

4. Transiente Analyse

- Bei der transienten Analyse wird der zeitliche Verlauf der Antwort auf eine zeitlich veränderliche Last bestimmt.
- Die zu lösende Bewegungsgleichung lautet:

$$[M][\ddot{u}] + [D][\dot{u}] + [K][u] = [l]$$

- Die transiente Analyse wird verwendet, um die Antwort auf eine stoßartige Anregung zu ermitteln.

4. Transiente Analyse

4.1 Direkte transiente Analyse

4.2 Modale transiente Analyse

4.3 Praktische Hinweise

4.1 Direkte transiente Analyse

- Methode:
 - Die Bewegungsgleichung wird mit einem Zeitintegrationsverfahren gelöst.
 - Gebräuchlich sind die Methode der zentralen Differenzen, die Methoden von Houbolt, von Wilson, von Newmark und von Hilber, Hughes und Taylor.
- Vorteile:
 - Es werden keine weiteren Näherungen gemacht.
 - Es muss keine Modalanalyse durchgeführt werden.
 - Es lassen sich auch Nichtlinearitäten berücksichtigen.

4.1 Direkte transiente Analyse

- Nachteile:
 - Wenn die Antwort für einen längeren Zeitabschnitt berechnet werden muss, kann die Berechnung sehr aufwändig werden, und es fallen sehr viele Daten an.
- Einsatz:
 - Bei linearen Systemen wird die direkte transiente Analyse nur zur Kontrolle der modalen transienten Analyse verwendet.

4.1 Direkte transiente Analyse

- Die Methode von Newmark:

- Gegeben sind die Anfangswerte: $[u_L^0] = [u_L(0)]$, $[\dot{u}_L^0] = [\dot{u}_L(0)]$
- Aus der Bewegungsgleichung folgt:

$$[\ddot{u}_L^0] = [M_{LL}]^{-1} \left([l_L^0] - [D_{LL}][\dot{u}_L^0] - [K_{LL}][u_L^0] \right)$$

- Der zu untersuchende Zeitbereich T wird in gleich große Intervalle Δt unterteilt.
- Für die Verschiebungen und Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt t_{n+1} werden die folgenden Ansätze gemacht:

$$[\dot{u}_L^{n+1}] = [\dot{u}_L^n] + \left((1 - \beta)[\ddot{u}_L^n] + \beta[\ddot{u}_L^{n+1}] \right) \Delta t \quad (1)$$

$$[u_L^{n+1}] = [u_L^n] + [\dot{u}_L^n] \Delta t + \left((1/2 - \alpha)[\ddot{u}_L^n] + \alpha[\ddot{u}_L^{n+1}] \right) \Delta t^2 \quad (2)$$

4.1 Direkte transiente Analyse

- α und β sind Parameter, von denen die Genauigkeit und die Stabilität des Verfahrens abhängen.
- Für die Standardwerte $\alpha=0,25$ und $\beta=0,5$ ist das Verfahren unbedingt stabil.
- Als dritte Gleichung zur Bestimmung von Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zum Zeitpunkt t_{n+1} dient die Bewegungsgleichung für den Zeitpunkt t_{n+1} :

$$[M_{LL}][\ddot{u}_L^{n+1}] + [D_{LL}][\dot{u}_L^{n+1}] + [K_{LL}][u_L^{n+1}] = [l_L^{n+1}] \quad (3)$$

- Aus (2) folgt:

$$[\ddot{u}_L^{n+1}] = \frac{[u_L^{n+1}] - [u_L^n]}{\alpha \Delta t^2} - \frac{[\dot{u}_L^n]}{\alpha \Delta t} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) [\ddot{u}_L^n] \quad (2')$$

4.1 Direkte transiente Analyse

- Einsetzen von (2') in (1) ergibt:

$$\left[\dot{u}_L^{n+1} \right] = \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \left(\left[u_L^{n+1} \right] - \left[u_L^n \right] \right) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \left[\dot{u}_L^n \right] + \left(1 - \frac{\beta}{2\alpha} \right) \left[\ddot{u}_L^n \right] \Delta t \quad (1')$$

- Einsetzen von (1') und (2') in (3) führt auf:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[M_{LL} \right] + \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \left[D_{LL} \right] + \left[K_{LL} \right] \right) \left[u_L^{n+1} \right] \\ &= \left[l_L^{n+1} \right] + \left[M_{LL} \right] \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[u_L^n \right] + \frac{1}{\alpha \Delta t} \left[\dot{u}_L^n \right] + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \left[\ddot{u}_L^n \right] \right) \\ & \quad + \left[D_{LL} \right] \left(\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \left[u_L^n \right] + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \left[\dot{u}_L^n \right] + \left(\frac{\beta}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t \left[\ddot{u}_L^n \right] \right) \end{aligned}$$

4.1 Direkte transiente Analyse

- Aus dieser Gleichung können die Verschiebungen $[u_L^{n+1}]$ bestimmt werden.
- Die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen können dann mit (1') und (2') berechnet werden.

4.2 Modale transiente Analyse

- Methode:
 - Die Antwort wird durch eine Überlagerung von Eigenvektoren approximiert. Dabei ist die Anzahl der verwendeten Eigenvektoren klein im Vergleich zur Anzahl der Freiheitsgrade.
- Vorteile:
 - Die zu lösende Bewegungsgleichung ist von wesentlich kleinerer Dimension als bei der direkten transienten Analyse.
 - Im Falle von modaler Dämpfung ergeben sich entkoppelte Bewegungsgleichungen.

4.2 Modale transiente Analyse

- Nachteile:
 - Die Methode liefert eine Näherungslösung der Bewegungsgleichung.
 - Es muss zuerst eine Modalanalyse durchgeführt werden, um die Eigenvektoren und Eigenfrequenzen zu ermitteln.
- Einsatz:
 - Bei linearen Systemen ist die modale transiente Analyse die Standardmethode.

4.2 Modale transiente Analyse

- Modale Reduktion:
 - Die Verschiebungen werden durch eine Überlagerung der ersten p Eigenvektoren approximiert:

$$[u_L(t)] \approx [u_L^p(t)] = \sum_{n=1}^p [x_n] q_n(t) = [X^p] [q^p(t)]$$

- Einsetzen in die Bewegungsgleichung und Projektion auf die Eigenvektoren ergibt:

$$[M]_p [\ddot{q}^p] + [D]_p [\dot{q}^p] + [K]_p [q^p] = [l]_p$$

- Die Gleichungen sind nur über die Dämpfungsmatrix gekoppelt.

4.2 Modale transiente Analyse

- Anzahl der benötigten Eigenvektoren:
 - Zunächst muss eine Fourier-Transformation der Anregung durchgeführt werden.
 - Anhand der Fourier-Transformation wird eine Abschneidefrequenz f_c festgelegt, unterhalb der die wesentlichen Frequenzanteile liegen.
 - Der durch das Abschneiden eingeführte Fehler kann anhand einer inversen Fourier-Transformation der abgeschnittenen Fourier-Transformierten beurteilt werden.
 - Eine andere Möglichkeit besteht darin, mithilfe der Funktion **resample** den Einfluss einer Erniedrigung der Abtastrate zu untersuchen.

4.2 Modale transiente Analyse

- Bei der modalen Reduktion sind im Allgemeinen alle Eigenschwingungen mit $f_n < 3 f_c$ zu berücksichtigen.
- Eine genauere Bewertung kann mithilfe der modalen Formänderungsenergien durchgeführt werden.
- Lösung des gekoppelten Systems:
 - Wenn die Bewegungsgleichungen für die modalen Koeffizienten über die Dämpfung gekoppelt sind, können für die zeitliche Integration die gleichen Verfahren wie bei der direkten transienten Analyse verwendet werden.
 - Durch die modale Reduktion wird jedoch die Größe des zu lösenden Systems erheblich reduziert.

4.2 Modale transiente Analyse

- Lösung der entkoppelten Gleichungen:
 - Bei modaler Dämpfung sind die Gleichungen für die modalen Koeffizienten entkoppelt:

$$\ddot{q}_n + 2 D_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = [x_n]^T [l_L], \quad n = 1, \dots, p$$

- Die Lösung ergibt sich durch Faltung mit der Impulsantwortfunktion:

$$q_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau) [x_n]^T [l_L(t - \tau)] d\tau$$

$$\text{mit } h_n(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau < 0 \\ \frac{1}{\omega_{dn}} e^{-\delta_n \tau} \sin(\omega_{dn} \tau) & \text{für } \tau \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{aligned} \delta_n &= \omega_n D_n \\ \omega_{dn} &= \omega_n \sqrt{1 - D_n^2} \end{aligned}$$

4.2 Modale transiente Analyse

- Wenn das Integral numerisch berechnet wird, muss für den Zeitschritt gelten:

$$\Delta t < \frac{1}{6 f_p}$$

- Die so berechnete Lösung gehört zu homogenen Anfangsbedingungen, d. h. Verschiebungen und Geschwindigkeiten sind am Anfang null.
- Wenn die Anfangsbedingungen nicht homogen sind, muss eine geeignete Kombination von Lösungen der homogenen Gleichung überlagert werden.

4.2 Modale transiente Analyse

- Restmodekorrektur:
 - Wie bei der Frequenzganganalyse lässt sich die Genauigkeit der modalen Reduktion durch eine Restmodekorrektor verbessern.
 - Für zeitlich veränderliche Lasten der Form

$$[l(t)] = \sum_k [l_k] \phi_k(t)$$

lautet die Korrektur $[u_L^s(t)] = \sum_k [u_{Lk}^s] \phi_k(t)$

mit $[u_{Lk}^s] = [K_{LL}]^{-1} \left([l_{Lk}] - [M_{LL}] [X^p] [X^p]^T [l_{Lk}] \right)$

4.3 Praktische Hinweise

- Netzfeinheit:
 - Sowohl bei der direkten als auch bei der modalen transienten Analyse muss der p -te Eigenvektor durch die Vernetzung abgebildet werden können.
 - Die Anzahl p der benötigten Eigenvektoren kann mithilfe der modalen Formänderungsenergien ermittelt werden.
- Zeitschritt:
 - Der Zeitschritt muss so klein gewählt werden, dass das Verhalten der höchsten berücksichtigten Eigenschwingung wiedergegeben werden kann:
$$\Delta t < \frac{T_{min}}{6} = \frac{1}{6 f_p}$$
 - Außerdem muss der Verlauf der Last wiedergegeben werden können.

4.3 Praktische Hinweise

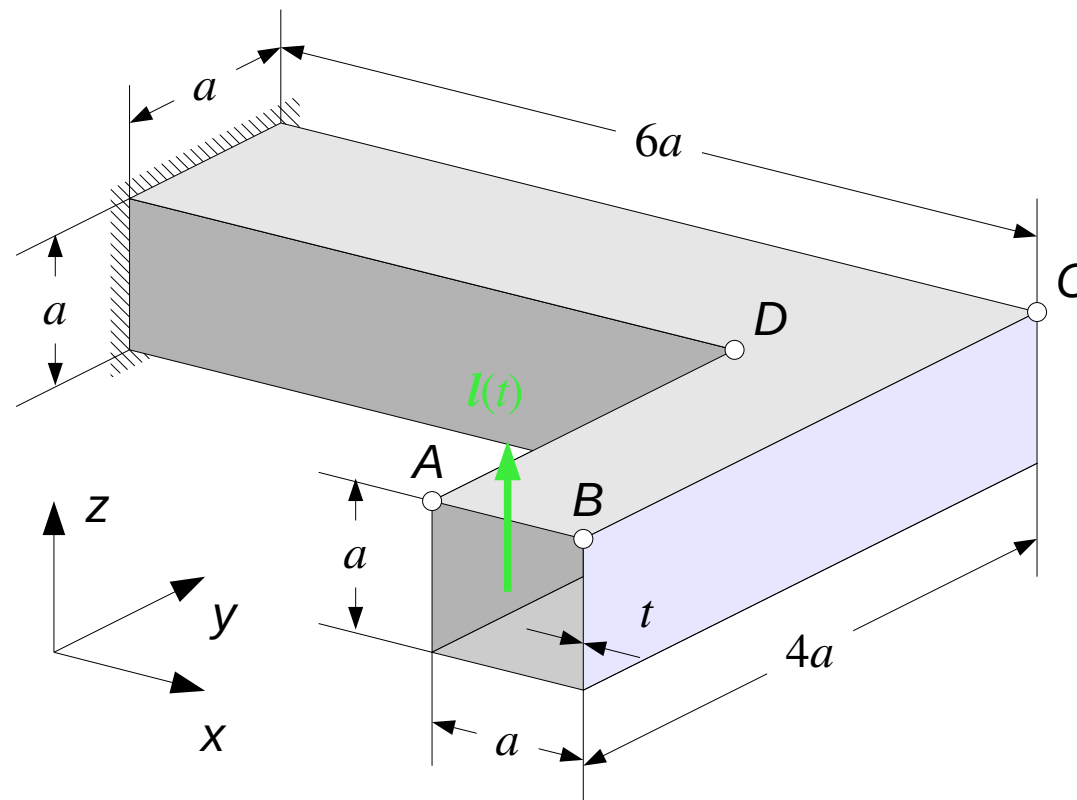
- Simulationsdauer:
 - Die Simulationsdauer sollte so lange gewählt werden, dass alle wesentlichen Effekte erfasst werden.
 - Ausschlaggebend dafür ist die Periode der ersten Eigenschwingung.
 - Als Richtwert gilt: $t_s = t_l + n T_1$ mit n zwischen 3 und 7
 - Dabei ist t_l die Dauer, während der die Last wirkt, und

$$T_1 = 1 / f_1$$

die Periode der ersten Eigenschwingung.

4.3 Praktische Hinweise

- Beispiel:



4.3 Praktische Hinweise

- Der abgebildete Winkelträger mit einem dünnwandigen Kastenprofil wird am freien Ende durch eine mittig angreifende Einzelkraft belastet.
- Die Kraft wird statisch äquivalent auf die Knoten am freien Ende verteilt.
- Daten:
 - $a = 50 \text{ mm}$, $t = 2 \text{ mm}$
 - $E = 210000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
 - Rayleigh-Dämpfung: $\alpha_K = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, $\alpha_M = 175 \text{ s}^{-1}$
- Ergebnisse:
 - Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in vertikaler Richtung an den Punkten A , B , C und D .

4.3 Praktische Hinweise

- Belastung:

- Für die am freien Ende angreifende Kraft gilt $l(t) = l_0 \phi(t)$

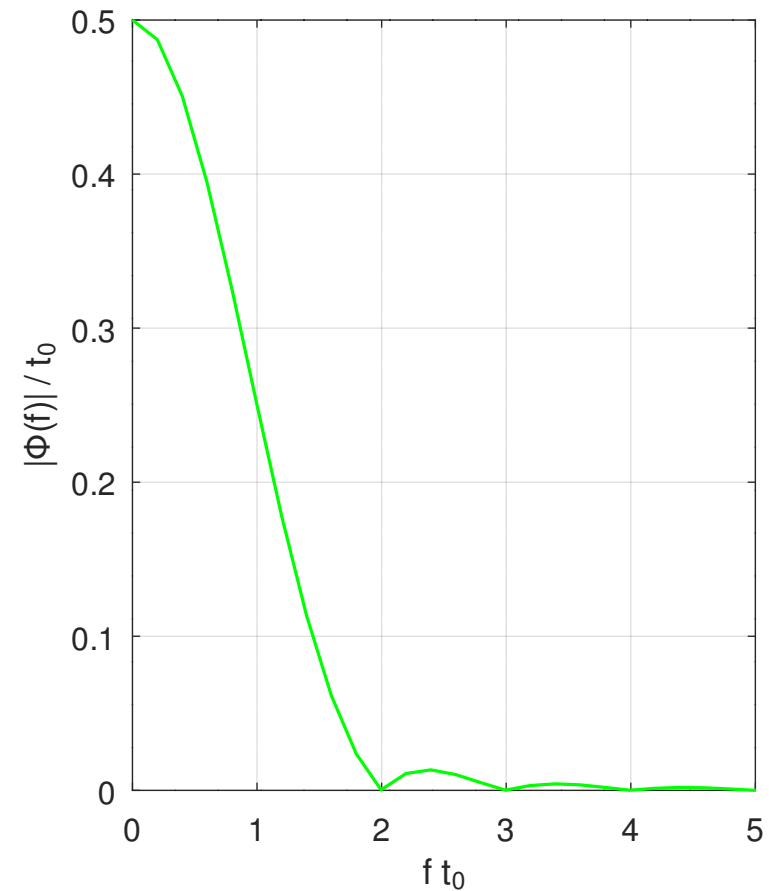
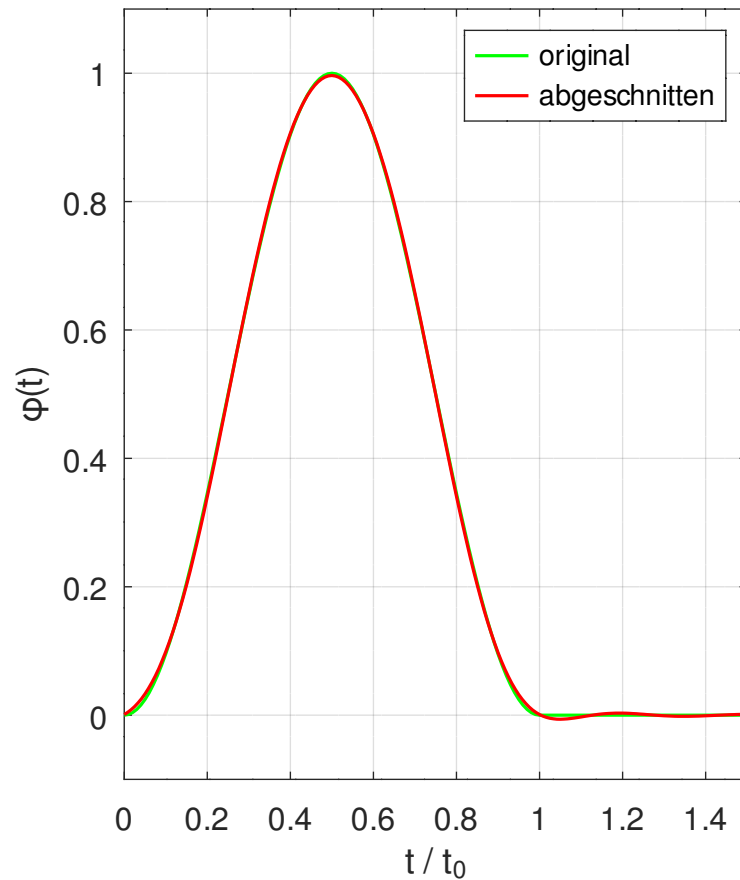
$$\text{mit } \phi(t) = \begin{cases} \sin^2\left(\pi \frac{t}{t_0}\right), & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}, \quad \begin{matrix} l_0 = 10 \text{ N} \\ t_0 = 2 \text{ ms} \end{matrix}$$

- Aus der Fourier-Transformation ergibt sich für die Abschneidefrequenz:

$$f_c t_0 = 3 \rightarrow f_c = \frac{3}{t_0} = 1500 \text{ Hz}$$

- Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen $\phi(t)$ und der zurücktransformierten abgeschnittenen Fourier-Transformierten.

4.3 Praktische Hinweise



4.3 Praktische Hinweise

- Modale Reduktion:
 - Aus der Abschneidefrequenz folgt für die Frequenz der höchsten zu berücksichtigenden Eigenschwingung:
 $f_p > 4500 \text{ Hz}$
 - Die Fehleranalyse anhand der modalen Formänderungsenergien zeigt, dass bereits 15 Eigenschwingungen ausreichend sind.
 - Die Frequenz der höchsten berechneten Eigenschwingung beträgt 2766 Hz.
 - Der maximale relative Fehler in der Formänderungsenergie beträgt 0,73 % bei Rechnung mit Restmodekorrektur und 1,45 % bei Rechnung ohne Restmodekorrektur.

4.3 Praktische Hinweise

Modal strain energies of component "beam"

Loadcase 1:

mode	frequency	En/ES	Sum	1 - Sum
1	265.54 Hz	9.09923e-01	0.909923	9.00766e-02
2	347.78 Hz	4.92775e-26	0.909923	9.00766e-02
3	666.35 Hz	7.19637e-02	0.981887	1.81129e-02
4	925.15 Hz	1.91113e-27	0.981887	1.81129e-02
5	1282.17 Hz	2.30743e-03	0.984195	1.58055e-02
6	1494.56 Hz	5.17175e-04	0.984712	1.52883e-02
7	2003.13 Hz	2.32678e-29	0.984712	1.52883e-02
8	2054.29 Hz	2.62658e-28	0.984712	1.52883e-02
9	2232.60 Hz	6.73171e-04	0.985385	1.46152e-02
10	2277.44 Hz	8.93657e-27	0.985385	1.46152e-02
11	2334.32 Hz	5.82382e-28	0.985385	1.46152e-02
12	2523.04 Hz	9.18722e-29	0.985385	1.46152e-02
13	2599.26 Hz	1.45334e-28	0.985385	1.46152e-02
14	2760.60 Hz	1.95042e-04	0.985580	1.44201e-02
15	2766.36 Hz	7.89971e-26	0.985580	1.44201e-02

Upper bound on relative strain energy error (fmax = 1500.00 Hz)

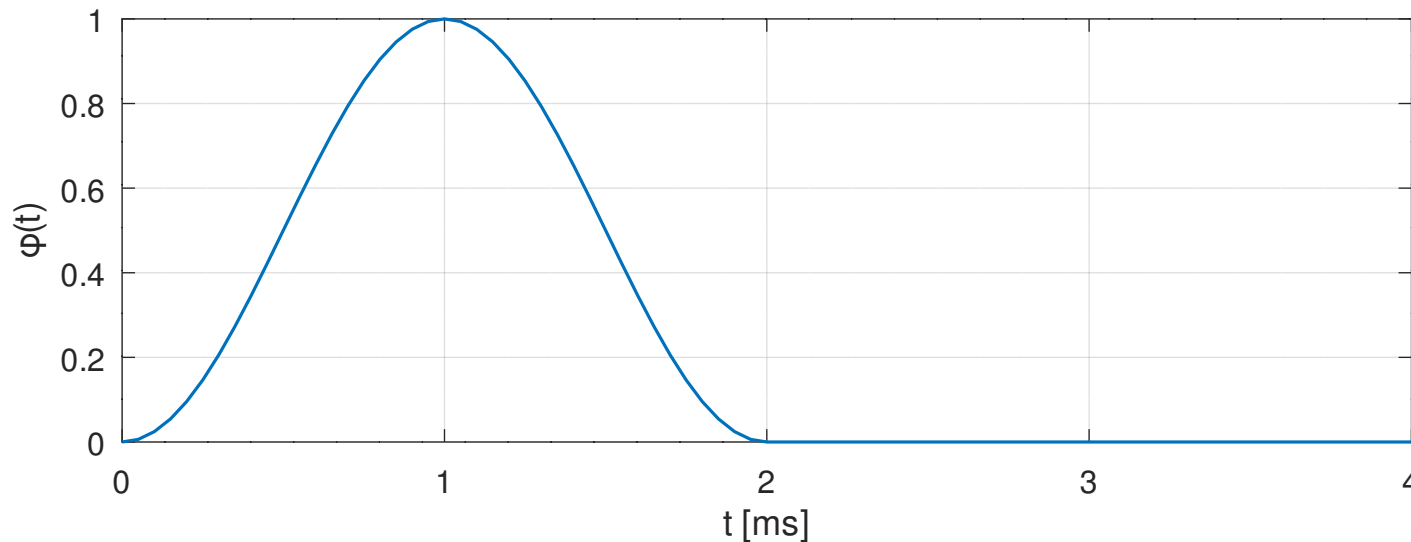
with static correction: 7.2558e-03

without static correction: 1.4466e-02

4.3 Praktische Hinweise

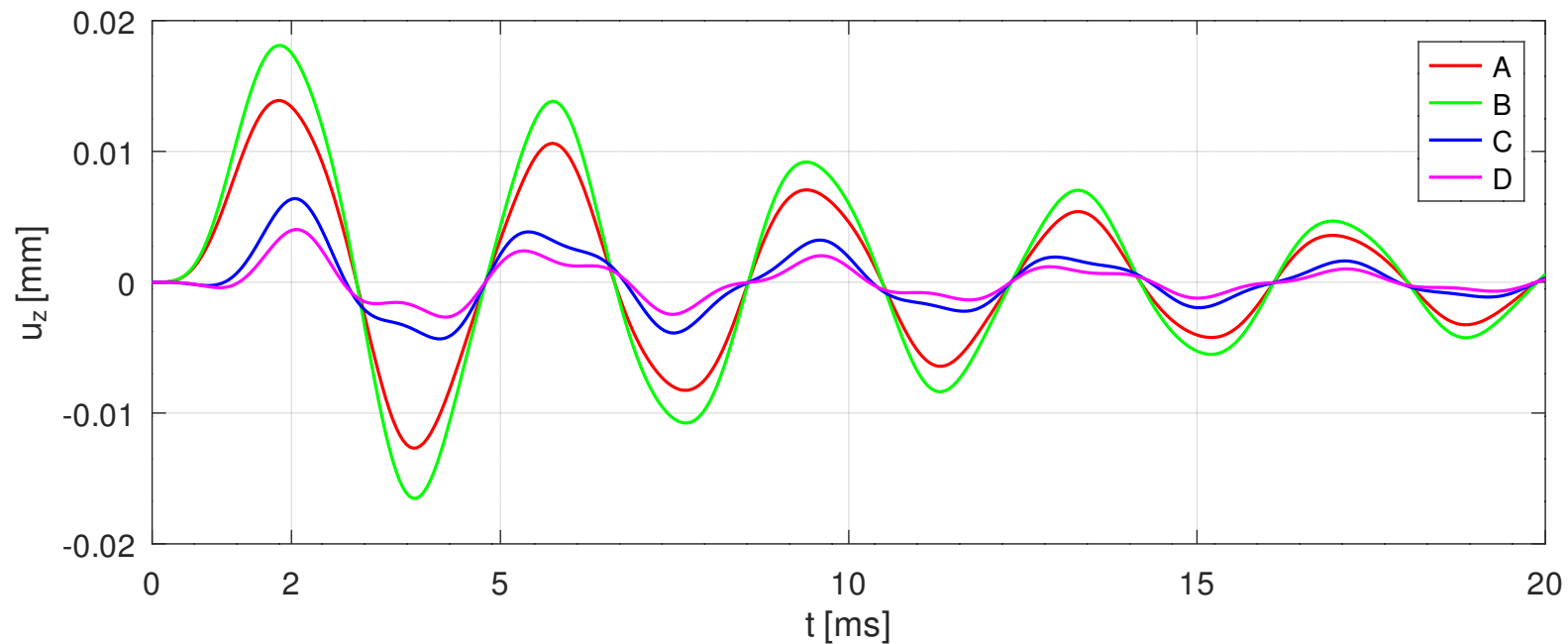
- Zeitschritt:

- Für den Zeitschritt folgt: $\Delta t < \frac{1}{6 f_p} = \frac{1}{6 \cdot 2766 \text{ s}^{-1}} = 6,03 \cdot 10^{-5} \text{ s}$
- Verwendet wird ein Zeitschritt von 0,05 ms.
- Damit ergeben sich 40 Zeitschritte für die Dauer der Belastung. Damit wird auch die Belastung gut erfasst.



4.3 Praktische Hinweise

- Simulationsdauer:
 - Mit $f_1 = 265,5$ Hz und gewähltem $n = 5$ folgt für die Simulationsdauer: $t_s = t_0 + 5/f_1 = 0,002\text{ s} + 5/265,5\text{ s} \approx 0,02\text{ s} = 20\text{ ms}$
- Ergebnisse:



4.3 Praktische Hinweise

