4. Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren

- Die bereits in Kapitel 1.2 einführten Leistungsdichtespek-tren werden nun genauer untersucht.
- Zudem werden Kreuzleistungsdichtespektren eingeführt.
- Aus Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren der Lasten können die Leistungsdichtespektren der Antworten berechnet werden.
- Aus den Leistungsdichtespektren der Antworten lassen sich weitere Größen zur Bewertung der Antwort und des Strukturverhaltens berechnen.

4. Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren

4.1 Leistungsdichtespektren

4.2 Kreuzleistungsdichtespektren

4.3 Leistungsdichtespektrum der Antwort

4.4 Auswertung

4.1 Leistungsdichtespektren

- In Kapitel 1.2.3 wurden Leistungsdichtespektren über den quadratischen Mittelwert gefilterter Zeitsignale eingeführt.
- Auf diese Weise können Leistungsdichtespektren analog ermittelt werden.
- Jetzt werden zwei weitere Definitionen angegeben, die für theoretische Untersuchungen und die digitale Ermittlung von Leistungsdichtespektren mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation (FFT) geeigneter sind.
- Aus diesen Definitionen folgen außerdem eine Reihe von wichtigen Eigenschaften von Leistungsdichtespektren.

4.1 Leistungsdichtespektren

- Endliche Fourier-Transformation:
  - Gemessene Realisierungen von stochastischen Prozessen sind immer von endlicher Dauer.
  - Die endliche Fourier-Transformation einer solchen Realisierung $x_k(t)$ ist definiert durch

$$X_k(f,T)=\int_0^T x_k(t)\,e^{-2\pi i f t}\,dt$$

  - Die endliche Fourier-Transformation hängt außer von der Frequenz f auch von der Zeitdauer T ab.

4.1 Leistungsdichtespektren

- Leistungsdichtespektrum und endliche Fourier-Transformation:
  - Für eine Realisierung $x_k(t)$ eines stochastischen Prozesses wird definiert:

$$x_k(t,T)=\begin{cases} x_k(t) & \text{für} \quad 0\le t\le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  - Für die Fourier-Transformation gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_k(t,T)\,e^{-2\pi i f t}\,dt=\int_0^T x_k(t)\,e^{-2\pi i f t}\,dt=X_k(f,T)$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Mit der *Parsevalschen Gleichung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_k^2(t,T)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X_k(f,T)\right|^2 df$$

folgt:

$$\int_0^T x_k^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_k^2(t,T)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X_k(f,T)\right|^2 df$$

- Mit $\left|X_k(-f,T)\right| = \left|\bar{X}_k(f,T)\right| = \left|X_k(f,T)\right|$

folgt daraus:

$$\int_0^T x_k^2(t)\,dt = 2\int_0^{\infty} \left|X_k(f,T)\right|^2 df$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Mit der Übertragungsfunktion

$$H(f)=\begin{cases} 1 & \text{für} \quad f_c-\Delta f/2\leq f\leq f_c+\Delta f/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eines Filters mit Mittenfrequenz f_c und Bandbreite Δf lautet die Fourier-Transformation des Filterausgangs:

$$X_k(f,T,f_c,\Delta f)=H(f)X_k(f,T)$$

$$\int_0^T x_k^2(t,f_c,\Delta f)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} x_k^2(t,T,f_c,\Delta f)\,dt$$

$$=2\int_0^{\infty}\left|X_k(f,T,f_c,\Delta f)\right|^2 df=2\int_0^{\infty}\left|H(f)\right|^2\left|X_k(f,T)\right|^2 df$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Für die Abschätzung des Leistungsdichtespektrums folgt:

$$\hat{G}_{xx}(f_c) = \frac{1}{T\,\Delta f}\int_0^T x_k^2(t, f_c, \Delta f)\,dt = \frac{2}{T\,\Delta f}\int_0^\infty |H(f)|^2 |X_k(f, T)|^2\,df$$

$$= \frac{2}{T\,\Delta f}\int_{f_c - \Delta f/2}^{f_c + \Delta f/2} |X_k(f, T)|^2\,df$$

- Mit $$\lim_{\Delta f \to 0} \frac{1}{\Delta f}\int_{f_c - \Delta f/2}^{f_c + \Delta f/2} |X_k(f, T)|^2\,df = |X_k(f_c, T)|^2$$

folgt: $$G_{xx}(f_c) = \lim_{T\to\infty}\lim_{\Delta f \to 0} E[\hat{G}_{xx}(f_c)] = 2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E[|X_k(f_c, T)|^2]$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Mit f anstelle von f_c gilt für das Leistungsdichtespektrum:

$$\boxed{G_{xx}(f)=2\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[\left|X_k(f,T)\right|^2\right]}$$

- Mit dieser Formel kann das Leistungsdichtespektrum mithilfe der schnellen Fourier-Transformation (FFT) abgeschätzt werden.

4.1 Leistungsdichtespektren

- Leistungsdichtespektrum und Autokorrelation:
  - Für das Quadrat des Betrags der endlichen Fourier-Transformation einer Realisierung gilt:

$$\left|X_k(f,T)\right|^2 = X_k(f,T)\,\bar{X}_k(f,T)$$

$$= \int_0^T x_k(t_1)\,e^{-2\pi i f t_1}\,dt_1 \int_0^T x_k(t_2)\,e^{2\pi i f t_2}\,dt_2$$

$$= \int_0^T \left(\int_0^T x_k(t_1)\,x_k(t_2)\,e^{-2\pi i f (t_1 - t_2)}\,dt_2 \right) dt_1$$

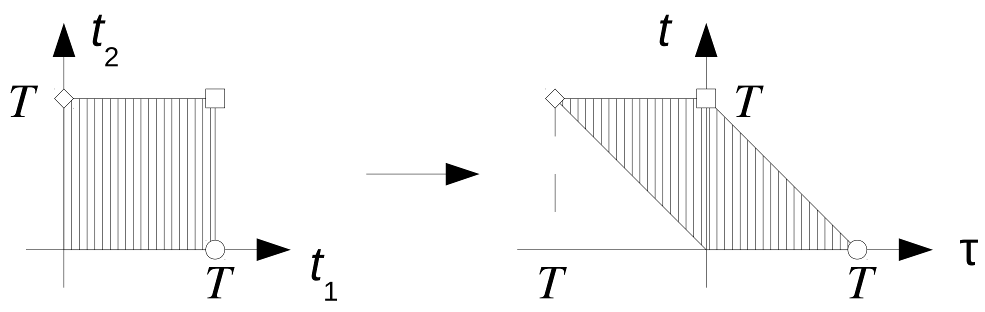
4.1 Leistungsdichtespektrum

- Die Substitution

$$\begin{aligned} \tau &= t_1 - t_2 \\ t &= t_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t_1 &= \tau + t \\ t_2 &= t \end{aligned}$$

ergibt: $$dt_2\, dt_1 = \left| \frac{\partial(t_2, t_1)}{\partial(t, \tau)} \right| dt\, d\tau = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} dt\, d\tau = dt\, d\tau$$

- Transformation des Integrationsgebiets:



4.1 Leistungsdichtespektren

- Damit gilt: $$\left|X_k(f,t)\right|^2=\int_{-T}^{0}\left(\int_{-\tau}^{T} x_k(t+\tau)\,x_k(t)\,e^{-2\pi i f\tau}\,dt\right)d\tau + \int_{0}^{T}\left(\int_{0}^{T-\tau} x_k(t+\tau)\,x_k(t_2)\,e^{-2\pi i f\tau}\,dt\right)d\tau$$

- Mit $E\left[x_k(t_2+\tau)\,x_k(t_2)\right]=R_{xx}(\tau)$ folgt:

$$E\left[\left|X_k(f,T)\right|^2\right]=\int_{-T}^{0}\left(\int_{-\tau}^{T} R_{xx}(\tau)\,e^{-2\pi i f\tau}\,dt\right)d\tau + \int_{0}^{T}\left(\int_{0}^{T-\tau} R_{xx}(\tau)\,e^{-2\pi i f\tau}\,dt\right)d\tau$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Da der Integrand der inneren Integrale nicht von t abhängt, folgt weiter:

$$E\left[\left|X_k(f,T)\right|^2\right]=\int_{-T}^{0}(T+\tau)R_{xx}(\tau)e^{-2\pi i f\tau}d\tau$$

$$+\int_{0}^{T}(T-\tau)R_{xx}(\tau)e^{-2\pi i f\tau}d\tau$$

$$=\int_{-T}^{T}(T-|\tau|)R_{xx}(\tau)e^{-2\pi i f\tau}d\tau$$

- Damit gilt: $\frac{1}{T}E\left[\left|X_k(f,T)\right|^2\right]=\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_{xx}(\tau)e^{-2\pi i f\tau}d\tau$

4.1 Leistunsdichtespektren

- Die folgende Untersuchung des verbleibenden Integrals orientiert sich an Lin, Kap. 3.8.
- Wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{xx}(\tau)| d\tau < \infty$$

vorausgesetzt, dann existiert die Fourier-Transformierte der Autokorrelation.
- Außerdem gibt es zu jedem ε ein τ_0, so dass gilt:

$$\int_{\tau_0}^{\infty} |R_{xx}(\tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{4}$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Wegen $R_{xx}(-\tau)=R_{xx}(\tau)$ gilt zunächst:

$$\left|\int_{-T}^{T}\frac{|\tau|}{T}R_{xx}(\tau)e^{-2\pi i f\tau}d\tau\right|\leq 2\int_{0}^{T}\frac{\tau}{T}\left|R_{xx}(\tau)\right|d\tau$$

- Für $T>\tau_0$ folgt für die rechte Seite:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{T}\frac{\tau}{T}\left|R_{xx}(\tau)\right|d\tau &= \frac{1}{T}\int_{0}^{\tau_0}\tau\left|R_{xx}(\tau)\right|d\tau+\int_{\tau_0}^{T}\frac{\tau}{T}\left|R_{xx}(\tau)\right|d\tau\\ &\leq\frac{1}{T}\int_{0}^{\tau_0}\tau\left|R_{xx}(\tau)\right|d\tau+\int_{\tau_0}^{\infty}\left|R_{xx}(\tau)\right|d\tau\\ &<\frac{1}{T}\int_{0}^{\tau_0}\tau\left|R_{xx}(\tau)\right|d\tau+\frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Für $T > T_0 = \dfrac{4}{\varepsilon} \displaystyle\int_0^{\tau_0} \tau \left| R_{xx}(\tau) \right| d\tau$

  folgt: $\displaystyle\int_0^T \frac{\tau}{T} \left| R_{xx}(\tau) \right| d\tau < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$

- Zu jedem ε gibt es also ein T_0, so dass gilt:

$$\left| \int_{-T}^{T} \frac{|\tau|}{T} R_{xx}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \right| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für} \quad T > T_0$$

- Daraus folgt:

$$\lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{|\tau|}{T} R_{xx}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau = 0$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Damit ist gezeigt (Wiener-Chintschin-Theorem):

$$\boxed{G_{xx}(f) = 2 \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E\left[\left| X_k(f, T) \right|^2 \right] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau}$$

- Da das Leistungsdichtespektrum $G_{xx}(f)$ nur für positive Frequenzen definiert ist, wird es als *einseitiges Leistungsdichtespektrum* bezeichnet.
- Das einseitige Leistungsdichtespektrum ist gleich dem Zweifachen der Fourier-Transformation der Autokorrelation.

4.1 Leistungsdichtespektren

- Zweiseitiges Leistungsdichtespektrum:
  - Das *zweiseitige Leistungsdichtespektrum* ist gleich der Fourier-Transformierten der Autokorrelation:

$$\boxed{S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\, e^{-2\pi i f \tau}\, d\tau}$$

  - Es ist auch für negative Frequenzen definiert.
  - Für positive Frequenzen gilt:

$$G_{xx}(f)=2\,S_{xx}(f) \quad \text{für} \quad f>0$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Eigenschaften:
  - Aus der Definition mithilfe der endlichen Fourier-Transformation folgt sofort, dass sowohl das einseitige als auch das zweiseitige Leistungsdichtespektrum reell und positiv sind.
  - Damit gilt:

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos(2\pi f\tau)\,d\tau \rightarrow \bar{S}_{xx}(f)=S_{xx}(-f)=S_{xx}(f)$$

  - Mit $R_{xx}(-\tau)=R_{xx}(\tau)$ folgt außerdem:

$$S_{xx}(f)=2\int_{0}^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos(2\pi f\tau)\,d\tau$$

$$G_{xx}(f)=4\int_{0}^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos(2\pi f\tau)\,d\tau \quad \text{für} \quad f>0$$

4.1 Leistungsdichtespektren

- Die inverse Fourier-Transformation ergibt:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\, e^{2\pi i f \tau}\, df = 2\int_{0}^{\infty} S_{xx}(f)\cos(2\pi f \tau)\, df$$

$$=\int_{0}^{\infty} G_{xx}(f)\cos(2\pi f \tau)\, df$$

- Daraus folgt für den quadratischen Mittelwert:

$$\psi_x^2 = R_{xx}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\, df = 2\int_{0}^{\infty} S_{xx}(f)\, df = \int_{0}^{\infty} G_{xx}(f)\, df$$

4.2 Kreuzleistungsdichtespektren

- Definition:
  - Das *zweiseitige Kreuzleistungsdichtespektrum* ist die Fourier-Transformierte der Kreuzkorrelation:

$$\boxed{S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-2\pi i f \tau}\, d\tau}$$

  - Die inverse Fourier-Transformation des zweiseitigen Kreuzleistungsdichtespektrums ergibt die Kreuzkorrelation:

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f)\, e^{2\pi i f \tau}\, df}$$

4.2 Kreuzleistungsdichtespektren

- Für das *einseitige Kreuzleistungsspektrum* gilt:

$$G_{xy}(f) = 2\,S_{xy}(f) \quad \text{für} \quad f > 0$$

- Wie für das Leistungsdichtespektrum lässt sich zeigen:

$$G_{xy}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} E[X_k(f,T)\,\bar{Y}_k(f,T)] \quad \text{für} \quad f > 0$$

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} E[X_k(f,T)\,\bar{Y}_k(f,T)]$$

4.2 Kreuzleistungsdichtespektren

- Eigenschaften:
  - Das Kreuzleistungsdichtespektrum ist eine komplexe Funktion der Frequenz.
  - Mit $R_{xy}(-\tau)=R_{yx}(\tau)$ folgt: $S_{xy}(-f)=\bar{S}_{xy}(f)=S_{yx}(f)$

    $\bar{G}_{xy}(f)=G_{yx}(f)$
  - Es lässt sich zeigen, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$\left|G_{xy}(f)\right|^2 \leq G_{xx}(f)\,G_{yy}(f)$$

4.2 Kreuzleistungsdichtespektren

- Kohärenz:
  - Die Kohärenz ist definiert durch

$$\gamma_{xy}^2(f)=\frac{\left|G_{xy}(f)\right|^2}{G_{xx}(f)\,G_{yy}(f)}=\frac{\left|S_{xy}(f)\right|^2}{S_{xx}(f)\,S_{yy}(f)}$$

  - Die Kohärenz ist eine reelle Funktion der Frequenz, für die gilt:

$$0\leq\gamma_{xy}^2(f)\leq 1$$

4.2 Kreuzleistungsdichtespektren

- Spektraldichtematrix:
  - Gegeben seien N stochastische Prozesse $\{x_{nk}(t)\}$.
  - Die zugehörigen endlichen Fourier-Transformierten $X_{nk}(f, T)$ lassen sich in einer Spaltenmatrix zusammenfassen:

$$[X_k] = \begin{bmatrix} X_{1k} \\ \vdots \\ X_{Nk} \end{bmatrix}$$

  - Die Spektraldichtematrix ist definiert durch

$$[G_x] = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} E\left[[X_k][X_k]^H \right]$$

mit $[X_k]^H = [\bar{X}_k]^T$.

  - Die Spektraldichtematrix ist eine *hermitesche* Matrix, d. h. es gilt:

$$[G_x]^H = [G_x]$$

4.2 Kreuzleistungsdichtespektren

- Die Diagonalelemente der Spektraldichtematrix sind die reellen Leistungsdichtespektren der einzelnen stochastischen Prozesse.
- Die Außerdiagonalelemente sind die komplexen Kreuzleistungsdichtespektren zwischen den einzelnen stochastischen Prozessen.

4.3 Leistungsdichtespektrum der Antwort

- Aufgabenstellung:
  - Betrachtet wird ein lineares dynamisches System, das durch stationäre stochastische Prozesse belastet wird.
  - Zu berechnen ist das Leistungsdichtespektrum der Antwort aus den Leistungs- und Kreuzleistungsdichtespektren der Lasten.
- Belastung durch eine einzige Last:
  - Die Struktur wird durch einen einzigen stationären stochastischen Prozess $\{x_k(t)\}$ belastet, dessen Leistungsdichtespektrum $G_{xx}(f)$ gegeben ist.

4.3 Leistungsdichtespektrum der Antwort

- Mit der Übertragungsfunktion $H_{yx}(f)$ gilt für die endliche Fourier-Transformation einer Realisierung $y_k(t)$ der Antwort:

$$Y_k(f,T) = H_{yx}(f)\, X_k(f,T)$$

- Für das Leistungsdichtespektrum der Antwort folgt:

$$G_{yy}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} E\left[\left|Y_k(f,T)\right|^2\right]$$

$$= \left|H_{yx}(f)\right|^2 \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} E\left[\left|X_k(f,T)\right|^2\right] = \left|H_{yx}(f)\right|^2 G_{xx}(f)$$

4.3 Leistungsdichtespektrum der Antwort

- Das Kreuzleistungsdichtespektrum zwischen Last und Antwort berechnet sich zu

$$G_{xy}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} E[X_k(f,T)\bar{Y}_k(f,T)]$$

$$= \bar{H}_{yx}(f) \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} E[X_k(f,T)\bar{X}_k(f,T)] = \bar{H}_{yx}(f) G_{xx}(f)$$

- Ergebnis:

$$\boxed{G_{yy}(f) = |H_{yx}(f)|^2 G_{xx}(f), \quad G_{xy}(f) = \bar{H}_{yx}(f) G_{xx}(f)}$$

4.3 Leistungsdichtespektrum der Antwort

- Für die Kohärenz zwischen Last und Antwort folgt:

$$\gamma_{xy}^2(f)=\frac{\left|\bar{H}_{yx}(f)\right|^2 G_{xx}^2(f)}{G_{xx}(f)\left|H_{yx}(f)\right|^2 G_{xx}(f)}=1$$

- Für die aus der gemessenen Last und der gemessenen Antwort berechnete Kohärenz gilt in der Regel: $0\leq\gamma_{xy}^2<1$
- Die Gründe dafür sind:
  - Den Messwerten $y(t)$ ist ein Fremdgeräusch überlagert.
  - Das Strukturverhalten ist nichtlinear.
  - Zusätzlich zur betrachteten Last $x(t)$ greifen weitere Lasten an der Struktur an.

4.3 Leistungsdichtespektrum der Antwort

- Belastung durch mehrere Lasten:
  - Die Struktur wird durch mehrere stationäre stochastische Prozesse $\{x_{nk}(t)\}$, $n = 1, \ldots, N$ belastet.
  - Gegeben sind die Leistungsdichtespektren $G_{nn}(f)$ und alle Kreuzleistungsdichtespektren $G_{mn}(f)$.
  - Mit den Übertragungsfunktionen $H_{yn}(f)$ gilt für die endliche Fourier-Transformation einer Realisierung $y_k(t)$ der Antwort:

$$Y_k(f, T) = \sum_{n=1}^{N} H_{yn}(f) X_{nk}(f, T)$$

4.3 Leistungsdichtespektrum der Antwort

- Mit der Übertragungsmatrix

$$\left[H_{yx}(f)\right]=\left[H_{y1}(f) \quad \cdots \quad H_{yN}(f)\right]$$

gilt:

$$Y_k(f,T)=\left[H_{yx}(f)\right]\left[X_k(f,T)\right]$$

- Mit $\left|Y_k(f,T)\right|^2=Y_k(f,T)\,\bar{Y}_k(f,T)$

$$=\left[H_{yx}(f)\right]\left[X_k(f,T)\right]\left[X_k(f,T)\right]^H\left[H_{yx}(f)\right]^H$$

folgt:

$$\boxed{G_{yy}(f)=\left[H_{yx}(f)\right]\left[G_x(f)\right]\left[H_{yx}(f)\right]^H}$$

4.4 Auswertung

- Aus dem Leistungsdichtespektrum lassen sich viele weitere Größen zur Bewertung eines stochastischen Prozesses und seiner Auswirkungen berechnen.
- Quadratischer Mittelwert:
  - Für den quadratischen Mittelwert gilt: $\psi_x^2 = \int_0^\infty G_{xx}(f)\, df$
  - Für einen stationären stochastischen Prozess, dessen Mittelwert null ist, stimmt der quadratische Mittelwert mit der Varianz überein. Daraus folgt für die Standardabweichung:

$$\sigma_x = \sqrt{\psi_x^2}$$

4.4 Auswertung

- Für einen ergodischen Gaußschen stochastischen Prozess gilt zu jedem Zeitpunkt für die Wahrscheinlichkeitsdichte von $x(t)$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

- Gewichteter quadratischer Mittelwert:
  - Der gewichtete quadratische Mittelwert ist definiert durch

$$\psi_{Wx}^2 = \int_0^\infty W(f) G_{xx}(f) df$$

4.4 Auswertung

- Die Gewichtung $W(f)$ berücksichtigt, dass die Beiträge der einzelnen Frequenzen unterschiedlich starke Auswirkungen haben.
- Beispiele:
  - Die A-, B- C- und D-Bewertungen für das Leistungsdichtespektrum des Schalldrucks berücksichtigen die unterschiedliche Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs (DIN EN 60651, ISO 1996).
  - Komfortkennzahlen sind gewichtete quadratische Mittelwerte des Leistungsdichtespektrums der Beschleunigungen, die zur Bewertung des Fahrkomforts verwendet werden (VDI 2057, ISO 2631-1).

4.4 Auswertung

- Anzahl der Nulldurchgänge pro Zeiteinheit:
  - Für einen Gaußschen stochastischen Prozess, dessen Mittelwert null ist, gilt für die Anzahl der Nulldurchgänge pro Zeit:

$$N_0 = \frac{1}{\pi}\frac{\sigma_v}{\sigma_x} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\int_0^\infty 4\pi^2 f^2 G_{xx}(f)\,df}{\int_0^\infty G_{xx}(f)\,df}\right)^{1/2} = 2\left(\frac{\int_0^\infty f^2 G_{xx}(f)\,df}{\int_0^\infty G_{xx}(f)\,df}\right)^{1/2}$$

  - Für die Anzahl der Durchgänge durch die Gerade $x = \alpha$ pro Zeit gilt:

$$N_\alpha = N_0 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

4.4 Auswertung

- Lebensdauerabschätzung:
  - Es gibt eine Reihe von Methoden, mit denen sich die Lebensdauer anhand von Leistungsdichtespektren der Spannungen abschätzen lässt, z. B.
    - Dirlik
    - Wirsching-Light
    - Gao-Moan
    - Zhao-Baker
    - Tovo-Benasciutti
    - Petrucci-Zuccarello