

2. Modalanalyse

- Die Ermittlung der Eigenschwingungen wird als Modalanalyse bezeichnet.
- Die Modalanalyse kann experimentell oder rechnerisch erfolgen.
- Bei der rechnerischen Modalanalyse muss ein Eigenwertproblem gelöst werden.

2. Modalanalyse

2.1 Eigenwertproblem

2.2 Eigenschaften der Lösung

2.3 Lösungsverfahren

2.4 Praktische Hinweise

2.1 Eigenwertproblem

- Freie ungedämpfte Schwingungen:
 - Freie ungedämpfte Schwingungen sind Lösungen von

$$[K_{LL}][u_L] + [M_{LL}][\ddot{u}_L] = [0]$$

- Sie beschreiben die Bewegung, die sich einstellt, wenn die Struktur aus einer ausgelenkten Lage losgelassen wird.
- Der Lösungsansatz $[u_L(t)] = [x]\phi(t)$

führt auf: $[K_{LL}][x]\phi(t) + [M_{LL}][x]\ddot{\phi}(t) = [0]$

$$\rightarrow [K_{LL}][x] = -[M_{LL}][x] \frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)}$$

2.1 Eigenwertproblem

- Da die linke Seite nicht von der Zeit abhängt, muss gelten:

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} = -\omega^2 = \text{const.} \rightarrow \phi(t) = c_s \sin(\omega t) + c_c \cos(\omega t)$$

- Der Vektor $[x]$ und die Kreisfrequenz ω sind Lösungen des algebraischen Eigenwertproblems

$$[K][x] = \omega^2 [M][x]$$

2.2 Eigenschaften der Lösung

- Aus den Eigenschaften der Matrizen folgt:
 - Ist N die Dimension der Steifigkeits- und der Massenmatrix, dann gibt es im Falle einer positiv definiten Massenmatrix genau N reelle Lösungen $(\omega_n^2, [x_n])$ des algebraischen Eigenwertproblems.
 - Die *Eigenvektoren* $[x_n]$ beschreiben die Form der Eigen-
schwingung.
 - Die Eigenwerte ω_n^2 liefern die Eigenkreisfrequenzen ω_n und die *Eigenfrequenzen* $f_n = \omega_n / (2\pi)$, die den zeitlichen Verlauf der *Eigenschwingung* beschreiben.

2.2 Eigenschaften der Lösung

- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich der Steifigkeits- und der Massenmatrix:

$$[x_m]^T [K] [x_n] = 0, \quad [x_m]^T [M] [x_n] = 0 \quad \text{für } \omega_m \neq \omega_n$$

- Sie können so normiert werden, dass gilt:

$$[x_n]^T [M] [x_n] = 1 \Rightarrow [x_n]^T [K] [x_n] = \omega_n^2$$

- Die Eigenvektoren bilden eine Basis des N -dimensionalen Vektorraums der Verschiebungen, d. h. jeder Verschiebungsvektor kann als Linearkombination der Eigenvektoren dargestellt werden:

$$[u_L] = \sum_{n=1}^N q_n [x_n]$$

2.2 Eigenschaften der Lösung

- Für eine konzentrierte Massenmatrix hat das Eigenwertproblem nur M Lösungen, wobei M gleich der Anzahl der von null verschiedenen Diagonalelemente der Massenmatrix ist.
- Die Eigenvektoren spannen daher nur einen M -dimensionalen Unterraum des Vektorraums der Verschiebungen auf.
- Eigenvektoren, die nicht in diesem Unterraum liegen, beschreiben Bewegungen, deren kinetische Energie null ist. Diese Bewegungen sind physikalisch ohne Bedeutung.

2.2 Eigenschaften der Lösung

- Eigenschaften der Näherung:
 - Die Eigenvektoren geben die Verschiebungen der Knotenpunkte der finiten Elemente an.
 - Zusammen mit den Interpolationsfunktionen innerhalb der Elemente definieren sie Verschiebungsfunktionen, die die Verschiebungsrandbedingungen der Struktur erfüllen.
 - Im Falle einer konsistenten Massenmatrix entspricht die Methode der finiten Elemente daher einem Rayleigh-Ritz-Verfahren.
 - Daraus folgt, dass die aus dem algebraischen Eigenwertproblem ermittelten Näherungen obere Schranken für die Eigenfrequenzen sind.

2.2 Eigenschaften der Lösung

- Im Falle einer konzentrierten Massenmatrix gilt diese Eigenschaft nicht. Die Näherungen für die Eigenfrequenzen können kleiner oder größer sein als die Eigenfrequenzen des kontinuierlichen Eigenwertproblems.
- Es darf aber nicht vergessen werden, dass bereits das kontinuierliche mathematische Modell eine Idealisierung der realen Struktur darstellt.

2.3 Lösungsverfahren

- Das zu lösende algebraische Eigenwertproblem ist in der Praxis von großer Dimension ($N > 10^6$).
- Meist muss jedoch nur eine kleine Anzahl von Eigen schwingungen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen be rechnet werden.
- Dafür werden effiziente iterative Verfahren benötigt.
- Gebräuchliche Verfahren sind die Unterraumiteration und die Lanczos-Verfahren.
- Grundlage beider Verfahren ist die Vektoriteration.

2.3 Lösungsverfahren

- Vektoriteration:

- Aus dem Eigenwertproblem folgt: $[K]^{-1}[M][x_n] = \frac{1}{\omega_n^2}[x_n]$
- Für einen beliebigen Vektor $[u] = \sum_{n=1}^N q_n[x_n]$

folgt daraus:

$$[K]^{-1}[M][u] = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\omega_n^2}[x_n] = \frac{1}{\omega_1^2} \left(q_1[x_1] + \sum_{n=2}^N \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 q_n[x_n] \right)$$

- m -malige Wiederholung ergibt:

$$([K]^{-1}[M])^m[u] = \frac{1}{\omega_1^{2m}} \left(q_1[x_1] + \sum_{n=2}^N \left(\frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^{2m} q_n[x_n] \right)$$

2.3 Lösungsverfahren

- Wegen $\omega_1/\omega_n < 1$ folgt daraus:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} ([K]^{-1}[M])^m [u] = \frac{q_1}{\omega_1^{2m}} [x_1]$$

- Daraus ergibt sich folgendes Iterationsverfahren:

- Start: Wahl eines Startvektors $[u^{(0)}]$, Iterationsindex $k = 0$
- Iteration:

1. Potenzschritt: $[\tilde{u}^{(k+1)}] = [K]^{-1}[M][u^{(k)}]$

2. Rayleigh-Quotient: $m^{(k+1)} = [\tilde{u}^{(k+1)}]^T [M] [\tilde{u}^{(k+1)}]$

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{[\tilde{u}^{(k+1)}]^T [K] [\tilde{u}^{(k+1)}]}{m^{(k+1)}} = \frac{[\tilde{u}^{(k+1)}]^T [M] [u^{(k)}]}{m^{(k+1)}}$$

2.3 Lösungsverfahren

3. Normierung:

$$[u^{(k+1)}] = \frac{[\tilde{u}^{(k+1)}]}{\sqrt{m^{(k+1)}}}$$

4. Konvergenztest:

$$\frac{|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|}{\lambda^{(k+1)}} < tol \quad ?$$

Wenn die Konvergenz noch nicht erreicht ist: $k = k + 1$,
weiter mit Schritt 1

- Ende:

$$[x_1] = [u^{(k+1)}], \quad \omega_1 = \sqrt{\lambda^{(k+1)}}$$

2.3 Lösungsverfahren

- Bemerkungen:
 - Durch die Normierung wird verhindert, dass der Iterationsvektor beliebig groß ($\omega_1 < 1$) oder beliebig klein ($\omega_1 > 1$) wird.
 - Wenn der erste Eigenvektor nicht im Startvektor enthalten ist, konvergiert das Verfahren theoretisch gegen den zweiten Eigenvektor. Infolge von Rundungsfehlern tritt tatsächlich eine verzögerte Konvergenz gegen den ersten Eigenvektor auf.
 - Soll der Eigenvektor auf s Stellen genau berechnet werden, muss für die Toleranz gelten: $tol \leq 10^{-2s}$
 - Die Vektoriteration geht auf Richard von Mises und Hilda Geiringer zurück (ZAMM, 1929).

2.3 Lösungsverfahren

- Unterraumiteration:
 - Bei der Unterraumiteration werden die p Eigenvektoren zu den p kleinsten Eigenwerten gleichzeitig berechnet.
 - Iterationsverfahren:
 - Start: Wahl von $q > p$ linear unabhängigen Vektoren, die als Spaltenvektoren in einer Matrix zusammengefasst werden:

$$[U^{(0)}] = [[u_1^{(0)}] \quad \dots \quad [u_q^{(0)}]]$$

- Iteration:
 1. Potenzschritt: $[\tilde{U}^{(k+1)}] = [K]^{-1} [M] [U^{(k)}]$

2.3 Lösungsverfahren

2. Rayleigh-Ritz-Schritt:

Projektion:

$$\begin{aligned} [K^{(k+1)}] &= [\tilde{U}^{(k+1)}]^T [K] [\tilde{U}^{(k+1)}] = [\tilde{U}^{(k+1)}]^T [M] [U^{(k)}] \\ [M^{(k+1)}] &= [\tilde{U}^{(k+1)}]^T [M] [\tilde{U}^{(k+1)}] \end{aligned}$$

Lösung des projizierten Eigenwertproblems:

$$[K^{(k+1)}] [\tilde{Y}^{(k+1)}] = [M^{(k+1)}] [\tilde{Y}^{(k+1)}] [\Lambda^{(k+1)}]$$

Massennormierung der projizierten Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} [m^{(k+1)}] &= [\tilde{Y}^{(k+1)}]^T [M^{(k+1)}] [\tilde{Y}^{(k+1)}] \\ [Y^{(k+1)}] &= [\tilde{Y}^{(k+1)}] [m^{(k+1)}]^{-1/2} \end{aligned}$$

3. Rücksubstitution:

$$[U^{(k+1)}] = [\tilde{U}^{(k+1)}] [Y^{(k+1)}]$$

2.3 Lösungsverfahren

4. Konvergenztest: $\frac{|\lambda_n^{(k+1)} - \lambda_n^{(k)}|}{\lambda_n^{(k+1)}} < tol \quad , \quad n=1, \dots, p \quad ?$

- Ende: $[[x_1] \quad \dots \quad [x_p]] = [X] = [U^{(k+1)}], \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n^{(k+1)}}, \quad n=1, \dots, p$
- Bemerkungen:
 - Das projizierte Eigenwertproblem ist von kleiner Dimension und kann z. B. mit einem Jacobi-Verfahren gelöst werden.
 - Die Matrizen $[m]$ und $[\Lambda]$ sind Diagonalmatrizen. Die Elemente der Matrix $[\Lambda]$ sind Näherungen für die Eigenwerte.
 - Die Unterraumiteration geht auf Arbeiten von H. Wielandt, F. L. Bauer und H. Rutishauser zurück.

2.3 Lösungsverfahren

- Lanczos-Verfahren:
 - Die Lanczos-Verfahren sind eine Kombination der Lanczos-Reduktion mit einem Rayleigh-Ritz-Schritt.
 - Zur Berechnung der ersten p Eigenvektoren werden zunächst $q > p$ Krylow-Vektoren erzeugt:
 - Wahl eines massennormierten Startvektors $[y_1]$: $[y_1]^T [M] [y_1] = 1$
 - Initialisierung: $\beta_0 = 0$
 - Für $k = 1, \dots, q - 1$:

$$[\bar{y}_k] = [K]^{-1} [M] [y_k], \quad \alpha_k = [\bar{y}_k]^T [M] [y_k], \quad [\tilde{y}_k] = [\bar{y}_k] - \alpha_k [y_k] - \beta_{k-1} [y_{k-1}]$$

$$\beta_k = \sqrt{[\tilde{y}_k]^T [M] [\tilde{y}_k]}, \quad [y_{k+1}] = [\tilde{y}_k] / \beta_k$$

2.3 Lösungsverfahren

- Für $k = q$: $[\bar{y}_q] = [K]^{-1}[M][y_q]$, $\alpha_q = [\bar{y}_q]^T [M][y_q]$
- Eigenschaften der Krylow-Vektoren:
 - Die Krylow-Vektoren sind massenorthonormal:

$$[y_m]^T [M][y_n] = 0 \text{ für } m \neq n, \quad [y_n]^T [M][y_n] = 1$$
 - Für die Matrix $[Y^{(q)}] = [[y_1] \quad \cdots \quad [y_q]]$ gilt:

$$[Y^{(q)}]^T [M][K]^{-1}[M][Y^{(q)}] = [T^{(q)}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{q-1} & \beta_{q-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{q-1} & \alpha_q \end{bmatrix}$$

2.3 Lösungsverfahren

- Rayleigh-Ritz-Schritt:

- Die Projektion des Eigenwertproblems in den von den Krylow-Vektoren aufgespannten q -dimensionalen Unterraum ergibt:

$$[T^{(q)}][Z^{(q)}] = [Z^{(q)}][\Lambda^{(q)}]^{-1}$$

- Die Lösung dieses Eigenwertproblems liefert die besten in dem von den Krylow-Vektoren aufgespannten Unterraum enthaltenen Näherungen für die Eigenvektoren.

- Iteration:

- Wenn nicht alle Eigenvektoren die gewünschte Genauigkeit haben, werden weitere Krylow-Vektoren berechnet.

2.3 Lösungsverfahren

- Ist eine bestimmte Anzahl von Vektoren erreicht oder lassen sich keine weiteren Vektoren mehr berechnen, wird ein neuer Startvektor gewählt.
- Der neue Startvektor wird so gewählt, dass er massenorthogonal auf den bereits konvergierten Eigenvektoren ist.
- Für jede neue Folge von Krylow-Vektoren kann eine Spektralverschiebung s gewählt werden, d. h. die Vektoren werden mit der Matrix

$$[K_s] = [K] - s[M]$$

berechnet.

- Mithilfe des Trägheitssatzes von Sylvester kann überprüft werden, ob alle Eigenwerte im betrachteten Intervall gefunden wurden (Sturm Sequence Check).

2.4 Praktische Hinweise

- Einheiten:
 - Die Einheiten von Steifigkeit und Masse müssen konsistent sein.
 - In der Praxis werden in der Regel folgende Einheiten verwendet:
 - Längeneinheit: mm
 - Krafteinheit: N
 - Elastizitätsmodul: MPa = N/mm²
 - Damit ist die Einheit für die Masse eine abgeleitete Einheit.

2.4 Praktische Hinweise

- Einheit für die Masse:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot 10^3 \text{ mm}}{\text{s}^2}$$

$$1 \text{ N} = 1000 \frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{\text{s}^2}$$

$$1 \text{ kg} = 10^{-3} \frac{\text{Ns}^2}{\text{mm}}$$

- Konsistente Einheiten:

- N, kg, m
- N, t, mm

- Falsch:

- N, kg, mm

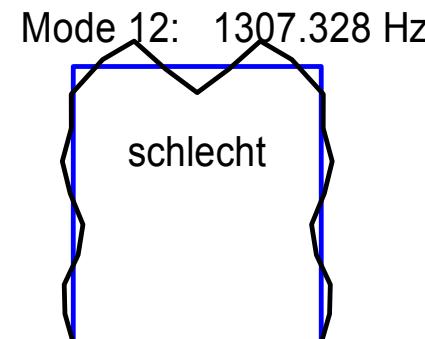
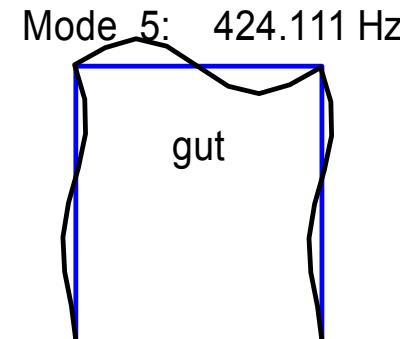
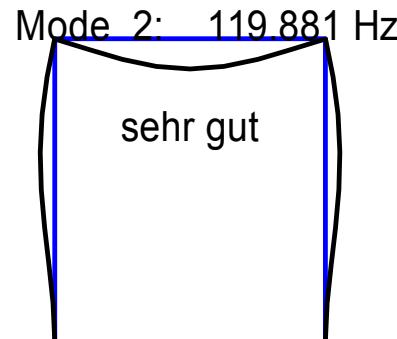
$$1 \frac{\text{Ns}^2}{\text{mm}} = 1000 \text{ kg} = 1 \text{ t}$$

2.4 Praktische Hinweise

- Netzfeinheit:
 - Die finiten Elemente müssen so klein sein, dass die zu berechnenden Eigenfunktionen gut approximiert werden können.
 - Da mit zunehmender Eigenfrequenz die Wellenlänge abnimmt, muss die Vernetzung um so feiner sein, je höher die Eigenfrequenz ist.
 - Bei Verwendung von Elementen mit einem linearen Ansatz sollten mindestens sechs Elemente und bei Elementen mit quadratischem Ansatz mindestens zwei Elemente pro Wellenlänge verwendet werden.

2.4 Praktische Hinweise

- Die Qualität der Vernetzung kann anhand der Schwingformen bewertet werden:



2.4 Praktische Hinweise

- Lokale Schwingungen:
 - Bei komplexen Strukturen, die aus vielen Einzelteilen zusammengebaut sind, treten häufig Schwingungen auf, die nur eines der Einzelteile betreffen.
 - Solche Schwingungen, bei denen sich die Schwingform auf einen kleinen Teilbereich der Struktur beschränkt, werden als lokale Schwingungen bezeichnet.
 - Wenn die Struktur viele ähnliche Einzelteile enthält, gibt es Frequenzintervalle, in denen sehr viele lokale Schwingungen liegen.

2.4 Praktische Hinweise

- Beispiele:
 - Streben in Flugzeugrümpfen
 - Schotten in Schiffsrümpfen
- Wenn nur die globalen Grundschwingungen wie z. B. Biegung und Torsion bei Schiffen oder Flugzeugen ermittelt werden sollen, können die lokalen Schwingungen vernachlässigt werden.
- Sie lassen sich vermeiden, wenn die Elemente, die die Struktur modellieren, keine Massendichte haben, sondern ihre Masse anteilig den Anbauteilen zugeschlagen wird, die durch Punktmassen abgebildet werden.

2.4 Praktische Hinweise

- Ob die lokalen Schwingungen vernachlässigt werden dürfen, hängt von der Art der Aufgabenstellung ab:
 - Für Flatteruntersuchungen können lokale Schwingungen im Inneren des Flugzeugs vernachlässigt werden.
 - Für akustische Untersuchungen des Innenraums müssen zumindest die lokalen Schwingungen der Anbauteile des Innenraums berücksichtigt werden.
 - Auf die Lebensdauer von Anbauteilen haben ihre lokalen Schwingungen einen großen Einfluss.

2.4 Praktische Hinweise

- Masselose Mechanismen:

- Masselose Mechanismen sind Bewegungsformen, für die die elastische und die kinetische Energie null sind:

$$[x_M]^T [K] [x_M] = 0 \text{ und } [x_M]^T [M] [x_M] = 0$$

- Physikalisch können solche Bewegungsformen nicht auftreten. Sie können jedoch durch Modellierungsfehler verursacht werden:
 - Ein falsch angeschlossenes Balkenelement kann um die Balkenachse rotieren.
 - Bei konzentrierten Massenmatrizen ist dieser Rotation meist keine Massenträgheit zugeordnet.

2.4 Praktische Hinweise

- Auswirkung:

- Für den Rayleigh-Quotient gilt: $R([x_M]) = \frac{[x_M]^T [K] [x_M]}{[x_M]^T [M] [x_M]} = \frac{0}{0}$!
- Aufgrund von Rundungsfehlern ergibt sich für den Zähler und den Nenner dieses Bruches eine kleine Zahl.
- Je nach Rechengenauigkeit nimmt der Rayleigh-Quotient daher irgendeinen beliebigen Wert an.
- Liegt die zugehörige Frequenz im untersuchten Frequenzbereich, so taucht sie in den Ergebnissen auf.
- Algorithmen, die die Anzahl der Eigenfrequenzen überprüfen, können mit einer Fehlermeldung abbrechen.