3. Übertragungsfunktionen

- Definitionen:
  - Die Fourier-Transformierte der Impulsantwortfunktion heißt *Übertragungsfunktion*:

$$\boxed{H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt}$$

  - Mithilfe der Übertragungsfunktion kann die Fourier-Transformierte der Antwort leicht aus der Fourier-Transformierten der Anregung berechnet werden:

$$\left.\begin{aligned} L(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} l(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt \\ X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad X(f) = H(f)\, L(f)$$

3. Übertragungsfunktionen

- Für die Übertragungsfunktion folgt:

$$H(f) = X(f) / L(f)$$

- Bezeichnungen für spezielle Übertragungsfunktionen:
  - Dynamische Flexibilität = Verschiebung / Kraft
  - Mobilität (Admittanz) = Geschwindigkeit / Kraft
  - Akzeleranz (Inertanz) = Beschleunigung / Kraft
- Die Kehrwerte sind:
  - Dynamische Steifigkeit = Kraft / Verschiebung
  - Impedanz = Kraft / Geschwindigkeit
  - Dynamische Masse = Kraft / Beschleunigung

3. Übertragungsfunktionen

- Deutung:
  - Betrachtet wird ein System, das durch eine harmonische Last

$$l(t)=l_0\cos(2\pi f t)=\Re\left(l_0 e^{2\pi i f t}\right)$$

angeregt wird.

  - Für die Antwort gilt:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, l(t-\tau)\, d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\Re\left(l_0 e^{2\pi i f (t-\tau)}\right) d\tau$$
$$=l_0\,\Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{2\pi i f (t-\tau)} d\tau\right)$$

3. Übertragungsfunktionen

- Das Integral berechnet sich zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{2\pi i f(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \, e^{2\pi i f t} = H(f) e^{2\pi i f t} .$$

- Damit gilt für die Antwort:

$$x(t) = \Re\left(H(f) l_0 e^{2\pi i f t}\right) = \Re\left(X_0(f) e^{2\pi i f t}\right) \quad \text{mit} \quad X_0(f) = H(f) l_0$$

- Die Antwort auf eine harmonische Last ist eine harmonische Funktion mit der gleichen Frequenz f.
- Für die Übertragungsfunktion gilt: $H(f) = X_0(f)/l_0$

3. Übertragungsfunktionen

- Die Übertragungsfunktion ist gleich der komplexen Amplitude der Antwort auf eine harmonische Last mit der Amplitude eins.
- Sie wird daher auch als *Frequenzgang* bezeichnet.
- Bei einem realen Vorgang entspricht die harmonische Antwort dem *eingeschwungenen Zustand*, der sich einstellt, wenn die Schwingungen infolge der Anfangsbedingungen abgeklungen sind.

3. Übertragungsfunktionen

- Beispiel: System mit einem Freiheitsgrad
  - Die Übertragungsfunktion lässt sich am einfachsten durch Fourier-Transformation der Bewegungsgleichung ermitteln:

$$m\ddot{x}+d\dot{x}+c\,x=l(t) \;\rightarrow\; \left(-(2\pi f)^2 m+2\pi i f d+c\right)X(f)=L(f)$$

$$\rightarrow\; H(f)=\frac{X(f)}{L(f)}=\frac{1}{c-(2\pi f)^2 m+2\pi i f d}$$

  - Die Fourier-Transformation der Impulsantwort führt auf das gleiche Ergebnis.

3. Übertragungsfunktionen

- Bei Anregung mit einer harmonischen Last gilt:

$$X_0(f) = H(f)\, l_0 = \frac{l_0}{c - (2\pi f)^2 m + 2\pi i f d}$$

- Mit der Erregerkreisfrequenz $\Omega = 2\pi f$ folgt:

$$X_0(\Omega) = \frac{l_0}{c} \frac{1}{1 - \Omega^2 m/c + i\Omega d/c}$$

- Mit der statischen Lösung $x_s = l_0 / c$ sowie

$$\omega^2 = c/m, \quad c = \omega^2 m, \quad \delta = d/(2m), \quad D = \delta/\omega$$

folgt:

$$X_0(\Omega) = \frac{x_s}{1 - \Omega^2/\omega^2 + 2 i D \Omega/\omega}$$

3. Übertragungsfunktionen

- Mit dem *Frequenzverhältnis* $\eta = \Omega/\omega$ gilt:

$$X_0(\eta) = \frac{x_s}{1-\eta^2+2\,i\,D\,\eta} = \frac{1-\eta^2-2\,i\,D\,\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\,D^2\,\eta^2}\,x_s$$

- Daraus folgt für die reelle Amplitude und den Phasenwinkel:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\,D^2\,\eta^2}}\,x_s = V_F(\eta)\,x_s\,,\quad \tan(\phi) = -\frac{2\,D\,\eta}{1-\eta^2}$$

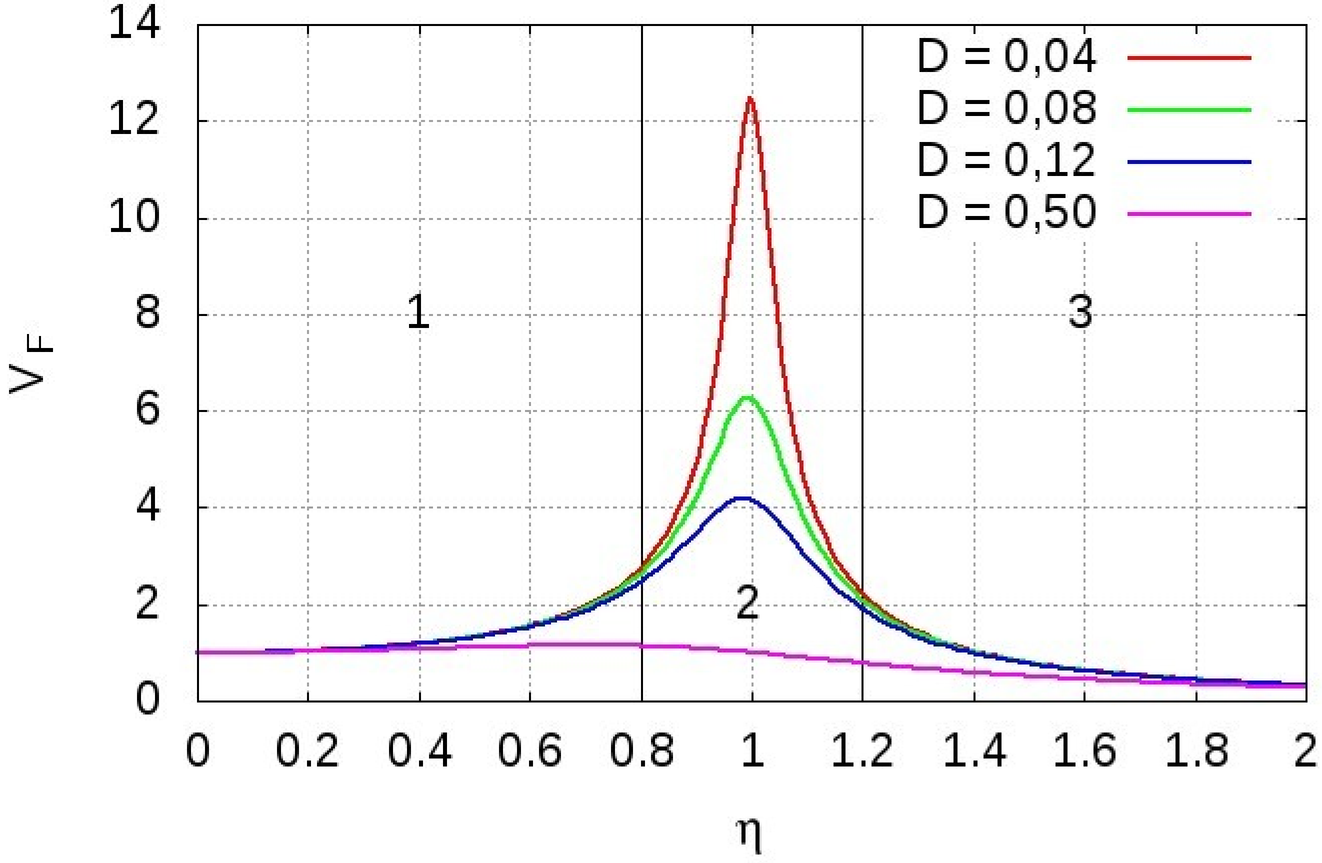
- Die Funktion

$$V_F(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2+4\,D^2\,\eta^2}}$$

wird als *dynamischer Überhöhungsfaktor* bezeichnet.

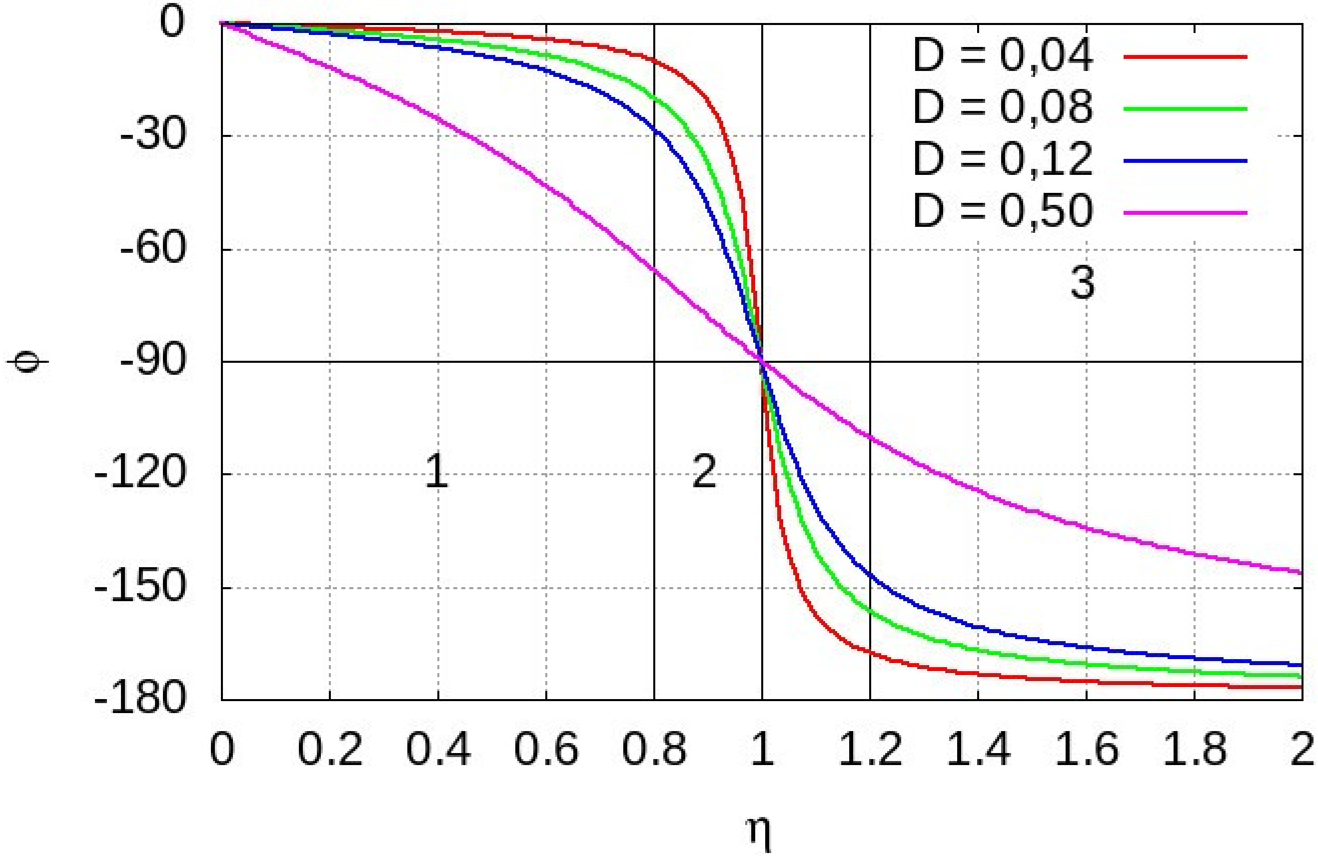
3. Übertragungsfunktionen

- Dynamischer Überhöhungsfaktor:



3. Übertragungsfunktionen

- Phasenwinkel:



3. Übertragungsfunktionen

- Diskussion des Frequenzgangs für ein System mit einem Freiheitsgrad:
  - Bereich 1: $\eta < 0{,}8$ (unterkritisch)
    - Bei schwacher Dämpfung (D < 10 %) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
    - Die Antwort ist in Phase mit der Anregung.
    - Es gilt in guter Näherung: $V_F \approx \dfrac{1}{1-\eta^2}$
    - Für $\eta < 0{,}3$ können Dämpfungs- und Trägheitskräfte vernachlässigt werden. Die Amplitude weicht nur wenig von der statischen Lösung ab (*Quasistatische Lösung*).

3. Übertragungsfunktionen

- Bereich 2: $0{,}8 < \eta < 1{,}2$ (kritisch)
  - Dieser Bereich wird wesentlich von der Dämpfung beeinflusst.
  - Die Antwort hat eine Phasenverschiebung von 90° gegenüber der Anregung.
  - Die Geschwindigkeit ist in Phase mit der Anregung.
  - Bei $\eta = 1$ sind Trägheits- und Federkraft im Gleichgewicht. Die Anregung ist im Gleichgewicht mit der Dämpfungskraft.
  - Der Zustand bei $\eta = 1$ heißt *Resonanz*.

3. Übertragungsfunktionen

- Bereich 3: $\eta > 1{,}2$ (überkritisch)
  - Bei schwacher Dämpfung (D < 10 %) hat die Dämpfung praktisch keinen Einfluss.
  - Die Antwort hat eine Phasenverschiebung von -180° gegenüber der Anregung.
  - Die Beschleunigung ist in Phase mit der Anregung.
  - Es gilt in guter Näherung: $V_F \approx \dfrac{1}{\eta^2 - 1}$
  - Für $\eta > 3$ ist die Trägheitskraft groß gegenüber der Feder- und der Dämpferkraft.

3. Übertragungsfunktionen

- Maximum der Überhöhung:
  - Der Nenner hat ein Minimum: $N(\eta)=\left(1-\eta^2\right)^2+4D^2\eta^2=Min$.

$$0=\frac{dN}{d\eta}=2\left(1-\eta^2\right)\cdot(-2\eta)+4D^2\cdot(2\eta)$$

$$\eta_{max}^2-1+2D^2=0 \quad \rightarrow \quad \eta_{max}=\sqrt{1-2D^2}$$

  - Die Frequenz, bei der das Maximum auftritt, ist niedriger als die Resonanzfrequenz des ungedämpften Schwingers.
  - Für $D \geq \sqrt{2}/2$ kann kein Maximum auftreten.
  - Für kleine Werte der Dämpfung gilt:

$$\eta_{max} \approx 1, \quad V_{Fmax} \approx \frac{1}{2D}$$

3. Übertragungsfunktionen

- Halbwertsbreite:
  - Gesucht werden die Erregerfrequenzen, bei denen das Quadrat des dynamischen Überhöhungsfaktors gleich der Hälfte des Quadrats des maximalen Überhöhungsfaktors ist.
  - Dabei wird vorausgesetzt, dass die Dämpfung klein ist (D < 10 %).
  - Bedingung: $2 = \dfrac{V_{Fmax}^2}{V_F^2(\eta)} = \dfrac{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}{4D^2}$
  - Lösung: $\eta^4 - 2\left(1-2D^2\right)\eta^2 + \left(1-8D^2\right) = 0$

$$\eta_{1/2}^2 = 1-2D^2 \pm \sqrt{\left(1-2D^2\right)^2 - \left(1-8D^2\right)} = 1-2D^2 \pm \sqrt{4D^2\left(1+D^2\right)}$$
$$= 1-2D^2 \pm 2D\sqrt{1+D^2}$$

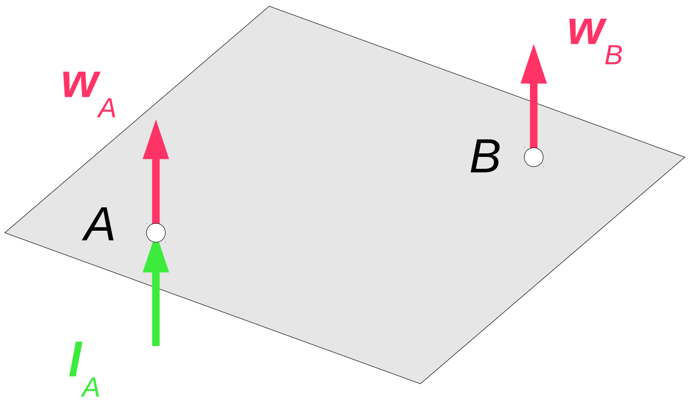
3. Übertragungsfunktionen

- Näherung für $D^2 \ll 1$: $\eta_{1/2}^2 \approx 1 \pm 2D \;\rightarrow\; \eta_1 \approx 1 - D,\quad \eta_2 \approx 1 + D$

- Der Bereich zwischen η_1 und η_2 wird als Halbwertsbreite bezeichnet.
- Die Halbwertsbreite erlaubt eine genauere Eingrenzung des kritischen Bereichs.

3. Übertragungsfunktionen

- Übertragungsfunktionen einer realen Struktur:



- Anregung:
  - Kraft $l_A(t)$
- Antworten:
  - Verschiebungen $w_A(t)$ und $w_B(t)$
- Übertragungsfunktionen:

$$H_{AA}(f) = W_A(f)/L_A(f)$$
$$H_{BA}(f) = W_B(f)/L_A(f)$$

3. Übertragungsfunktionen