3. Frequenzganganalysen

- In Kapitel 2.3 wurde gezeigt:
  - Antworten auf harmonische Lasten sind harmonisch.
  - Antworten auf harmonische Lasten werden durch die Übertragungsfunktionen beschrieben.
  - Übertragungsfunktionen können daher durch *Frequenzganganalysen* ermittelt werden.
- Im Folgenden wird gezeigt, wie die Übertragungsfunktionen für die rechteckige ebene Platte bestimmt werden können.

3. Frequenzganganalysen

- Komplexe Schwingungsgleichung:
  - Die Platte wird angeregt durch die harmonische Last

$$p(x, y, t) = \Re\left(P(x, y)\, e^{2\pi i f t}\right) = \Re\left(P(x, y)\, e^{i\Omega t}\right), \quad \Omega = 2\pi f$$

  - Für die Antwort gilt: $w(x, y, t) = \Re\left(W(x, y)\, e^{i\Omega t}\right)$
  - Dabei sind $P(x, y)$ und $W(x, y)$ komplexe Amplituden.
  - Für die zeitliche Ableitung gilt:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(W\, e^{i\Omega t} + \bar{W}\, e^{-i\Omega t}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(i\,\Omega\, W\, e^{i\Omega t} - i\,\Omega\, \bar{W}\, e^{-i\Omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(i\,\Omega\, W\, e^{i\Omega t} + \overline{i\,\Omega\, W\, e^{i\Omega t}}\right) = \Re\left(i\,\Omega\, W\, e^{i\Omega t}\right)$$

3. Frequenzganganalysen

- Entsprechend folgt: $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Re\left(-\Omega^2 W e^{i\Omega t}\right)$$

- Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt:

$$\Re\left[\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \Omega^2 \frac{\rho h}{B} W\right) e^{i\Omega t}\right] = \Re\left(\frac{P}{B} e^{i\Omega t}\right)$$

- Diese Gleichung ist nur dann für beliebige Werte von t erfüllt, wenn die *komplexe Schwingungsgleichung* erfüllt ist:

$$\boxed{\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \Omega^2 \frac{\rho h}{B} W = \frac{P}{B}}$$

3. Frequenzganganalysen

- Modale Superposition:
  - Die komplexe Schwingungsgleichung lässt sich leicht lösen, wenn die Eigenschwingungen bekannt sind.
  - Da sich jede Funktion, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllt, als Überlagerung von Eigenfunktionen darstellen lässt, gilt

$$W(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} W_{mn}(x,y)$$

    mit noch zu bestimmenden komplexen *modalen Koeffizienten* Q_{mn} .

3. Frequenzganganalysen

- Einsetzen in die komplexe Schwingungsgleichung ergibt:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}\left(\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial y^4}-\Omega^2\frac{\rho h}{B}W_{mn}\right)=\frac{P}{B}$$

- Mit $\dfrac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 W_{mn}}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 W_{mn}}{\partial y^4}=\kappa_{mn}^4 W_{mn}=\omega_{mn}^2\dfrac{\rho h}{B}W_{mn}$

  folgt: $$\rho h\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega_{mn}^2-\Omega^2\right)Q_{mn}W_{mn}=P$$

- Zur Bestimmung der modalen Koeffizienten wird diese Gleichung mit W_{mn} multipliziert und über die Fläche integriert.

3. Frequenzganganalysen

- Mit den Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen folgt:

$$\frac{1}{4}\rho\, a\, b\, h\left(\omega_{mn}^2-\Omega^2\right)Q_{mn}=\int_0^b\int_0^a P\, W_{mn}\, dx\, dy$$

- Mit der Plattenmasse $m_P=\rho\, a\, b\, h$

  und den *Erregerfrequenzverhältnissen* $\eta_{mn}=\dfrac{\Omega}{\omega_{mn}}=\dfrac{f}{f_{mn}}$

  ergibt sich:

$$\frac{1}{4}m_P\,\omega_{mn}^2\left(1-\eta_{mn}^2\right)Q_{mn}=\int_0^b\int_0^a P\, W_{mn}\, dx\, dy$$

3. Frequenzganganalysen

- Mit den *modalen Lasten*

$$L_{mn} = \int_0^b \int_0^a P\, W_{mn}\, dx\, dy$$

folgt:

$$Q_{mn} = \frac{4\, L_{mn}}{m_P\, \omega_{mn}^2} \frac{1}{1-\eta_{mn}^2}$$

- Mit den modalen Koeffizienten

$$q_{mn}^s = \frac{4\, L_{mn}}{m_P\, \omega_{mn}^2}$$

der statischen Lösung ($\eta_{mn} = 0$) und

$$H_u(\eta) = \frac{1}{1-\eta^2}$$

folgt weiter:

$$Q_{mn}(\eta_{mn}) = q_{mn}^s H_u(\eta_{mn})$$

- Jede Eigenschwingung verhält sich wie ein System mit einem Freiheitsgrad.

3. Frequenzganganalysen

- Berücksichtigung von Dämpfung:
  - Ohne Dämpfung sind die modalen Koeffizienten reell und werden unendlich, wenn die Erregerfrequenz mit der Resonanzfrequenz übereinstimmt.
  - Wie bei Systemen mit einem Freiheitsgrad kann Dämpfung mithilfe des Lehrschen Dämpfungsmaßes berücksichtigt werden. Dabei kann jede Eigenschwingung ein eigenes Lehrsches Dämpfungsmaß D_{mn} haben.
  - Wie bei Systemen mit einem Freiheitsgrad gilt:

$$Q_{mn}(\eta_{mn}) = q^s_{mn} H(\eta_{mn}, D_{mn})$$

3. Frequenzganganalysen

- Die *modale Übertragungsfunktion* lautet:

$$H(\eta, D) = \frac{1}{1-\eta^2+2\,i\,D\,\eta} = \frac{1-\eta^2-2\,i\,D\,\eta}{\left(1-\eta^2\right)^2+4\,D^2\,\eta^2}$$

- Infolge der Dämpfung ist die modale Übertragungsfunktion komplex. Damit sind auch die modalen Koeffizienten komplex.
- Die komplexen Beiträge der einzelnen Eigenfunktionen addieren sich zur komplexen Verschiebungsamplitude $W(x, y)$.
- Daraus kann die reelle Amplitude und der Phasenwinkel an jeder Stelle der Platte ermittelt werden.

3. Frequenzganganalysen

- Einzelkräfte:
  - In der Praxis werden Platten häufig durch Einzelkräfte belastet.
  - Einzelkräfte sind Idealisierungen für Druckkräfte, die außerhalb einer kleinen Umgebung des Angriffspunktes verschwinden.
  - Eigenfunktionen, deren Wellenlänge groß im Vergleich zu den Abmessungen des belasteten Gebiets ist, können in dieser Umgebung als konstant angesehen werden.

3. Frequenzganganalysen

- Wirkt die Druckkraft nur auf dem kleinen Gebiet A_p, dann gilt für die modale Last:

$$L_{mn}=\int_{A_p} P\,W_{mn}\,dA \approx W_{mn}(x_P,y_P)\int_{A_p} P\,dA = W_{mn}(x_P,y_P)\,L$$

- Dabei sind (x_P,y_P) die Koordinaten des Kräftemittelpunkts, und

$$L=\int_{A_p} P\,dA$$

ist die resultierende Kraft.

3. Frequenzganganalysen

- Übertragungsfunktionen:
  - Für die Verschiebung am Punkt Q infolge einer Kraft L am Punkt P gilt:

$$W(x_Q, y_Q) = \frac{4L}{m_P} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(\eta_{mn}, D_{mn})}{\omega_{mn}^2} W_{mn}(x_P, y_P) W_{mn}(x_Q, y_Q)$$

  - Daraus folgt für die Übertragungsfunktion:

$${}^{w}H_{QP}(\Omega) = \frac{4}{m_P} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(\eta_{mn}, D_{mn})}{\omega_{mn}^2} W_{mn}(x_P, y_P) W_{mn}(x_Q, y_Q)$$

3. Frequenzganganalysen

- Für die Übertragungsfunktion zwischen der Beschleunigung am Punkt *Q* infolge einer Kraft am Punkt *P* gilt:

$$
{}^{a}H_{QP}(\Omega) = -\frac{4\Omega^2}{m_P} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(\eta_{mn}, D_{mn})}{\omega_{mn}^2} W_{mn}(x_P, y_P) W_{mn}(x_Q, y_Q)
$$

- Übertragungsfunktionen für Spannungskomponenten werden berechnet, indem die Spannungen für die einzelnen Eigenfunktionen berechnet und überlagert werden.
- Für Vergleichsspannungen können keine Übertragungsfunktionen angegeben werden, da Vergleichsspannungen nichtlinear von den Spannungskomponenten abhängen.

- Reziprozität:
  - Für die Übertragungsfunktion zwischen der Verschiebung am Punkt *Q* infolge einer Kraft am Punkt *P* gilt:

$$ {}^{w}H_{QP}(\Omega)=\frac{4}{m_P}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(\eta_{mn},D_{mn})}{\omega_{mn}^2}W_{mn}(x_P,y_P)\,W_{mn}(x_Q,y_Q) $$

  - Für die Übertragungsfunktion zwischen der Verschiebung am Punkt *P* infolge einer Kraft am Punkt *Q* gilt:

$$ {}^{w}H_{PQ}(\Omega)=\frac{4}{m_P}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H(\eta_{mn},D_{mn})}{\omega_{mn}^2}W_{mn}(x_Q,y_Q)\,W_{mn}(x_P,y_P) $$

3. Frequenzganganalysen

- Daraus lässt sich das *Reziprozitätsgesetz* für Übertragungs-funktionen ablesen:

$$ {}^{w}H_{QP}(\Omega) = {}^{w}H_{PQ}(\Omega) $$

- Entsprechend gilt für die Beschleunigungen:

$$ {}^{a}H_{QP}(\Omega) = {}^{a}H_{PQ}(\Omega) $$

- Reziprozität ist eine allgemeine Eigenschaft von linearen dynamischen Systemen. Sie kann verwendet werden, um die Qualität von Messungen zu überprüfen.

3. Frequenzganganalysen

- Modale Reduktion:
  - Für die praktische Berechnung können immer nur endlich viele Eigenfunktionen verwendet werden. Die so berechnete Lösung stellt eine Näherung dar.
  - Für die Übertragungsfunktionen zwischen Kräften und Verschiebungen gilt z. B.

$$ {}^{w}H_{PQ}(\Omega) \approx {}^{w}H_{PQ}^{MN}(\Omega) $$

mit $$ {}^{w}H_{PQ}^{MN}(\Omega) = \frac{4}{m_P} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \frac{H(\eta_{mn}, D_{mn})}{\omega_{mn}^2} W_{mn}(x_P, y_P) W_{mn}(x_Q, y_Q) $$

3. Frequenzganganalysen

- Jede Eigenschwingung verhält sich wie ein System mit einem Freiheitsgrad.
- Für $\eta_{mn} < 0{,}3$ gilt: $H(\eta_{mn}, D_{mn}) \approx 1$
- Eigenschwingungen, deren Eigenfrequenz f_{mn} größer als die dreifache Erregerfrequenz f ist, antworten daher *quasistatisch*.
- Für die modale Reduktion sollten alle Eigenschwingungen berücksichtigt werden, deren Antwort nicht quasistatisch ist. Das sind alle Eigenschwingungen, deren Eigenfrequenz kleiner als die dreifache Erregerfrequenz ist.
- Dann ist gewährleistet, dass die Antwort aller vernachlässigten Eigenschwingungen quasistatisch ist.

3. Frequenzganganalysen

- Beispiel:
  - Für eine rechteckige Stahlplatte werden Übertragungsfunktionen berechnet.
  - Gegeben:
    - Abmessungen: $a = 0{,}70$ m, $b = 0{,}5$ m, $h = 0{,}005$ m
    - Materialkennwerte: $E = 2{,}11 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$, $\rho = 7850\ \mathrm{kg/m^3}$, $\nu = 0{,}3$
    - Punkte: $P = (0{,}35;\ 0{,}25)$ m, $Q = (0{,}2;\ 0{,}1)$ m
    - Lehrsches Dämpfungsmaß: $D = 0{,}02$
  - Gesucht:
    - Übertragungsfunktionen für die Verschiebungen:

$$H_{PP}(f),\ \ H_{PQ}(f),\ \ H_{QQ}(f) \ \text{ für } \ 0\,\mathrm{Hz} \le f \le 1000\,\mathrm{Hz}$$

3. Frequenzganganalysen

- Konstanten:

$$B=\frac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}=\frac{2{,}11\cdot 10^{11}\,\mathrm{N/m^2}\cdot 0{,}005^3\,\mathrm{m^3}}{12\left(1-0{,}3^2\right)}=2415\,\mathrm{Nm}$$

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{B}{\rho\,h}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2415\,\mathrm{kg\,m^2/s^2}}{7850\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}005\,\mathrm{m}}}=12{,}32\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s}}$$

$$m_P=7850\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}70\,\mathrm{m}\cdot 0{,}50\,\mathrm{m}\cdot 0{,}005\,\mathrm{m}=13{,}74\,\mathrm{kg}$$

- Anzahl der Eigenfunktionen:
  - Es müssen alle Eigenschwingungen bis zur Frequenz

$$f_c=3\,f_{max}=3000\,\mathrm{Hz}$$

berücksichtigt werden.

3. Frequenzganganalysen

- Aus $$f_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{B}{\rho h}}\left(\frac{M^2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{B}{\rho h}}\frac{M^2}{a^2}$$

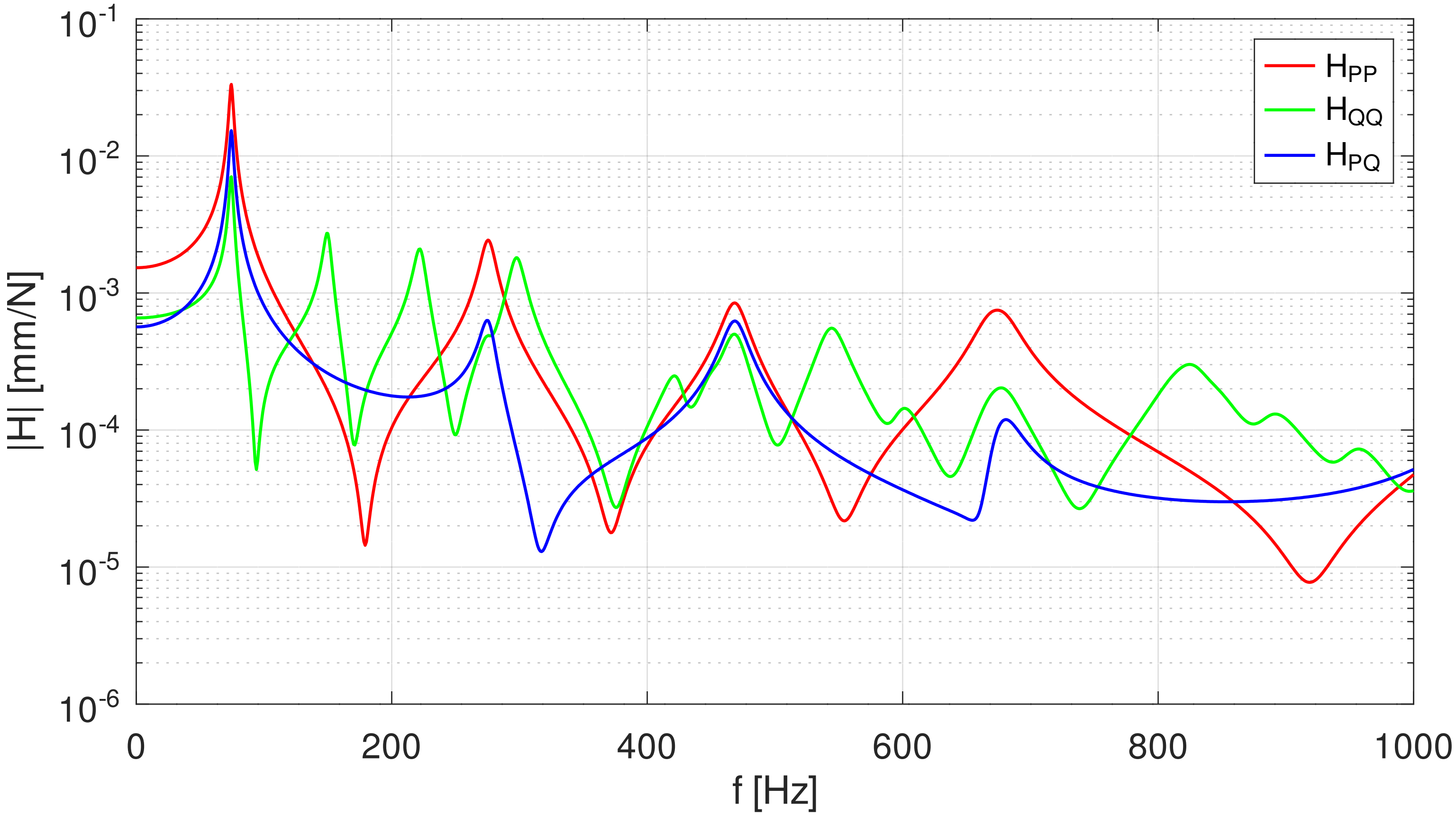
  folgt: $$M > \sqrt{f_c a^2 \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\rho h}{B}}} = \sqrt{\frac{3000\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 0{,}7^2\,\mathrm{m}^2}{12{,}32\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}}} = 10{,}9 \;\rightarrow\; M = 11$$

- Aus $$f_c = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{B}{\rho h}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}\right) < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{B}{\rho h}}\frac{N^2}{b^2}$$

  folgt: $$N > \sqrt{f_c b^2 \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\rho h}{B}}} = \sqrt{\frac{3000\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 0{,}5^2\,\mathrm{m}^2}{12{,}32\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}}} = 7{,}8 \;\rightarrow\; N = 8$$

3. Frequenzganganalysen

- Ergebnis: Amplituden der Übertragungsfunktionen



3. Frequenzganganalysen

- An den Stellen der Resonanzfrequenzen der beteiligten Eigenschwingungen treten ausgeprägte Maxima auf.
- Die zwischen den Resonanzen auftretenden Minima werden als *Antiresonanzen* bezeichnet.
- Bei außermittigem Lastangriff werden wesentlich mehr Eigenschwingungen angeregt.
- Bei der Berechnung von Übertragungsfunktionen ist darauf zu achten, dass sich genügend Frequenzpunkte in der Umgebung der Resonanzfrequenzen befinden.
- Ein Richtwert sind fünf Frequenzpunkte innerhalb der Halbwertsbreite jeder Eigenschwingung.