5.1 Diskretisierung

Aufgaben

Aufgabe 1

Die Ansatzfunktion für die Verschiebung w eines schlanken Euler-Bernoulli-Balkens in der *xz*-Ebene (siehe Abbildung 1.1) lautet

$$w(\xi)=H_1(\xi)w_1+H_2(\xi)\phi_1+H_3(\xi)w_2+H_4(\xi)\phi_2,\quad \xi=x/L$$

mit

$$H_1(\xi)=2\xi^3-3\xi^2+1,\quad H_3(\xi)=-2\xi^3+3\xi^2$$
$$H_2(\xi)=-L\left(\xi^3-2\xi^2+\xi\right),\quad H_4(\xi)=-L\left(\xi^3-\xi^2\right).$$

w_1 und w_2 sind die Verschiebungen und ϕ_1 und ϕ_2 die Verdrehungen um die *y*-Achse an den beiden Knotenpunkten des Balkens.

a) Zeigen Sie, dass diese Ansatzfunktion die Bedingungen $w(0)=w_1, w(1)=w_2, dw/dx(0)=-\phi_1, dw/dx(1)=-\phi_2$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Ansatzfunktion die Starrkörperbewegungen in der Ebene darstellen kann.

c) Berechnen Sie die Steifigkeitsmatrix und die konsistente Massenmatrix zur Verschiebungsmatrix $\left[u^E\right]^T=\left[w_1\quad \phi_1\quad w_2\quad \phi_2\right]$.

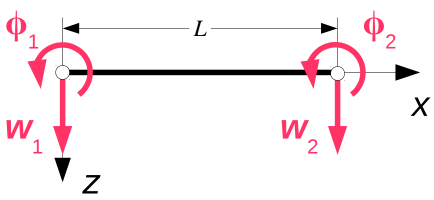

Abbildung 1.1: Geometrie und Freiheitsgrade

(Ergebnis:

$$\left[k^E\right]=\frac{E I_y}{L^3}\begin{bmatrix}12 & -6L & -12 & -6L\\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2\\ -12 & 6L & 12 & 6L\\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2\end{bmatrix},$$

$$\left[m^E\right]=\frac{m}{420}\begin{bmatrix}156 & -22L & 54 & 13L\\ -22L & 4L^2 & -13L & -3L^2\\ 54 & -13L & 156 & 22L\\ 13L & -3L^2 & 22L & 4L^2\end{bmatrix}\quad \text{mit}\quad m=\rho A L)$$