

2.4 Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben ist die Autokorrelation

$$R_{xx}(\tau) = R_0 e^{-\delta|\tau|} \cos(\omega \tau)$$

eines stationären stochastischen Prozesses mit Mittelwert $\mu_x = 0$.

a) Bestimmen Sie den quadratischen Mittelwert ψ_x^2 .

b) Berechnen Sie das einseitige Leistungsdichtespektrum $G_{xx}(f)$.

(Ergebnis: a) $\psi_x^2 = R_0$; b) $G_{xx}(f) = 2 R_0 \delta \left(\frac{1}{\delta^2 + (\omega - 2\pi f)^2} + \frac{1}{\delta^2 + (\omega + 2\pi f)^2} \right)$)

Aufgabe 2

Das einseitige Leistungsdichtespektrum eines Gaußschen stationären stochastischen Prozesses ist gegeben durch

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} \frac{G_0}{1 + (f/f_0)^2} & 0 \leq f \leq f_0 \\ 0 & f > f_0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie den quadratischen Mittelwert ψ_x^2 und die Anzahl N_0 der Nulldurchgänge pro Zeiteinheit.

(Ergebnis: $\psi_x^2 = G_0 \pi f_0 / 4$, $N_0 = 1,045 f_0$)

Aufgabe 3

Der stationäre stochastische Prozess $\{x_k(t)\}$ hat das Leistungsdichtespektrum $G_{xx}(f)$. Ermitteln Sie das Leistungsdichtespektrum $G_{yy}(f)$ und das Kreuzleistungsdichtespektrum $G_{xy}(f)$ für den zeitlich verschobenen stochastischen Prozess $\{y_k(t)\} = \{x_k(t - \Delta t)\}$.

(Ergebnis: $G_{yy}(f) = G_{xx}(f)$, $G_{xy}(f) = G_{xx}(f) e^{2\pi i f \Delta t}$)

Aufgabe 4

Die Biegemomente um die y - und die z -Achse an einer Stelle eines Balkens werden durch die stationären stochastischen Prozesse $\{M_y(t)\}$ und $\{M_z(t)\}$ beschrieben. Bekannt sind die Leistungsdichtespektren $G_{yy}(f)$ und $G_{zz}(f)$ der Biegemomente, das Kreuzleistungsdichtespektrum $G_{yz}(f)$ sowie die Querschnittskennwerte I_y , I_z und I_{yz} und der Elastizitätsmodul E .

Ermitteln Sie das Leistungsdichtespektrum $G_{\sigma\sigma}(f)$ der Biegespannungen an einem Punkt im Querschnitt,

- a) wenn die y - und die z -Achse Hauptachsen sind, und
- b) wenn die y - und die z -Achse keine Hauptachsen sind.

Aufgabe 5

Gegeben ist das Leistungsdichtespektrum $G_{xx}(f)$ des stationären stochastischen Prozesses $\{x_k(t)\}$. Berechnen Sie daraus das Leistungsdichtespektrum $G_{\dot{x}\dot{x}}(f)$ der zeitlichen Ableitung des Prozesses.

Aufgabe 6

Gegeben ist das Leistungsdichtespektrum $G_{xx}(f)$ eines Gaußschen stationären stochastischen Prozesses.

- a) Welche Beziehung gilt für den Erwartungswert der Anzahl der Maxima pro Zeiteinheit?
- b) Für welche Schwelle a ist der Erwartungswert der Anzahl der Überschreitungen pro Zeiteinheit kleiner als ein vorgegebener Wert n_a ?