abbildung 3.4 dargestellt.

e) Leistungsdichtespektrum der Antwort

Das Leistungsdichtespektrum der Antwort wird mithilfe der Übertragungsfunktionen aus den Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren der Last berechnet:

$$G_{EE} = \sum_X |H_{EX}|^2 G_{XX} + 2 \sum_X \sum_{Y>X} \Re(H_{EX} G_{XY} \bar{H}_{EY}), \quad X, Y \in \{A, B, C, D\}$$

Die Berechnung erfolgt mit der Funktion `mfs_randresp`.

GNU Octave-Skript:

```
# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 3:
# Gitterstruktur mit Beschleunigungsanregung
#
# e) Leistungsdichtespektrum der Antwort
#
# -----
```

```
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);
```

```
file = mfilename()(1 : end-1);
```

```
# Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren der Anregung
```



```

load([file, "a.bin"]);
fpsd = f;

# Übertragungsfunktionen

load([file, "d.bin"])
fe = f;

# Berechnung des Antwortspektrums

rid      = {"E", 3};
[Gee, f] = mfs_randresp(lattice, Gxx, Gxy, "acce", rid, fpsd);

# Ausgabe

figure(2, "position", [200, 500, 750, 500],
       "paperposition", [0, 0, 12, 8]);
semilogy(f, Gee);
grid;
xlabel("f [Hz]");
ylabel("G_{EE} [g^2/Hz]");
print([file, "e.svg"], "-dsvg");

# RMS-Wert

aERMS = sqrt(trapz(f, Gee));
printf("RMS-Wert der Beschleunigung: %6.4f g\n",
       aERMS);

```

Das berechnete Leistungsdichtespektrum der Antwort ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Der RMS-Wert der Beschleunigung wird am Bildschirm ausgegeben:

RMS-Wert der Beschleunigung: 1.3085 g

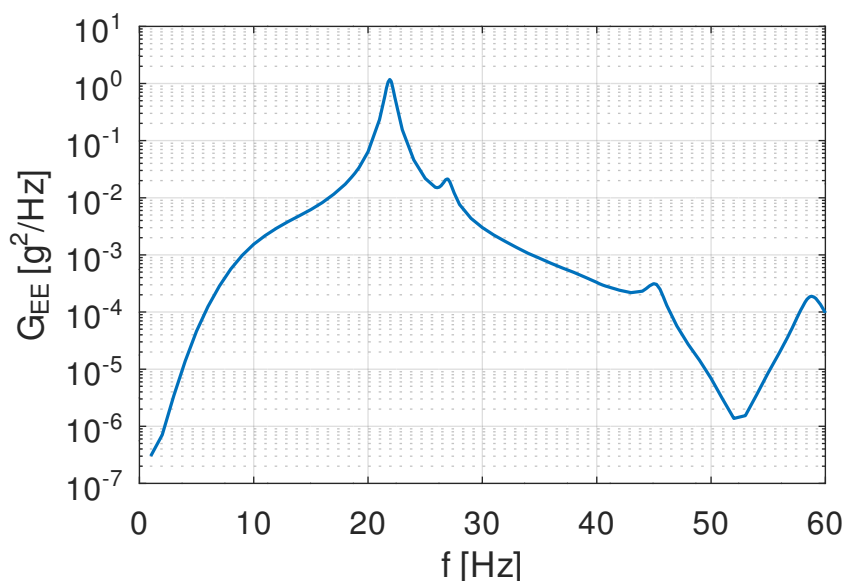


Abbildung 3.5: Leistungsdichtespektrum der Antwort

Aufgabe 4

Geometrie und Vernetzung

Das Berechnungsmodell lässt sich am einfachsten mithilfe von Gmsh erstellen. Um sicherzustellen, dass sich an der Stelle der Punkte P und Q Knoten befinden, werden diese Punkte als Points in Gmsh definiert und der Fläche zugewiesen. Dann kann jedoch nur ein unstrukturiertes Netz erstellt werden. Die Elementlänge wird über den Parameter $e1$ gesteuert, dessen Wert abgefragt wird.

```
/* -----
Übungsblatt 5.3, Aufgabe 4: Ebene Platte mit Kraftanregung

Physical Groups:  Plate      Surface  Elemente
                  Edges      Curve    Lagerung
                  Load      Point    Anregung
                  P          Point    Punkt P
                  Q          Point    Punkt Q
----- */

/* Abmessungen in m */

DefineConstant [ a = 2, b = 1.5 ];
DefineConstant [ xP = 0.5, yP = 0.5,
                 xQ = 1.5, yQ = 1.0 ];

/* Netzfeinheit */

e1 = GetValue("Mittlere Elementlänge = ?", 0.05);

/* Schrift für Views */

fontsize = 24;
fonttype = 4;
textpos = 1;
font = fontsize + 2^8 * fonttype + 2^16 * textpos;

/* Punkte */

Point(1) = {0, 0, 0, e1};
Point(2) = {a, 0, 0, e1};
Point(3) = {a, b, 0, e1};
Point(4) = {0, b, 0, e1};

Point(5) = {xP, yP, 0, e1};
Point(6) = {xQ, yQ, 0, e1};

/* Berandung */
```

```

Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 1};

/* Fläche */

Line Loop(1) = {1, 2, 3, 4};
Surface(1) = {1};

/* Elemente */

Physical Surface("Plate") = {1};

/* Lagerung */

Physical Curve("Edges") = {1 : 4};

/* Anregung */

Physical Point("Load") = {5};

/* Auswertung */

Physical Point("P") = {5};
Physical Point("Q") = {6};

/* Vernetzung */

Point{5, 6} In Surface {1}; // Punkte der Fläche zuweisen
Mesh.RecombineAll = 1;     // Vierecke erzeugen

/* Darstellung der Punkte P und Q */

coorP = Point{5};
coorQ = Point{6};

View "Auswertepunkte" {
  T3(coorP[0], coorP[1], coorP[2], font){ "P" };
  T3(coorQ[0], coorQ[1], coorQ[2], font){ "Q" };
};

```

Die Elementlänge lässt sich über die kleinste Wellenlänge ermitteln. Bei einer ebenen Platte gilt

$$\lambda \approx \sqrt{\frac{2\pi}{f}} \sqrt{\frac{B}{\rho h}}$$

mit der Plattensteifigkeit

$$B = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad .$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt

$$B = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \cdot 0,01^3 \text{ m}^3}{12(1 - 0,3^2)} = 19230 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

und

$$\sqrt[4]{\frac{B}{\rho h}} = \sqrt[4]{\frac{19230 \text{ kg m}^2/\text{s}^2}{7850 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,01 \text{ m}}} = 3,956 \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{s}}}.$$

Für eine höchste Frequenz von 900 Hz ergibt sich eine kleinste Wellenlänge von

$$\lambda_{\min} = \sqrt{\frac{2\pi}{900 \text{ Hz}}} \cdot 3,956 \text{ m} \sqrt{\text{Hz}} = 0,33 \text{ m}.$$

Mit einer Elementlänge von 5 cm ergeben sich mindestens sechs Elemente pro Wellenlänge. Diese Vernetzung ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Berechnungsmodell

Das GNU Octave-Skript definiert zunächst die Anzahl der zu berechnenden Eigenschwingungen, die Plattendicke, die Materialkennwerte, die Dämpfung und die Amplitude der Kraft. Anschließend werden die Parameter für die Festlegung der Erregerfrequenzen definiert. Gewählt wird ein gleichmäßiger Frequenzschritt von 2 Hz sowie zusätzlich 5 Erregerfrequenzen in der Halbwertsbreite jeder Resonanz. Der Wert für die Erdbeschleunigung wird für die Umrechnung der Beschleunigungen benötigt.

```
# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 4:
# Ebene Platte mit Kraftanregung
#
# -----
```

```
colors = [1, 0, 0; 0, 1, 0];
set(0, "defaultaxescolororder", colors);
set(0, "defaultaxesfontsize", 12);
```

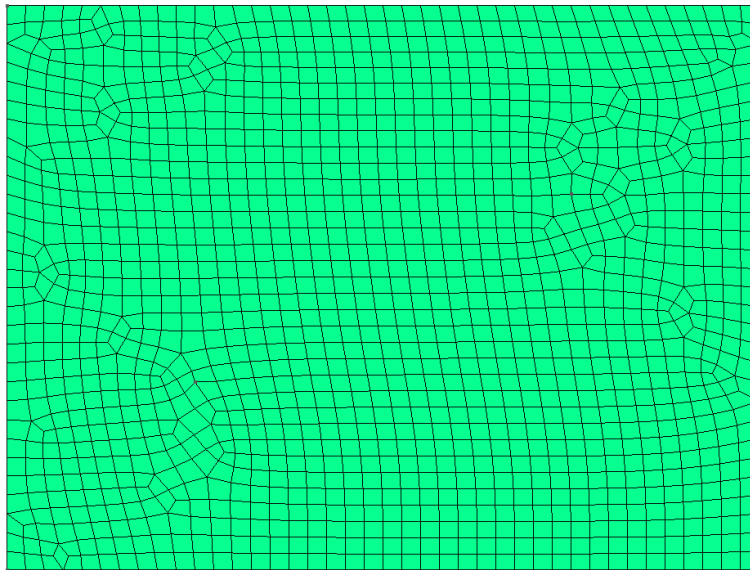
```
file = mfilename();
fid = fopen([file, ".res"], "wt");
```

```
# Daten (kg, m)
```

```
nofmod = 45;    % Anzahl Eigenschwingungen
```

```
geom = struct("t", 0.01);
mat = struct("type", "iso",
            "E", 2.1E11, "ny", 0.3,
            "rho", 7850);
```

```
D = 0.02; % Lehrsches Dämpfungsmaß für alle Schwingungen
F = 1;   % Amplitude der Kraft
```



Y
|
Z x

Abbildung 4.1: Vernetzung der Platte

```
f1 = 10;    % Startfrequenz
f2 = 300;   % Endfrequenz
df = 2;     % Frequenzschritt
nb = 5;     % Frequenzen pro Halbwertsbreite

g = 9.81;   % Erdbeschleunigung
```

Anschließend werden die Übersetzungsdaten definiert und das Netz importiert.

```
# Modell
```

```
data = struct("type", "solid", "subtype", "3d");

data.Plate = struct("type", "elements",
                    "name", "s4", "geom", geom, "mat", mat);

data.Edges = struct("type", "constraints",
                    "name", "prescribed", "dofs", [1 : 3, 6]);

data.Load = struct("type", "loads",
                    "name", "point", "data", [0, 0, -F]);

data.P = struct("type", "nodeset");
data.Q = struct("type", "nodeset");

data.damping = struct("type", "ratios", "data", D);
```

```
[model, nsets] = mfs_import(fid, [file, ".msh"], "msh", data);
```

Als nächstes werden die Eigenschwingungen berechnet und der Fehler in der Formänderungsenergie abgeschätzt.

```
# Modalanalyse
```

```
plate = mfs_new(fid, model);

plate = mfs_stiff(plate);
plate = mfs_mass(plate);
mfs_massproperties(fid, plate);

plate = mfs_freevib(plate, nofmod);
mfs_print(fid, plate, "modes", "freq");
mfs_export("modes.dsp", "msh", plate, "modes", "disp");

mfs_reductionerror(fid, plate, f2);
```

Dann werden die Übertragungsfunktionen berechnet und graphisch dargestellt.

```
# Frequenzganganalyse
```

```
f = f1 : df : f2;
plate = mfs_freqresp(plate, f, "nband", nb);

rid = [nsets.P, 3; nsets.Q, 3];
f = mfs_getresp(plate, "freqresp", "freq");
H = mfs_getresp(plate, "freqresp", "acce", rid) / g;

figure(1, "position", [100, 400, 1000, 700],
        "paperposition", [0, 0, 15, 9.5]);
semilogy(f, abs(H));
legend("H_{PP}", "H_{QP}", "location", "southeast");
grid;
xlabel("f [Hz]"); ylabel("H [g/N]");
print([file, "a.svg"], "-dsvg");
```

Zum Schluss werden die Übertragungsfunktionen mit den in Aufgabe 1 von Übungsblatt 4.3 analytisch berechneten Übertragungsfunktionen verglichen.

```
# Vergleich mit analytischer Lösung
```

```
ref = dlmread("u4_3_1.csv");

figure(2, "position", [400, 400, 1000, 700],
        "paperposition", [0, 0, 15, 15]);
subplot(2, 1, 1)
semilogy(f, abs(H(1, :)), ref(:, 1), ref(:, 2));
legend("numerisch", "analytisch", "location", "southeast");
grid;
axis("labely");
ylabel("H_{PP} [g/N]");
subplot(2, 1, 2)
```

```

semilogy(f, abs(H(2, :)), ref(:, 1), ref(:, 3));
legend("numerisch", "analytisch", "location", "southeast");
grid;
xlabel("f [Hz]"); ylabel("H_{QP} [g/N]");
print([file, "b.svg"], "-dsvg");

fclose(fid);

```

Für die Formänderungsenergien und die darauf basierende Fehlerabschätzung ergeben sich folgende Werte:

Modal strain energies of component "plate"

Loadcase 1:

mode	frequency	En/ES	Sum	1 - Sum
1	17.07 Hz	5.17627e-01	0.517627	4.82373e-01
2	35.50 Hz	2.39297e-01	0.756923	2.43077e-01
3	49.87 Hz	6.06607e-02	0.817584	1.82416e-01
4	66.26 Hz	3.38724e-02	0.851456	1.48544e-01
5	68.20 Hz	6.51643e-02	0.916621	8.33794e-02
6	98.80 Hz	1.53780e-02	0.931999	6.80014e-02
7	104.68 Hz	2.32356e-09	0.931999	6.80014e-02
8	109.41 Hz	5.22614e-08	0.931999	6.80014e-02
9	122.88 Hz	3.62152e-08	0.931999	6.80014e-02
10	141.72 Hz	4.95577e-08	0.931999	6.80013e-02
11	153.22 Hz	2.38666e-09	0.931999	6.80013e-02
12	165.17 Hz	5.55452e-03	0.937553	6.24468e-02
13	181.71 Hz	4.58162e-03	0.942135	5.78652e-02
14	195.75 Hz	1.33376e-07	0.942135	5.78650e-02
15	197.18 Hz	3.89235e-03	0.946027	5.39727e-02
16	199.64 Hz	7.46023e-03	0.953488	4.65125e-02
17	229.62 Hz	2.78313e-03	0.956271	4.37293e-02
18	233.73 Hz	5.70615e-03	0.961977	3.80232e-02
19	250.81 Hz	1.94398e-07	0.961977	3.80230e-02
20	265.39 Hz	4.28369e-03	0.966261	3.37393e-02
21	271.74 Hz	7.93026e-07	0.966262	3.37385e-02
22	281.26 Hz	1.90458e-03	0.968166	3.18339e-02
23	298.94 Hz	3.23944e-03	0.971406	2.85945e-02
24	314.90 Hz	1.58986e-03	0.972995	2.70046e-02
25	318.55 Hz	8.35692e-06	0.973004	2.69962e-02
26	326.34 Hz	1.36382e-03	0.974368	2.56324e-02
27	328.61 Hz	1.43528e-03	0.975803	2.41971e-02
28	346.09 Hz	1.25211e-03	0.977055	2.29450e-02
29	370.08 Hz	5.81555e-07	0.977056	2.29444e-02
30	393.15 Hz	1.88031e-03	0.978936	2.10641e-02
31	398.77 Hz	2.48869e-05	0.978961	2.10393e-02
32	403.63 Hz	2.20874e-06	0.978963	2.10370e-02
33	409.08 Hz	1.14179e-06	0.978964	2.10359e-02
34	420.74 Hz	4.44762e-06	0.978969	2.10315e-02
35	423.56 Hz	8.41577e-04	0.979810	2.01899e-02
36	439.65 Hz	2.89835e-07	0.979810	2.01896e-02
37	450.06 Hz	1.51146e-08	0.979810	2.01896e-02
38	472.13 Hz	5.76308e-04	0.980387	1.96133e-02

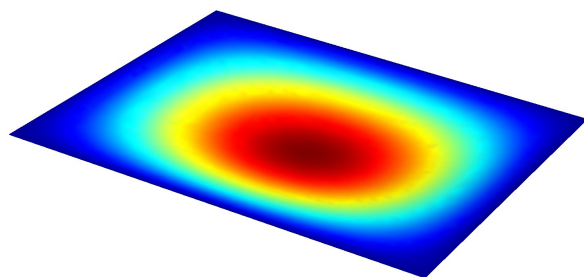
39	489.30 Hz	1.28001e-03	0.981667	1.83333e-02
40	490.72 Hz	6.00009e-07	0.981667	1.83327e-02
41	491.64 Hz	1.16797e-07	0.981667	1.83325e-02
42	517.46 Hz	6.36483e-04	0.982304	1.76961e-02
43	542.68 Hz	2.08666e-06	0.982306	1.76940e-02
44	547.50 Hz	4.52207e-04	0.982758	1.72418e-02
45	549.60 Hz	5.39153e-04	0.983297	1.67026e-02

Upper bound on relative strain energy error (fmax = 300.00 Hz)
 with static correction: 8.5927e-03
 without static correction: 1.6944e-02

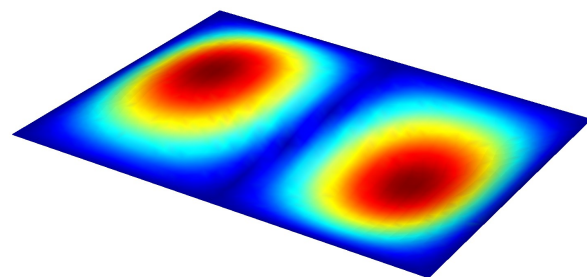
Bei Rechnung mit Restmoderkorrektur ist der Fehler kleiner als 1 %. Damit ist die Anzahl der berechneten Eigenschwingungen ausreichend, obwohl die höchste Frequenz nur knapp 550 Hz beträgt. Die wesentlichen Eigenschwingungen sind die ersten sechs Eigenschwingungen.

Die Eigenschwingungen 1, 2, 4 und 43 sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass die Diskretisierung fein genug ist, um die höchste berechnete Eigenschwingung abzubilden.

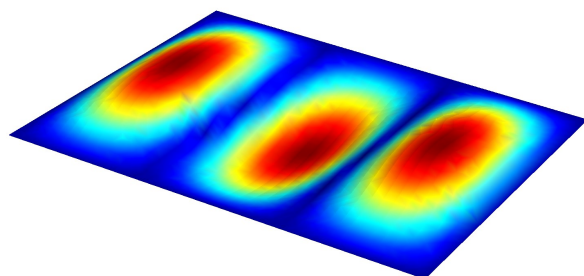
Abbildung 4.3 zeigt die Übertragungsfunktionen und Abbildung 4.4 den Vergleich mit den analytisch berechneten Übertragungsfunktionen.



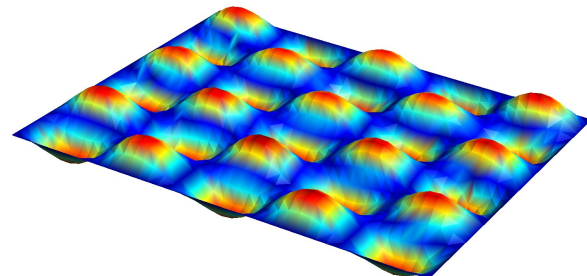
1. Eigenschwingung: 17,07 Hz



2. Eigenschwingung: 35,50 Hz



4. Eigenschwingung: 66,26 Hz



43. Eigenschwingung: 542,7 Hz

Abbildung 4.2: Einige Eigenschwingungen

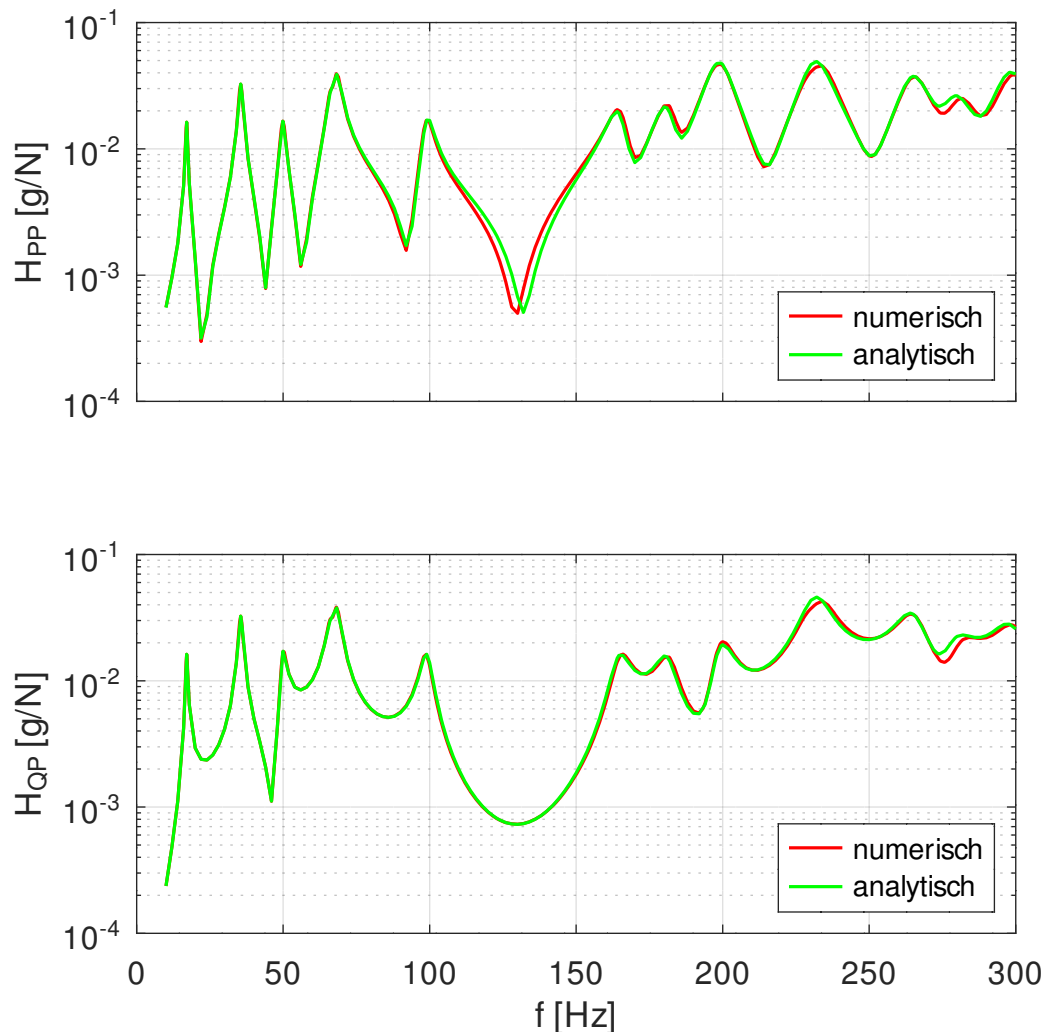


Abbildung 4.4: Vergleich mit analytischer Lösung

Die numerisch berechneten Übertragungsfunktionen stimmen gut mit den analytisch berechneten überein. Die kleinen Unterschiede im Bereich der ausgeprägten Antiresonanz bei 130 Hz lassen sich dadurch erklären, dass in der analytischen Berechnung die Restmoderkorrektur fehlt, dafür aber alle Eigenschwingungen bis 900 Hz berücksichtigt werden. Bei den höheren Frequenzen lässt sich der Einfluss der Diskretisierung auf die Eigenfrequenzen erkennen. Die numerisch berechneten Resonanzfrequenzen liegen etwas höher als die analytisch berechneten.

Aufgabe 5

Das folgende GNU Octave-Skript berechnet die ersten 20 Eigenschwingungen und ihre modalen effektiven Massen:

```
# Übungsblatt 5.3, Aufgabe 5: Zylindrischer Behälter
#                                     Modale effektive Massen
# -----

nmodes = 20; % Anzahl der Eigenschwingungen

# Daten (N, mm):

geom.t = 2; % Wandstärke
mtype = "lumped"; % Typ der Massenmatrix

mat = struct("type", "iso", % Isotropes Material
            "E", 210000, % E-Modul
            "ny", 0.3, % Querkonstraktionszahl
            "rho", 7.85E-9); % Massendichte (t/mm^3)

# Modelltyp

td = struct("type", "solid", "subtype", "3d");

# Elementdaten

td.Wand = struct("type", "elements", "name", "s4",
                "geom", geom, "mat", mat);

# Einspannung

td.Einspannung = struct("type", "constraints",
                       "name", "prescribed", "dofs", 1 : 3);

# Ausgabedatei

file = mfilename();
fid = fopen([file, ".res"], "wt");

# Datei einlesen, Komponente erzeugen und Achsen ausgeben

model = mfs_import(fid, "u5_2_6.msh", "msh", td);
tank = mfs_new(fid, model);

# Steifigkeits- und Massenmatrix

tank = mfs_stiff(tank);
tank = mfs_mass(tank, mtype);
mfs_massproperties(fid, tank);

# Eigenschwingungen

tank = mfs_freevib(tank, nmodes);
```

```

mfs_print(fid, tank, "modes", "freq");

# Modale effektive Massen

mfs_meffmass(fid, tank);

fclose(fid);

```

Mit 80 Elementen über den Umfang und 25 Elementen über die Höhe ergeben sich folgende Werte für die modalen effektiven Massen:

Modal effective masses of component "tank"

Coordinates of reference point: 0.0000, 0.0000, 0.0000

mode	frequency	tx	ty	tz	sum tx	sum ty	sum tz
1	15.59 Hz	8.6602e-13	5.7348e-13	1.8992e-32	0.00000	0.00000	0.00000
2	15.59 Hz	5.7349e-13	8.6603e-13	5.8751e-34	0.00000	0.00000	0.00000
3	16.02 Hz	1.2772e-29	1.0272e-30	1.7692e-26	0.00000	0.00000	0.00000
4	16.02 Hz	3.4380e-29	1.6746e-29	5.1272e-26	0.00000	0.00000	0.00000
5	16.59 Hz	7.5614e-29	1.1516e-29	3.1225e-12	0.00000	0.00000	0.00000
6	16.59 Hz	5.6227e-29	3.3660e-29	7.7607e-19	0.00000	0.00000	0.00000
7	17.55 Hz	9.2823e-13	3.6612e-13	3.2432e-33	0.00000	0.00000	0.00000
8	17.55 Hz	3.6612e-13	9.2823e-13	3.8745e-32	0.00000	0.00000	0.00000
9	19.35 Hz	5.9080e-12	6.9769e-12	1.6510e-31	0.00000	0.00000	0.00000
10	19.35 Hz	6.9769e-12	5.9079e-12	3.4339e-33	0.00000	0.00000	0.00000
11	19.90 Hz	6.0623e-29	5.2276e-29	7.2888e-14	0.00000	0.00000	0.00000
12	19.90 Hz	1.0971e-28	2.0277e-31	3.7798e-21	0.00000	0.00000	0.00000
13	22.87 Hz	4.2758e-14	3.8302e-15	1.2591e-34	0.00000	0.00000	0.00000
14	22.87 Hz	3.8304e-15	4.2758e-14	1.5746e-32	0.00000	0.00000	0.00000
15	24.30 Hz	7.9402e-29	1.2694e-29	8.8867e-22	0.00000	0.00000	0.00000
16	24.30 Hz	1.5171e-28	1.5851e-28	3.5108e-22	0.00000	0.00000	0.00000
17	26.36 Hz	1.1904e-29	2.6554e-29	4.2381e-28	0.00000	0.00000	0.00000
18	26.36 Hz	1.4239e-29	1.2185e-30	2.0582e-27	0.00000	0.00000	0.00000
19	28.51 Hz	3.3842e-29	1.9227e-28	9.8785e-13	0.00000	0.00000	0.00000
20	28.51 Hz	9.0625e-30	2.0572e-31	2.0941e-20	0.00000	0.00000	0.00000

mode	frequency	rx	ry	rz	sum rx	sum ry	sum rz
1	15.59 Hz	1.1544e-12	1.7441e-12	7.0336e-31	0.00000	0.00000	0.00000
2	15.59 Hz	1.7441e-12	1.1544e-12	1.3200e-30	0.00000	0.00000	0.00000
3	16.02 Hz	1.7699e-31	4.0019e-30	1.5786e-24	0.00000	0.00000	0.00000
4	16.02 Hz	5.4237e-30	1.5123e-29	9.0326e-29	0.00000	0.00000	0.00000
5	16.59 Hz	4.4219e-30	2.9503e-29	2.4364e-21	0.00000	0.00000	0.00000
6	16.59 Hz	1.3983e-29	2.6120e-29	9.0690e-13	0.00000	0.00000	0.00000
7	17.55 Hz	3.1716e-13	8.0421e-13	2.4937e-31	0.00000	0.00000	0.00000
8	17.55 Hz	8.0421e-13	3.1716e-13	3.1070e-32	0.00000	0.00000	0.00000
9	19.35 Hz	3.6797e-12	3.1148e-12	7.3668e-31	0.00000	0.00000	0.00000
10	19.35 Hz	3.1148e-12	3.6796e-12	6.3739e-31	0.00000	0.00000	0.00000
11	19.90 Hz	3.1614e-29	2.9422e-29	2.6339e-22	0.00000	0.00000	0.00000
12	19.90 Hz	4.6479e-32	5.0144e-29	7.5439e-14	0.00000	0.00000	0.00000
13	22.87 Hz	8.6906e-15	9.7027e-14	2.5160e-30	0.00000	0.00000	0.00000
14	22.87 Hz	9.7027e-14	8.6908e-15	4.4591e-30	0.00000	0.00000	0.00000
15	24.30 Hz	5.6785e-30	4.1315e-29	1.3877e-24	0.00000	0.00000	0.00000
16	24.30 Hz	7.8698e-29	6.8565e-29	2.8232e-23	0.00000	0.00000	0.00000
17	26.36 Hz	1.1632e-29	4.1597e-30	9.7679e-27	0.00000	0.00000	0.00000
18	26.36 Hz	8.2488e-31	1.1731e-29	3.3632e-29	0.00000	0.00000	0.00000
19	28.51 Hz	1.0381e-28	1.8009e-29	1.0474e-22	0.00000	0.00000	0.00000
20	28.51 Hz	4.8765e-34	6.1276e-30	2.1746e-13	0.00000	0.00000	0.00000

Die modalen effektiven Massen sind praktisch alle null. Es handelt sich bei allen Schwingungen um Umfangsschwingungen, die durch Starrkörperbeschleunigungen nicht angeregt werden. Dieses Beispiel zeigt, dass aus einer kleinen effektiven Masse nicht auf eine lokale Schwingung geschlossen werden kann.