2. Fourier-Transformation

- Die Fourier-Transformation ist ein wichtiges Hilfsmittel für die dynamische Analyse linearer Systeme:
  - Die Fourier-Transformierte der Antwort ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten der Anregung mit der Fourier-Transformierten der Impulsantwortfunktion.
  - Aus der Fourier-Transformierten der Impulsantwortfunktion können die dynamischen Eigenschaften des Systems unmittelbar abgelesen werden.
- Die Fourier-Transformierte der Impulsantwortfunktion wird als *Übertragungsfunktion* bezeichnet.

2. Fourier-Transformation

2.1 Definition

- Definition:
  - Die Fourier-Transformation einer Funktion $x(t)$ ist definiert durch

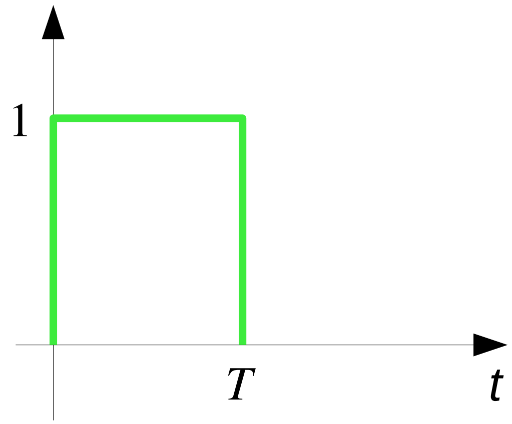
$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt}$$

  - Die untere und die obere Grenze streben unabhängig voneinander gegen unendlich.
  - In der Strukturdynamik sind die Zeitfunktionen $x(t)$ immer reell. Die Fourier-Transformierten $X(f)$ sind in der Regel komplex.

2.1 Definition

- Beispiel 1: Rechteckimpuls

$$\begin{aligned} t<0 &\quad : \quad x(t)=0 \\ 0\leq t\leq T &\quad : \quad x(t)=1 \\ t>T &\quad : \quad x(t)=0 \end{aligned}$$



$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt=\int_0^T e^{-2\pi i f t}\, dt=-\frac{1}{2\pi i f}\left(e^{-2\pi i f T}-1\right)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i f}\left(\cos(2\pi f T)-1-i\sin(2\pi f T)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi f}\left[\sin(2\pi f T)+i\left(\cos(2\pi f T)-1\right)\right]$$

2.1 Definition

- Der Wert für $f = 0$ ergibt sich als Grenzübergang.
- Nach der Regel von de l' Hospital gilt:

$$X(0) = \lim_{f \to 0} \frac{1 - e^{-2\pi i f T}}{2\pi i f} = \lim_{f \to 0} \frac{2\pi i T e^{-2\pi i f T}}{2\pi i} = T$$

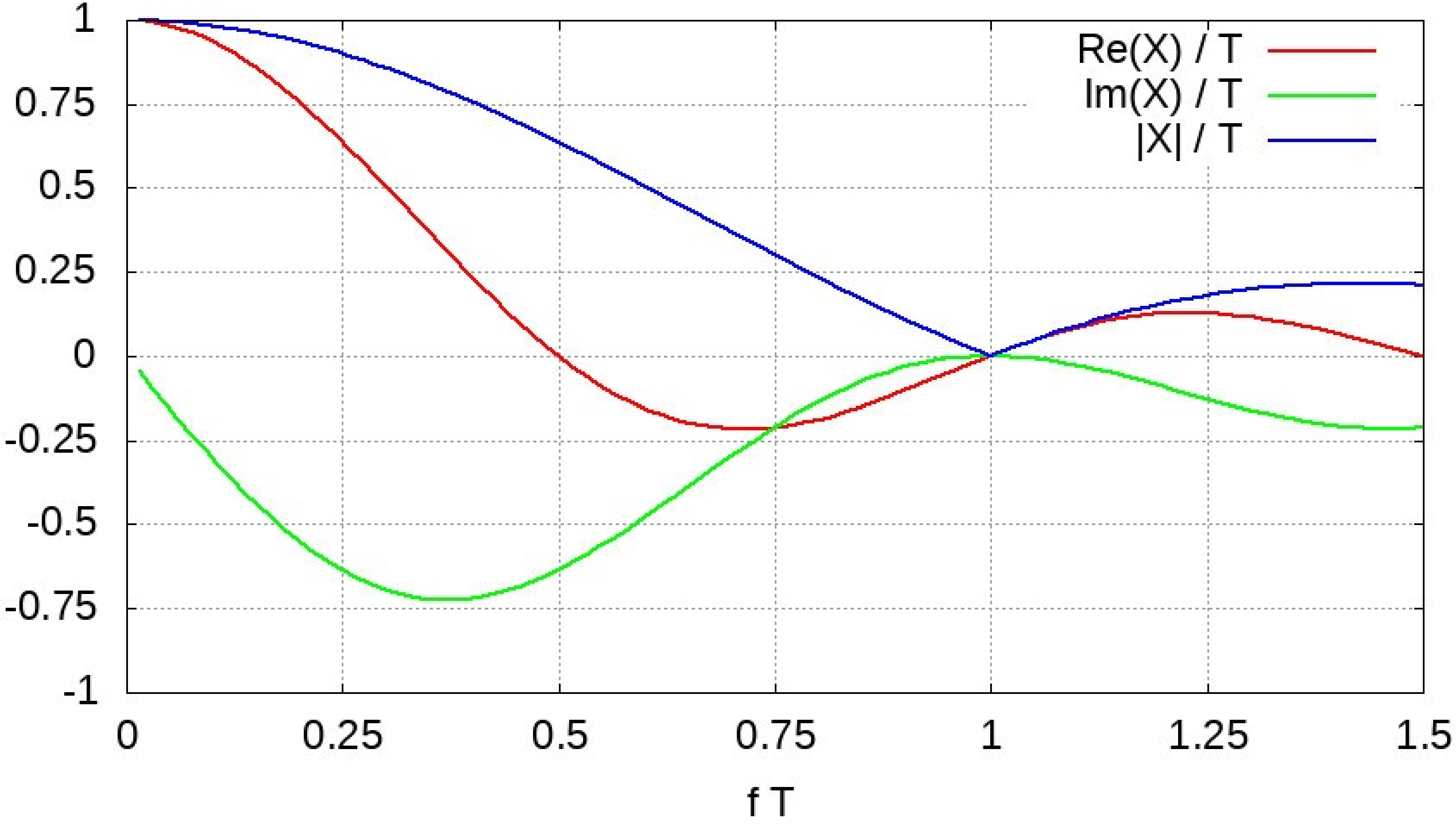
- Aus

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$$

folgt allgemein:

  - Der Realteil von $X(0)$ ist gleich der Fläche unter der Funktion $x(t)$, und der Imaginärteil ist null.

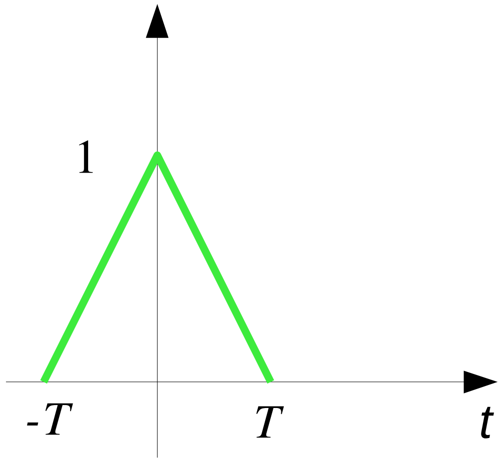
2.1 Definition



2.1 Definition

- Beispiel 2: Dreieckimpuls

$$
\begin{aligned}
t &< -T & &: \quad x(t) = 0 \\
-T \le t &\le 0 & &: \quad x(t) = 1 + t/T \\
0 \le t &\le T & &: \quad x(t) = 1 - t/T \\
t &> T & &: \quad x(t) = 0
\end{aligned}
$$



$$
X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t}\, dt = \int_{-T}^{0} \left(1 + \frac{t}{T}\right) e^{-2\pi i f t}\, dt + \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-2\pi i f t}\, dt
$$

$$
= \int_{-T}^{T} e^{-2\pi i f t}\, dt + \int_{-T}^{0} \frac{t}{T} e^{-2\pi i f t}\, dt - \int_{0}^{T} \frac{t}{T} e^{-2\pi i f t}\, dt
$$

2.1 Definition

- Mit $\int t\, e^{-2\pi i f t}\, dt = \frac{e^{-2\pi i f t}}{(2\pi f)^2}(1+2\pi i f t)$ folgt:

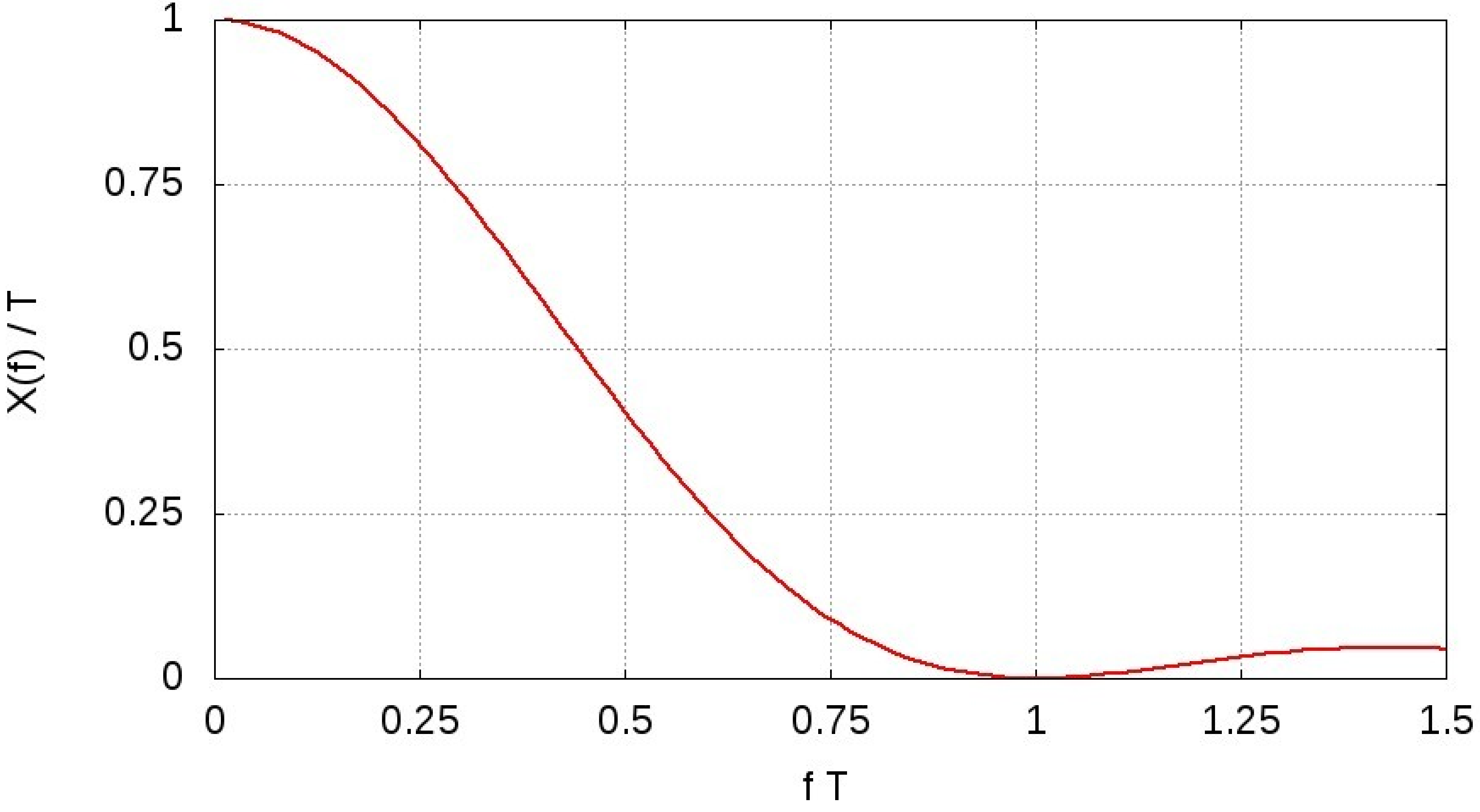
$$X(f)$$

$$= \left[-\frac{e^{-2\pi i f t}}{2\pi i f}\right]_{t=-T}^{t=T} + \left[e^{-2\pi i f t}\,\frac{1+2\pi i f t}{(2\pi f)^2 T}\right]_{t=-T}^{t=0} - \left[e^{-2\pi i f t}\,\frac{1+2\pi i f t}{(2\pi f)^2 T}\right]_{t=0}^{t=T}$$

$$= \frac{e^{2\pi i f T} - e^{-2\pi i f T}}{2\pi i f} + \frac{1 - e^{2\pi i f T}(1-2\pi i f T)}{(2\pi f)^2 T} + \frac{1 - e^{-2\pi i f T}(1+2\pi i f T)}{(2\pi f)^2 T}$$

$$= \frac{2 - e^{2\pi i f T} - e^{-2\pi i f T}}{(2\pi f)^2 T} = \frac{2\left(1-\cos(2\pi f T)\right)}{(2\pi f)^2 T} = \frac{4\sin^2(\pi f T)}{(2\pi f)^2 T}$$

2.1 Definition



2.1 Definition

- Beobachtungen:
  - Die Lage des ersten Nulldurchgangs ist umgekehrt proportional zur Impulsdauer T.
  - Am Aufbau des Impulses sind alle Frequenzen beteiligt.
  - Die Frequenzen bis zur ersten Nullstelle liefern den größten Beitrag.
- Existenz der Fourier-Transformation:
  - Eine notwendige Bedingung ist, dass die zu transformierende Funktion gegen null geht, wenn die Zeit gegen unendlich geht.
  - Eine hinreichende Bedingung ist $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.

2.1 Definition

- Inverse Transformation:
  - Die inverse Fourier-Transformation ist gegeben durch

$$\boxed{x(t) = \lim_{F \to \infty} \int_{-F}^{F} X(f) e^{2\pi i f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2\pi i f t} df}$$

  - Bei der inversen Transformation müssen die Grenzen in gleicher Weise gegen unendlich streben (Cauchyscher Hauptwert).
  - Für $t = 0$ gilt: $x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df$

2.1 Definition

- Deutung:
  - Eine periodische Funktion $x(t)$ mit der Periode T kann als unendliche Summe von harmonischen Schwingungen dargestellt werden (Fourier-Reihe).
  - Die Frequenzen sind ein Vielfaches einer Grundfrequenz $\Delta f = 1/T$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n \Delta f t}$$

  - Eine nichtperiodische Funktion ist aus unendlich vielen Schwingungen aller Frequenzen aufgebaut.

2.1 Definition

- Jede dieser Schwingungen ist beteiligt mit der infinitesimalen komplexen Amplitude

$$C_n = X(n\Delta f)\Delta f$$

- Der Grenzübergang $\Delta f \to 0$ führt auf das Fourier-Integral

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{2\pi i f t} df$$

- Die Funktion $X(f)$ wird als *Spektralfunktion*, *Spektraldichte* oder *Frequenzfunktion* bezeichnet.
- Die Funktion $|X(f)|$ heißt *Amplitudendichte*.

2.2 Eigenschaften

- Linearität:
  - Sei $X_1(f)$ die Fourier-Transformierte der Funktion $x_1(t)$ und $X_2(f)$ die Fourier-Transformierte der Funktion $x_2(t)$, und seien c_1 und c_2 zwei Konstanten.
  - Dann folgt für die Fourier-Transformierte der Funktion $x(t)=c_1 x_1(t)+c_2 x_2(t)$:

$$\begin{aligned} X(f) &= c_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-2\pi i f t} dt + c_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-2\pi i f t} dt \\ &= c_1 X_1(f) + c_2 X_2(f) \end{aligned}$$

2.2 Eigenschaften

- Maßstabsänderung:
  - Sei $X(f)$ die Fourier-Transformierte der Funktion $x(t)$.
  - Für die Fourier-Transformierte $Y(f)$ der Funktion $y(t)=x(at)$ mit reellem, von null verschiedenem a gilt:

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(at)\,e^{-2\pi i f t}\,dt$$

  - Die Substitution $\tau = at,\ d\tau = a\,dt$ führt auf

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,e^{-2\pi i \frac{f}{a}\tau}\,\frac{1}{a}\,d\tau=\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$$

2.2 Eigenschaften

- Zeitverschiebung:
  - Sei $X(f)$ die Fourier-Transformierte der Funktion $x(t)$.
  - Für die Fourier-Transformierte $Y(f)$ der Funktion $y(t) = x(t - \Delta t)$ mit reellem Δt gilt:

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\Delta t)e^{-2\pi i f t}dt$$

  - Die Substitution $\tau = t - \Delta t$, $d\tau = dt$ führt auf

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-2\pi i f(\tau+\Delta t)}d\tau=e^{-2\pi i f \Delta t}X(f)$$

2.2 Eigenschaften

- Transformation der Ableitung:
  - Sei $X(f)$ die Fourier-Transformierte der Funktion $x(t)$.
  - Für die Fourier-Transformierte $Y(f)$ der Ableitung $y(t)=\dot{x}(t)$ gilt:
$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(t)e^{-2\pi i f t}\,dt$$
  - Partielle Integration ergibt
$$\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(t)e^{-2\pi i f t}\,dt=\left[x(t)e^{-2\pi i f t}\right]_{t\rightarrow-\infty}^{t\rightarrow\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\left(-2\pi i f\,e^{-2\pi i f t}\right)dt$$
  - Da $x(t)$ im Unendlichen verschwindet, ist der erste Summand auf der rechten Seite null. Es bleibt
$$\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}(t)e^{-2\pi i f t}\,dt=2\pi i f\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-2\pi i f t}\,dt=2\pi i f\,X(f)$$

2.2 Eigenschaften

- Beispiel: System mit einem Freiheitsgrad
  - Bewegungsgleichung: $m\,\ddot{x}(t)+d\,\dot{x}(t)+c\,x(t)=l(t)$
  - Die Fourier-Transformation führt auf

$$\left(-(2\pi f)^2 m+2\pi i\,f\,d+c\right)X(f)=L(f)$$

  - Dabei ist $L(f)$ die Fourier-Transformierte von $l(t)$ und $X(f)$ die Fourier-Transformierte von $x(t)$.
  - Durch die Fourier-Transformation geht die lineare Differenzialgleichung in eine lineare algebraische Gleichung über.

2.2 Eigenschaften

- Die algebraische Gleichung kann leicht nach $X(f)$ aufgelöst werden
- Durch inverse Transformation kann die Lösung $x(t)$ bestimmt werden.

- Komplex konjugierte Transformation:
  - Unmittelbar aus der Definition der Fourier-Transformation folgt:

$$\bar{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{2\pi i f t} dt = X(-f)$$

- Faltung und Korrelation:
  - Seien $x(t)$ und $h(t)$ zwei reelle Funktionen der Zeit t.

2.2 Eigenschaften

- Für die Fourier-Transformation der Faltung

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

gilt:

$$\begin{aligned}Y(f)&=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,e^{-2\pi i f t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau\right)e^{-2\pi i f t}\,dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,e^{-2\pi i f t}\,dt\right)h(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,e^{-2\pi i f\tau}\,h(\tau)\,d\tau\\&=X(f)\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,e^{-2\pi i f\tau}\,d\tau=X(f)\,H(f)\end{aligned}$$

- Durch die Fourier-Transformation geht das Faltungsintegral in ein Produkt über:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau \;\Leftrightarrow\; Y(f)=H(f)\,X(f)$$

2.2 Eigenschaften

- Für die Fourier-Transformation der Korrelation

$$z(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

folgt entsprechend:

$$\begin{aligned}Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,y(\tau)\,d\tau\right)e^{-2\pi i f t}\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,e^{-2\pi i f t}\,dt\right)y(\tau)\,d\tau\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,e^{2\pi i f \tau}\,y(\tau)\,d\tau = X(f)\,\bar{Y}(f)\end{aligned}$$

$$\rightarrow\quad z(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,y(\tau)\,d\tau \;\Leftrightarrow\; Z(f)=X(f)\,\bar{Y}(f)$$

2.2 Eigenschaften

- Produkt:
  - Mit $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(g)e^{2\pi i g t}\,dg$

    gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)e^{-2\pi i f t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(g)e^{2\pi i g t}\,dg\right)y(t)e^{-2\pi i f t}\,dt$

    $$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(X(g)\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-2\pi i(f-g)t}\,dt\right)dg$$

    $$=\int_{-\infty}^{\infty} X(g)Y(f-g)\,dg$$

  - Damit ist gezeigt:

$$z(t)=x(t)y(t) \;\Leftrightarrow\; Z(f)=\int_{-\infty}^{\infty} X(g)Y(f-g)\,dg=X*Y$$

2.2 Eigenschaften

- Die Parsevalsche Gleichung:
  - Seien $x(t)$ und $y(t)$ zwei reelle Funktionen, deren Fourier-Transformierte existieren.
  - Aus
    $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(g)\, Y(f-g)\, dg$$
    folgt für $f = 0$:
    $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(g)\, Y(-g)\, dg = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, \bar{Y}(f)\, df$$
  - Für $y(t) = x(t)$ gilt speziell: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(f)\right|^2 df$