

## 2. Modalanalyse

---

- Die Ermittlung der Eigenschwingungen wird als Modalanalyse bezeichnet.
- Die Modalanalyse kann experimentell oder rechnerisch erfolgen.
- Bei der rechnerischen Modalanalyse muss ein Eigenwertproblem gelöst werden.

## 2. Modalanalyse

---

2.1 Eigenwertproblem

2.2 Eigenschaften der Lösung

2.3 Lösungsverfahren

2.4 Praktische Hinweise

## 2.1 Eigenwertproblem

---

- Freie ungedämpfte Schwingungen:
  - Freie ungedämpfte Schwingungen sind Lösungen von

$$[K_{LL}][u_L] + [M_{LL}][\ddot{u}_L] = [0]$$

- Sie beschreiben die Bewegung, die sich einstellt, wenn die Struktur aus einer ausgelenkten Lage losgelassen wird.
  - Der Lösungsansatz  $[u_L(t)] = [x]\phi(t)$

führt auf:  $[K_{LL}][x]\phi(t) + [M_{LL}][x]\ddot{\phi}(t) = [0]$

$$\rightarrow [K_{LL}][x] = -[M_{LL}][x] \frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)}$$

## 2.1 Eigenwertproblem

---

- Da die linke Seite nicht von der Zeit abhängt, muss gelten:

$$\frac{\ddot{\phi}}{\phi} = -\omega^2 = \text{const.} \rightarrow \phi(t) = c_s \sin(\omega t) + c_c \cos(\omega t)$$

- Der Vektor  $[x]$  und die Kreisfrequenz  $\omega$  sind Lösungen des algebraischen Eigenwertproblems

$$[K][x] = \omega^2 [M][x]$$

## 2.2 Eigenschaften der Lösung

---

- Aus den Eigenschaften der Matrizen folgt:
  - Ist  $N$  die Dimension der Steifigkeits- und der Massenmatrix, dann gibt es im Falle einer positiv definiten Massenmatrix genau  $N$  reelle Lösungen  $(\omega_n^2, [x_n])$  des algebraischen Eigenwertproblems.
  - Die *Eigenvektoren*  $[x_n]$  beschreiben die Form der Eigenschwingung.
  - Die Eigenwerte  $\omega_n^2$  liefern die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_n$  und die *Eigenfrequenzen*  $f_n = \omega_n / (2\pi)$ , die den zeitlichen Verlauf der *Eigenschwingung* beschreiben.

## 2.2 Eigenschaften der Lösung

---

- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich der Steifigkeits- und der Massenmatrix:

$$[x_m]^T [K] [x_n] = 0, \quad [x_m]^T [M] [x_n] = 0 \quad \text{für} \quad \omega_m \neq \omega_n$$

- Sie können so normiert werden, dass gilt:

$$[x_n]^T [M] [x_n] = 1 \quad \Rightarrow \quad [x_n]^T [K] [x_n] = \omega_n^2$$

- Die Eigenvektoren bilden eine Basis des  $N$ -dimensionalen Vektorraums der Verschiebungen, d. h. jeder Verschiebungsvektor kann als Linearkombination der Eigenvektoren dargestellt werden:

$$[u_L] = \sum_{n=1}^N q_n [x_n]$$

## 2.2 Eigenschaften der Lösung

---

- Für eine konzentrierte Massenmatrix hat das Eigenwertproblem nur  $M$  Lösungen, wobei  $M$  gleich der Anzahl der von null verschiedenen Diagonalelemente der Massenmatrix ist.
- Die Eigenvektoren spannen daher nur einen  $M$ -dimensionalen Unterraum des Vektorraums der Verschiebungen auf.
- Eigenvektoren, die nicht in diesem Unterraum liegen, beschreiben Bewegungen, deren kinetische Energie null ist. Diese Bewegungen sind physikalisch ohne Bedeutung.

## 2.2 Eigenschaften der Lösung

---

- Eigenschaften der Näherung:
  - Die Eigenvektoren geben die Verschiebungen der Knotenpunkte der finiten Elemente an.
  - Zusammen mit den Interpolationsfunktionen innerhalb der Elemente definieren sie Verschiebungsfunktionen, die die Verschiebungsrandbedingungen der Struktur erfüllen.
  - Im Falle einer konsistenten Massenmatrix entspricht die Methode der finiten Elemente daher einem Rayleigh-Ritz-Verfahren.
  - Daraus folgt, dass die aus dem algebraischen Eigenwertproblem ermittelten Näherungen obere Schranken für die Eigenfrequenzen sind.

## 2.2 Eigenschaften der Lösung

---

- Im Falle einer konzentrierten Massenmatrix gilt diese Eigenschaft nicht. Die Näherungen für die Eigenfrequenzen können kleiner oder größer sein als die Eigenfrequenzen des kontinuierlichen Eigenwertproblems.
- Es darf aber nicht vergessen werden, dass bereits das kontinuierliche mathematische Modell eine Idealisierung der realen Struktur darstellt.

## 2.3 Lösungsverfahren

---

- Das zu lösende algebraische Eigenwertproblem ist in der Praxis von großer Dimension ( $N > 10^6$ ).
- Meist muss jedoch nur eine kleine Anzahl von Eigenschwingungen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen berechnet werden.
- Dafür werden effiziente iterative Verfahren benötigt.
- Gebräuchliche Verfahren sind die Unterraumiteration und die Lanczos-Verfahren.
- Grundlage beider Verfahren ist die Vektoriteration.

## 2.3 Lösungsverfahren

---

- Vektoriteration:

- Aus dem Eigenwertproblem folgt:  $[K]^{-1}[M][x_n] = \frac{1}{\omega_n^2}[x_n]$
- Für einen beliebigen Vektor  $[u] = \sum_{n=1}^N q_n[x_n]$

folgt daraus:

$$[K]^{-1}[M][u] = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{\omega_n^2}[x_n] = \frac{1}{\omega_1^2} \left( q_1[x_1] + \sum_{n=2}^N \left( \frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^2 q_n[x_n] \right)$$

- $m$ -malige Wiederholung ergibt:

$$\left( [K]^{-1}[M] \right)^m [u] = \frac{1}{\omega_1^{2m}} \left( q_1[x_1] + \sum_{n=2}^N \left( \frac{\omega_1}{\omega_n} \right)^{2m} q_n[x_n] \right)$$

## 2.3 Lösungsverfahren

---

- Wegen  $\omega_1 / \omega_n < 1$  folgt daraus:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( [K]^{-1} [M] \right)^m [u] = \frac{q_1}{\omega_1^{2m}} [x_1]$$

- Daraus ergibt sich folgendes Iterationsverfahren:
  - Start: Wahl eines Startvektors  $[u^{(0)}]$ , Iterationsindex  $k = 0$
  - Iteration:

1. Potenzschritt: 
$$[\tilde{u}^{(k+1)}] = [K]^{-1} [M] [u^{(k)}]$$

2. Rayleigh-Quotient: 
$$m^{(k+1)} = [\tilde{u}^{(k+1)}]^T [M] [\tilde{u}^{(k+1)}]$$

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{[\tilde{u}^{(k+1)}]^T [K] [\tilde{u}^{(k+1)}]}{m^{(k+1)}} = \frac{[\tilde{u}^{(k+1)}]^T [M] [u^{(k)}]}{m^{(k+1)}}$$

## 2.3 Lösungsverfahren

---

3. Normierung: 
$$[u^{(k+1)}] = \frac{[\tilde{u}^{(k+1)}]}{\sqrt{m^{(k+1)}}}$$

4. Konvergenztest: 
$$\frac{|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}|}{\lambda^{(k+1)}} < tol \quad ?$$

Wenn die Konvergenz noch nicht erreicht ist:  $k = k + 1$ ,  
weiter mit Schritt 1

- Ende:

$$[x_1] = [u^{(k+1)}], \quad \omega_1 = \sqrt{\lambda^{(k+1)}}$$

## 2.3 Lösungsverfahren

---

### - Bemerkungen:

- Durch die Normierung wird verhindert, dass der Iterationsvektor beliebig groß ( $\omega_1 < 1$ ) oder beliebig klein ( $\omega_1 > 1$ ) wird.
- Wenn der erste Eigenvektor nicht im Startvektor enthalten ist, konvergiert das Verfahren theoretisch gegen den zweiten Eigenvektor. Infolge von Rundungsfehlern tritt tatsächlich eine verzögerte Konvergenz gegen den ersten Eigenvektor auf.
- Soll der Eigenvektor auf  $s$  Stellen genau berechnet werden, muss für die Toleranz gelten:  $tol \leq 10^{-2s}$
- Die Vektoriteration geht auf Richard von Mises und Hilda Geiringer zurück (ZAMM, 1929).

## 2.3 Lösungsverfahren

---

- Unterraumiteration:
  - Bei der Unterraumiteration werden die  $p$  Eigenvektoren zu den  $p$  kleinsten Eigenwerten gleichzeitig berechnet.
  - Iterationsverfahren:
    - Start: Wahl von  $q > p$  linear unabhängigen Vektoren, die als Spaltenvektoren in einer Matrix zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} U^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} u_q^{(0)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

- Iteration:

1. Potenzschritt:  $\begin{bmatrix} \tilde{U}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(k)} \end{bmatrix}$

## 2.3 Lösungsverfahren

---

### 2. Rayleigh-Ritz-Schritt:

Projektion: 
$$\begin{aligned} [K^{(k+1)}] &= [\tilde{U}^{(k+1)}]^T [K] [\tilde{U}^{(k+1)}] = [\tilde{U}^{(k+1)}]^T [M] [U^{(k)}] \\ [M^{(k+1)}] &= [\tilde{U}^{(k+1)}]^T [M] [\tilde{U}^{(k+1)}] \end{aligned}$$

Lösung des projizierten Eigenwertproblems:

$$[K^{(k+1)}][\tilde{Y}^{(k+1)}] = [M^{(k+1)}][\tilde{Y}^{(k+1)}][\Lambda^{(k+1)}]$$

Massennormierung der projizierten Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} [m^{(k+1)}] &= [\tilde{Y}^{(k+1)}]^T [M^{(k+1)}] [\tilde{Y}^{(k+1)}] \\ [Y^{(k+1)}] &= [\tilde{Y}^{(k+1)}] [m^{(k+1)}]^{-1/2} \end{aligned}$$

3. Rücksubstitution: 
$$[U^{(k+1)}] = [\tilde{U}^{(k+1)}][Y^{(k+1)}]$$

## 2.3 Lösungsverfahren

---

4. Konvergenztest:  $\frac{|\lambda_n^{(k+1)} - \lambda_n^{(k)}|}{\lambda_n^{(k+1)}} < tol, \quad n=1, \dots, p \quad ?$

- Ende:  $\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_p \end{bmatrix} = [X] = [U^{(k+1)}], \quad \omega_n = \sqrt{\lambda_n^{(k+1)}}, \quad n=1, \dots, p$

- Bemerkungen:

- Das projizierte Eigenwertproblem ist von kleiner Dimension und kann z. B. mit einem Jacobi-Verfahren gelöst werden.
- Die Matrizen  $[m]$  und  $[\Lambda]$  sind Diagonalmatrizen. Die Elemente der Matrix  $[\Lambda]$  sind Näherungen für die Eigenwerte.
- Die Unterraumiteration geht auf Arbeiten von H. Wielandt, F. L. Bauer und H. Rutishauser zurück.

## 2.3 Lösungsverfahren

---

- Lanczos-Verfahren:
  - Die Lanczos-Verfahren sind eine Kombination der Lanczos-Reduktion mit einem Rayleigh-Ritz-Schritt.
  - Zur Berechnung der ersten  $p$  Eigenvektoren werden zunächst  $q > p$  *Krylow-Vektoren* erzeugt:
    - Wahl eines massennormierten Startvektors  $[y_1]$ :  $[y_1]^T [M] [y_1] = 1$
    - Initialisierung:  $\beta_0 = 0$
    - Für  $k = 1, \dots, q - 1$ :

$$[\bar{y}_k] = [K]^{-1} [M] [y_k], \quad \alpha_k = [\bar{y}_k]^T [M] [y_k], \quad [\tilde{y}_k] = [\bar{y}_k] - \alpha_k [y_k] - \beta_{k-1} [y_{k-1}]$$

$$\beta_k = \sqrt{[\tilde{y}_k]^T [M] [\tilde{y}_k]}, \quad [y_{k+1}] = [\tilde{y}_k] / \beta_k$$

## 2.3 Lösungsverfahren

- Für  $k = q$  :  $[\bar{y}_q] = [K]^{-1} [M] [y_q]$ ,  $\alpha_q = [\bar{y}_q]^T [M] [y_q]$
- Eigenschaften der Krylow-Vektoren:
  - Die Krylow-Vektoren sind massenorthonormal:  

$$[y_m]^T [M] [y_n] = 0 \quad \text{für } m \neq n, \quad [y_n]^T [M] [y_n] = 1$$
  - Für die Matrix  $[Y^{(q)}] = [[y_1] \quad \cdots \quad [y_q]]$  gilt:

$$[Y^{(q)}]^T [M] [K]^{-1} [M] [Y^{(q)}] = [T^{(q)}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{q-1} & \beta_{q-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{q-1} & \alpha_q \end{bmatrix}$$

## 2.3 Lösungsverfahren

---

- Rayleigh-Ritz-Schritt:

- Die Projektion des Eigenwertproblems in den von den Krylow-Vektoren aufgespannten  $q$ -dimensionalen Unterraum ergibt:

$$[T^{(q)}][Z^{(q)}] = [Z^{(q)}][\Lambda^{(q)}]^{-1}$$

- Die Lösung dieses Eigenwertproblems liefert die besten in dem von den Krylow-Vektoren aufgespannten Unterraum enthaltenen Näherungen für die Eigenvektoren.

- Iteration:

- Wenn nicht alle Eigenvektoren die gewünschte Genauigkeit haben, werden weitere Krylow-Vektoren berechnet.

## 2.3 Lösungsverfahren

---

- Ist eine bestimmte Anzahl von Vektoren erreicht oder lassen sich keine weiteren Vektoren mehr berechnen, wird ein neuer Startvektor gewählt.
- Der neue Startvektor wird so gewählt, dass er massenorthogonal auf den bereits konvergierten Eigenvektoren ist.
- Für jede neue Folge von Krylow-Vektoren kann eine Spektralverschiebung  $s$  gewählt werden, d. h. die Vektoren werden mit der Matrix

$$[K_s] = [K] - s[M]$$

berechnet.

- Mithilfe des Trägheitssatzes von Sylvester kann überprüft werden, ob alle Eigenwerte im betrachteten Intervall gefunden wurden (Sturm Sequence Check).

## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Einheiten:
  - Die Einheiten von Steifigkeit und Masse müssen konsistent sein.
  - In der Praxis werden in der Regel folgende Einheiten verwendet:
    - Längeneinheit: mm
    - Krafteinheit: N
    - Elastizitätsmodul: MPa = N/mm<sup>2</sup>
  - Damit ist die Einheit für die Masse eine abgeleitete Einheit.

## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Einheit für die Masse:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot 10^3 \text{ mm}}{\text{s}^2}$$

$$1 \text{ N} = 1000 \frac{\text{kg} \cdot \text{mm}}{\text{s}^2}$$

$$1 \text{ kg} = 10^{-3} \frac{\text{N s}^2}{\text{mm}}$$

- Konsistente Einheiten:

- N, kg, m
- N, t, mm

- Falsch:

- N, kg, mm

$$1 \frac{\text{N s}^2}{\text{mm}} = 1000 \text{ kg} = 1 \text{ t}$$

## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Netzfeinheit:
  - Die finiten Elemente müssen so klein sein, dass die zu berechnenden Eigenfunktionen gut approximiert werden können.
  - Da mit zunehmender Eigenfrequenz die Wellenlänge abnimmt, muss die Vernetzung um so feiner sein, je höher die Eigenfrequenz ist.
  - Bei Verwendung von Elementen mit einem linearen Ansatz sollten mindestens sechs Elemente und bei Elementen mit quadratischem Ansatz mindestens zwei Elemente pro Wellenlänge verwendet werden.

## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Die Qualität der Vernetzung kann anhand der Schwingformen bewertet werden:

Mode 2: 119.881 Hz



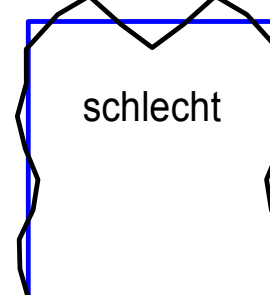
Mode 5: 424.111 Hz



Mode 8: 884.203 Hz



Mode 12: 1307.328 Hz



## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Lokale Schwingungen:
  - Bei komplexen Strukturen, die aus vielen Einzelteilen zusammengebaut sind, treten häufig Schwingungen auf, die nur eines der Einzelteile betreffen.
  - Solche Schwingungen, bei denen sich die Schwingform auf einen kleinen Teilbereich der Struktur beschränkt, werden als lokale Schwingungen bezeichnet.
  - Wenn die Struktur viele ähnliche Einzelteile enthält, gibt es Frequenzintervalle, in denen sehr viele lokale Schwingungen liegen.

## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Beispiele:
  - Streben in Flugzeugrümpfen
  - Schotten in Schiffsrümpfen
- Wenn nur die globalen Grundschwingungen wie z. B. Biegung und Torsion bei Schiffen oder Flugzeugen ermittelt werden sollen, können die lokalen Schwingungen vernachlässigt werden.
- Sie lassen sich vermeiden, wenn die Elemente, die die Struktur modellieren, keine Massendichte haben, sondern ihre Masse anteilig den Anbauteilen zugeschlagen wird, die durch Punktmassen abgebildet werden.

## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Ob die lokalen Schwingungen vernachlässigt werden dürfen, hängt von der Art der Aufgabenstellung ab:
  - Für Flatteruntersuchungen können lokale Schwingungen im Inneren des Flugzeugs vernachlässigt werden.
  - Für akustische Untersuchungen des Innenraums müssen zumindest die lokalen Schwingungen der Anbauteile des Innenraums berücksichtigt werden.
  - Auf die Lebensdauer von Anbauteilen haben ihre lokalen Schwingungen einen großen Einfluss.

## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Masselose Mechanismen:
  - Masselose Mechanismen sind Bewegungsformen, für die die elastische und die kinetische Energie null sind:

$$[x_M]^T [K] [x_M] = 0 \quad \text{und} \quad [x_M]^T [M] [x_M] = 0$$

- Physikalisch können solche Bewegungsformen nicht auftreten. Sie können jedoch durch Modellierungsfehler verursacht werden:
  - Ein falsch angeschlossenes Balkenelement kann um die Balkenachse rotieren.
  - Bei konzentrierten Massenmatrizen ist dieser Rotation meist keine Massenträgheit zugeordnet.

## 2.4 Praktische Hinweise

---

- Auswirkung:

- Für den Rayleigh-Quotient gilt: 
$$R([x_M]) = \frac{[x_M]^T [K] [x_M]}{[x_M]^T [M] [x_M]} = \frac{0}{0} \quad !$$
- Aufgrund von Rundungsfehlern ergibt sich für den Zähler und den Nenner dieses Bruches eine kleine Zahl.
- Je nach Rechengenauigkeit nimmt der Rayleigh-Quotient daher irgendeinen beliebigen Wert an.
- Liegt die zugehörige Frequenz im untersuchten Frequenzbereich, so taucht sie in den Ergebnissen auf.
- Algorithmen, die die Anzahl der Eigenfrequenzen überprüfen, können mit einer Fehlermeldung abbrechen.