1. Abtasttheorem

- Zeitreihen:
  - Die digitale Aufzeichnung eines Zeitsignals $x(t)$ liefert N diskrete Messwerte

$$x_n = x(n\Delta t), \quad n = 0, \ldots, N-1$$

  - Zwischen dem Zeitschritt Δt, der Messdauer T und der Anzahl N der Zeitintervalle besteht der Zusammenhang

$$\Delta t = T/N$$

  - Die *Abtastrate* f_S gibt an, wie viele Werte pro Zeit gemessen werden. Es gilt:

$$f_S = N/T = 1/\Delta t$$

1. Abtasttheorem

- Abtastrate:
  - Die benötigte Abtastrate hängt von den im Zeitsignal enthaltenen Frequenzen ab.
  - Sie muss so gewählt werden, dass sich Beiträge mit unterschiedlicher Frequenz unterscheiden lassen.
  - Beispiel:
    - Die beiden Zeitsignale

$$x_1(t)=\cos(2\pi f_1 t),\quad x_2(t)=\cos(2\pi f_2 t)$$

      werden mit dem Zeitschritt $\Delta t = 1/f_S$ abgetastet.
    - Untersucht wird, unter welchen Bedingungen sich für beide Zeitsignale die gleichen Zeitreihen ergeben.

1. Abtasttheorem

- Aus der Bedingung

$$x_1(n\Delta t) = x_2(n\Delta t)$$

folgt: $\cos(2\pi f_1 n\Delta t) = \cos(2\pi f_2 n\Delta t)$

$$\rightarrow \; 0 = \cos(2\pi f_2 n\Delta t) - \cos(2\pi f_1 n\Delta t)$$
$$= -2\sin\left(\pi(f_2 + f_1) n\Delta t\right)\sin\left(\pi(f_2 - f_1) n\Delta t\right)$$

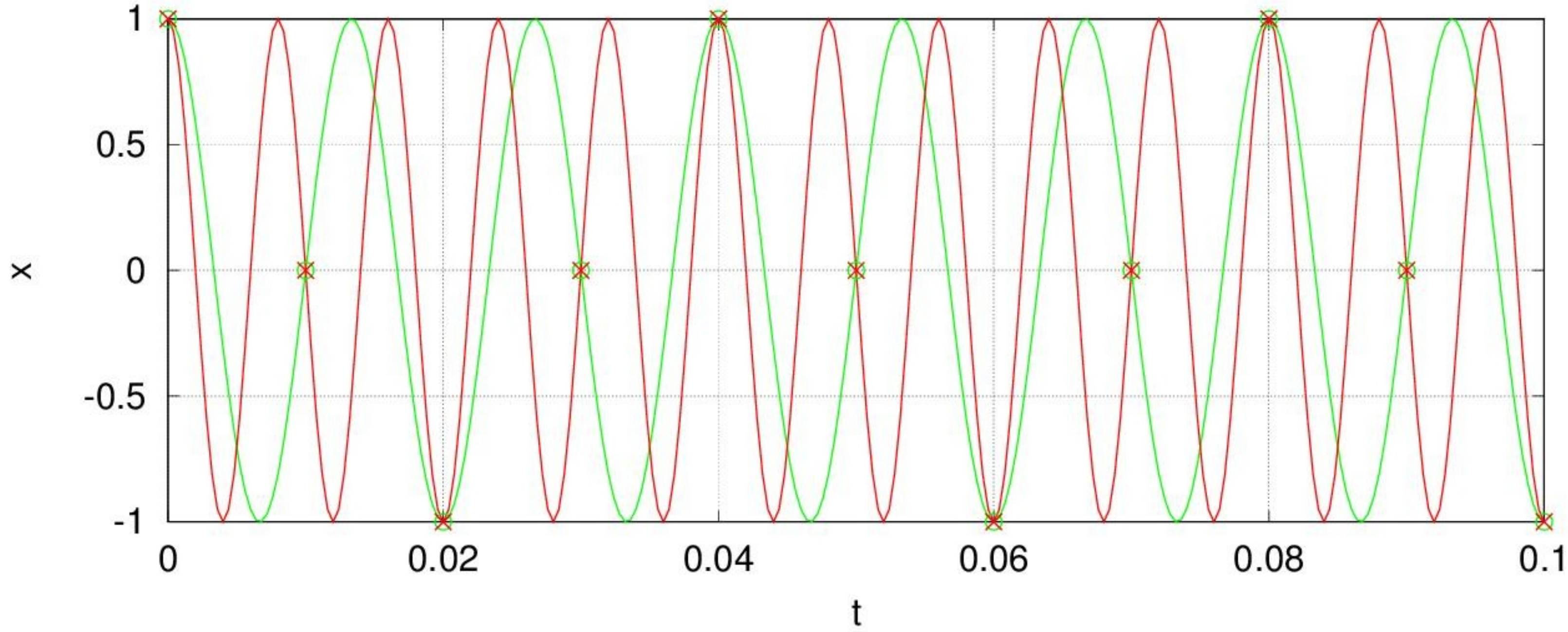
- Die Bedingung ist erfüllt, wenn einer der beiden Faktoren null ist:

$$(f_2 + f_1)\Delta t = k \;\rightarrow\; f_1 + f_2 = \frac{k}{\Delta t} = k f_S, \quad \frac{f_1 + f_2}{2} = k\frac{f_S}{2}$$

$$(f_2 - f_1)\Delta t = k \;\rightarrow\; f_2 - f_1 = k f_S, \quad f_2 = f_1 + k f_S$$

1. Abtasttheorem

- Die beiden Zeitreihen stimmen überein, wenn die Frequenzen symmetrisch zur halben Abtastrate liegen oder wenn die zweite Frequenz um die Abtastrate f_S höher als die erste Frequenz ist.
- Beispiel: $f_1 = 75\ \mathrm{Hz}$ (grün), $f_2 = 125\ \mathrm{Hz}$ (rot), $f_S = 200\ \mathrm{Hz}$



1. Abtasttheorem

- Abtasttheorem:
  - Betrachtet wird ein Zeitsignal $x(t)$ mit folgenden Eigenschaften:
    - $x(t)=0$ für $t<0$ und $t>T$
    - Für die Fourier-Transformation gilt:

      $X(f)=0$ für $f<-f_C$ und $f>f_C$
  - Aus diesen Eigenschaften folgt:

$$X(f)=\int_0^T x(t)e^{-2\pi i f t}\,dt\,,\quad x(t)=\int_{-f_C}^{f_C} X(f)e^{2\pi i f t}\,df$$

1. Abtasttheorem

- Das Abtasttheorem besagt:
  - Damit sich die Beiträge der einzelnen Frequenzen unterscheiden lassen, muss gelten:

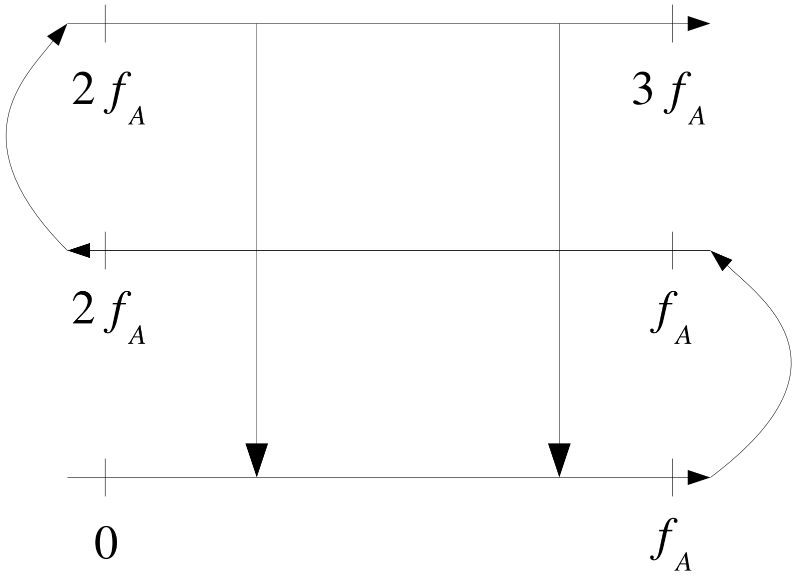
$$\boxed{f_S \geq 2 f_C}$$

  - Gilt $f_S > 2 f_C$, dann lässt sich das Zeitsignal exakt aus der Zeitreihe rekonstruieren.
- Die angegebene Bedingung wird als *Nyquist-Bedingung* bezeichnet.
- Mit der *Nyquist-Frequenz* $f_A = f_S / 2$ lautet die Nyquist-Bedingung:

$$f_A \geq f_C$$

1. Abtasttheorem

- Wird eine kleinere Abtastrate verwendet, kommt es zu einer Verfälschung, die als *Alias-Effekt* oder *Aliasing* bezeichnet wird.



- Die Beiträge der Frequenzen oberhalb der Nyquist-Frequenz werden zu den Beiträgen der entsprechenden Frequenzen unterhalb der Nyquist-Frequenz addiert.
- Zeitsignale, die Anteile oberhalb der Nyquist-Frequenz enthalten, müssen vor dem Abtasten analog gefiltert werden.

1. Abtasttheorem

- Die Kardinalreihe:
  - Wenn die Nyquist-Bedingung erfüllt ist, lässt sich der Wert des Zeitsignals für jeden Zeitpunkt t aus den Werten der Zeitreihe berechnen:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x(n\Delta t) \frac{\sin\left(\pi\left(f_S t - n\right)\right)}{\pi\left(f_S t - n\right)}$$

  - Da ein endliches Zeitsignal theoretisch alle Frequenzen enthält, weicht die Kardinalreihe am Anfang und am Ende etwas vom Zeitsignal ab. Die Abweichungen sind umso kleiner, je länger das Zeitsignal ist.

1. Abtasttheorem

- Die Funktion **`resample`**:
  - Die Funktion **`resample`** aus dem Package `signal` erzeugt eine neue Zeitreihe mit einer geänderten Abtastrate.
  - Die Abtastrate kann erhöht (Upsampling) oder erniedrigt (Downsampling) werden.
  - Wird die Abtastrate erniedrigt, wird die gegebene Zeitreihe vorher so gefiltert, dass die Nyquist-Bedingung erfüllt ist.
  - Die Funktion kann z. B. verwendet werden, um den Abtast-vorgang zu simulieren.

1. Abtasttheorem

- Aufruf:

  ```
  y = resample(x, P, Q)
  ```

- Argumente:

`x`	gegebene Zeitreihe
`P`	Zähler des Faktors für die Abtastrate
`Q`	Nenner des Faktors für die Abtastrate
`y`	neue Zeitreihe

Die Abtastrate wird mit dem Faktor **`P/Q`** multipliziert.

1. Abtasttheorem

- Beispiel: Impuls
  - Gegeben ist der Impuls

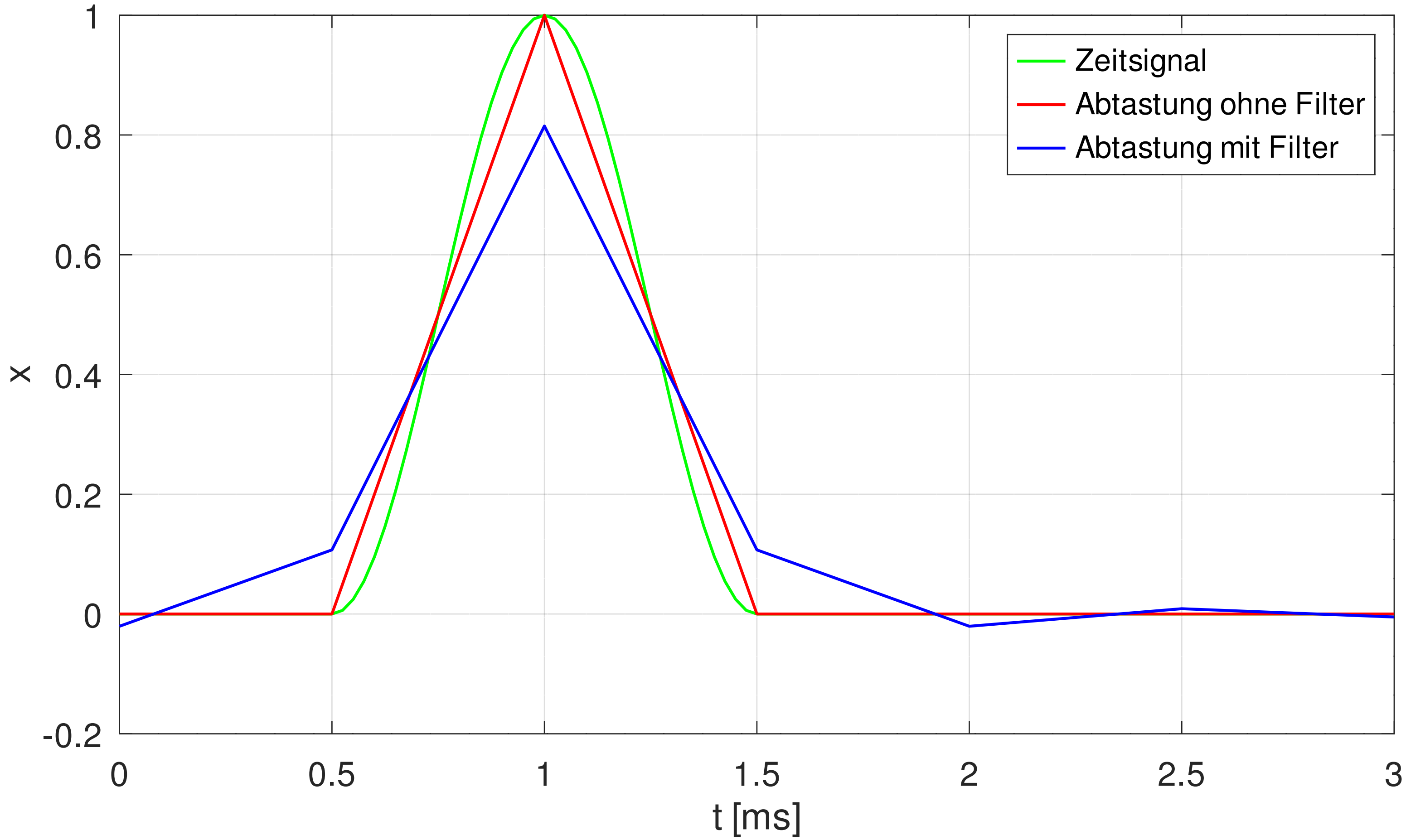
$$x(t)=\begin{cases}\sin^2\left(\pi\frac{t-t_0}{T}\right), & t_0 \leq t \leq t_0+T\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

  - Zahlenwerte: $T = 1\ \text{ms}$, $t_0 = 0{,}5\ \text{ms}$
  - Die Fourier-Transformation zeigt, dass die Beiträge von Frequenzen oberhalb von $f_C = 2/T$ vernachlässigbar klein sind.
  - Damit gilt für die benötigte Abtastrate: $f_S = 4/T = 4000\ \text{Hz}$

1. Abtasttheorem

- Das kontinuierliche Zeitsignal wird durch eine Zeitreihe mit $f_S = 40\ \mathrm{kHz}$ simuliert.
- Daraus werden zwei Zeitreihen durch Abtastung mit $f_S = 200\ \mathrm{Hz}$ gewonnen:
  a) Die Abtastung wird ohne Filterung durchgeführt.
  b) Das Zeitsignal wird vor dem Abtasten gefiltert.
- Das Diagramm auf der folgenden Seite zeigt:
  - Bei Abtastung ohne Filter wird das Zeitsignal besser wiedergegeben.
  - Durch die Filterung entstehen im Zeitbereich Schwankungen.
- Die gefilterte Zeitreihe gibt den Frequenzgehalt bis $100\ \mathrm{Hz}$ korrekt wieder.

1. Abtasttheorem



1. Abtasttheorem

- Beispiel: Mit einer Abtastrate von $8192\ \mathrm{Hz}$ aufgenommene Zeitreihe eines Hammerschlags