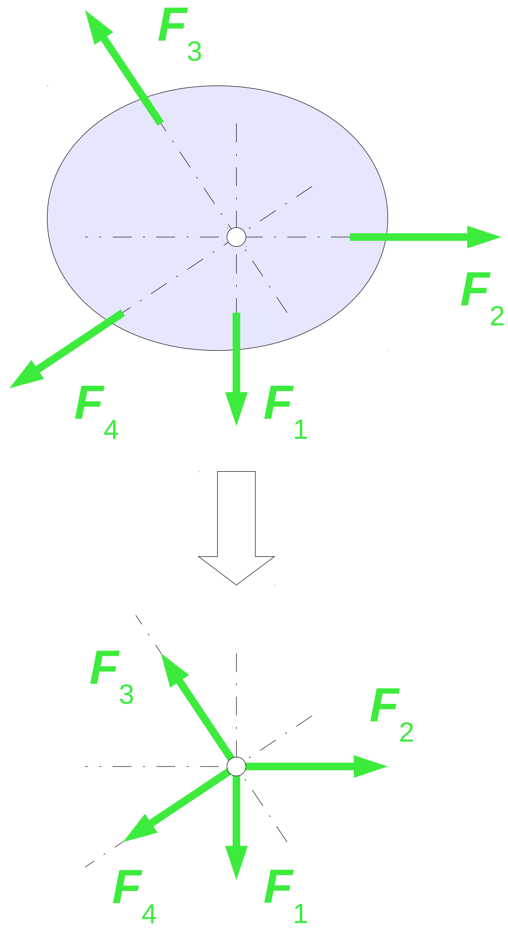
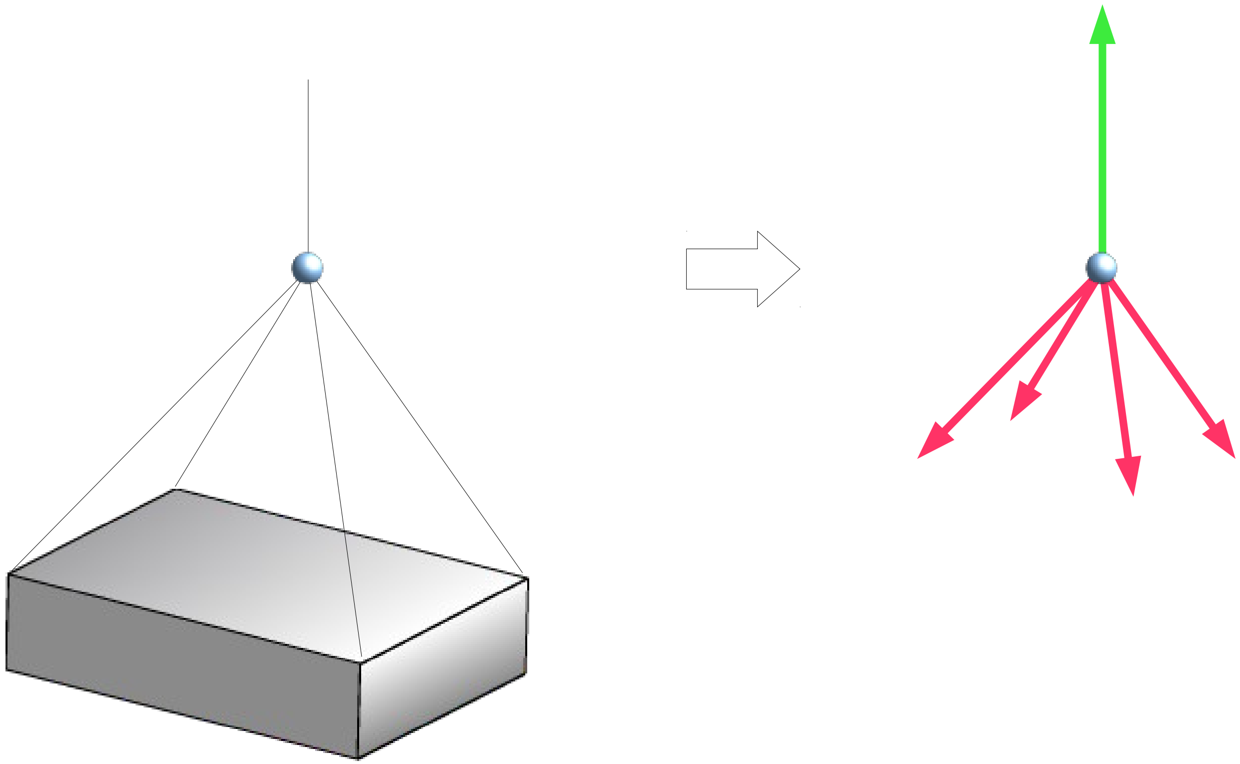
2. Zentrale Kraftsysteme

- Definition:
  - Ein Kraftsystem, bei dem sich die Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden, wird als zentrales Kraftsystem bezeichnet.
  - Die Kräfte dürfen entlang ihrer Wirkungslinie in den gemeinsamen Angriffspunkt verschoben werden.



2. Zentrale Kraftsysteme

- Beispiel:



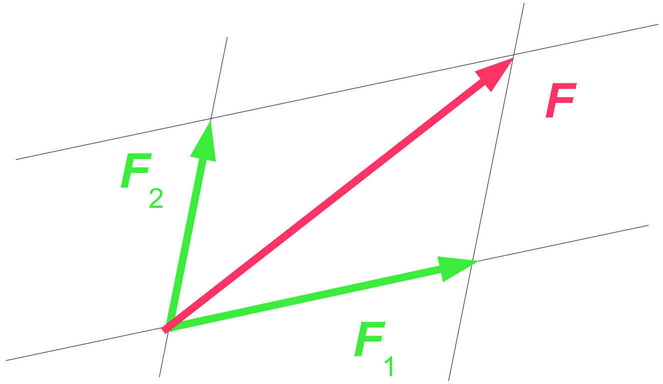
2. Zentrale Kraftsysteme

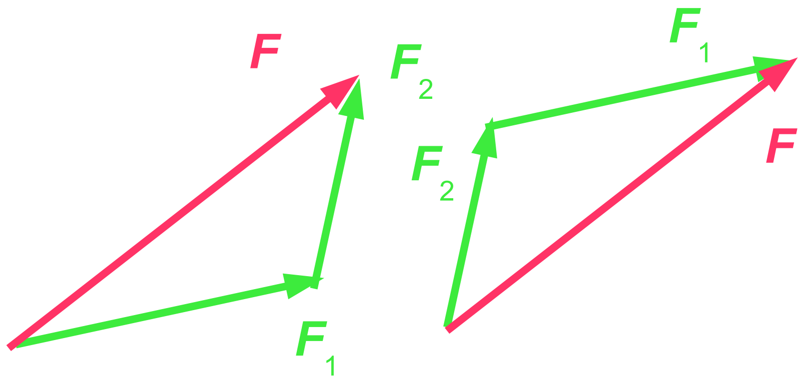
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Addition zweier Kräfte:
  - Die resultierende Kraft hat die gleiche Wirkung wie die beiden Einzelkräfte.
  - Die Addition erfolgt nach der Parallelogrammregel:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

  - Aneinanderfügen der Kraftpfeile führt zum gleichen Ergebnis.



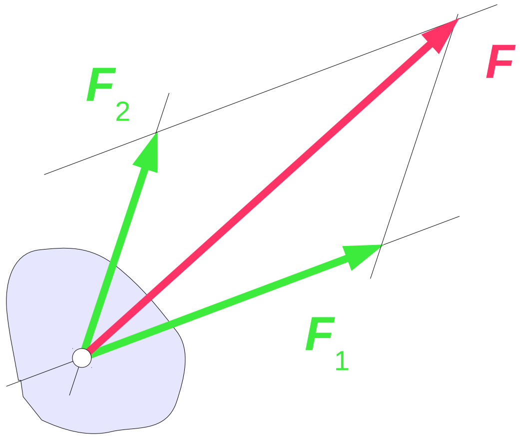


2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

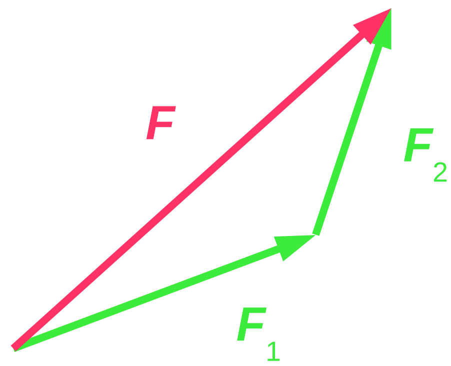
- Kraftvektoren:
  - Pfeile, für die eine Addition nach der Parallelogrammregel definiert ist, erfüllen die Rechengesetze für Vektoren.
  - Kräfte sind Vektoren, die entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden dürfen.
  - Sie werden daher als *linienflüchtige Vektoren* bezeichnet.

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Lageplan:
  - Im Lageplan werden die Kräfte so eingezeichnet, wie sie am Körper angreifen:

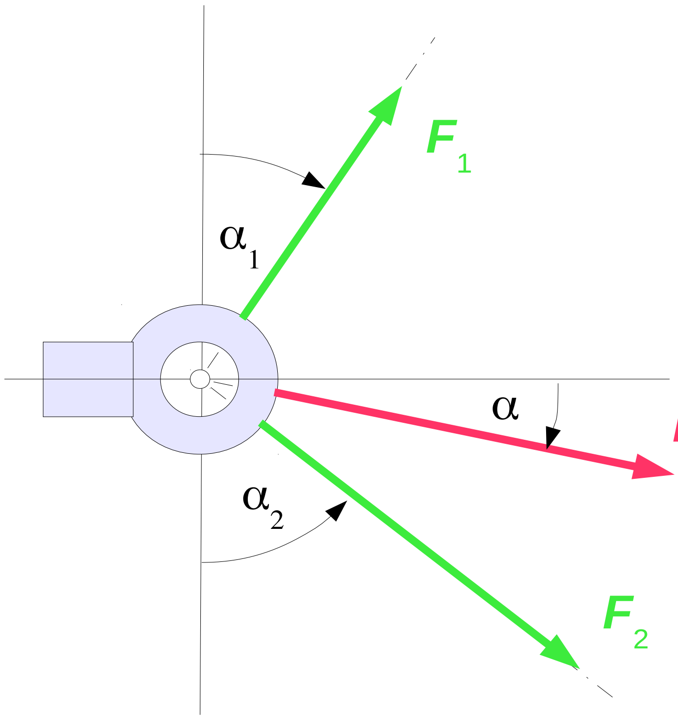


- Kräfteplan:
  - Im Kräfteplan werden die Kräfte zum Kräftepolygon zusammengesetzt:



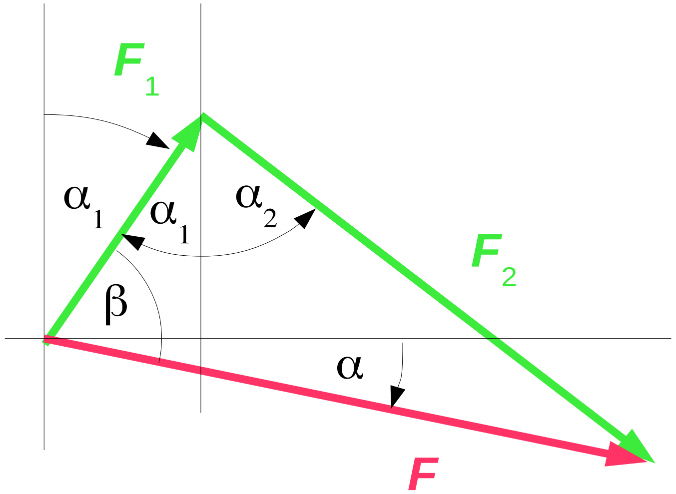
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Beispiel: Öse
  - Gegeben:
    - $F_1 = 250\ \mathrm{N},\ \alpha_1 = 30^\circ$
    - $F_2 = 375\ \mathrm{N},\ \alpha_2 = 45^\circ$
  - Gesucht:
    - Resultierende Kraft F, α
  - Lageplan:



2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Kräfteplan:



$$\beta = 90° - \alpha_1 + \alpha$$

- Kosinussatz:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\,F_1 F_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

- Sinussatz:

$$\frac{\sin(90° - \alpha_1 + \alpha)}{F_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{F}$$

$$\rightarrow \quad \cos(\alpha_1 - \alpha) = \frac{F_2}{F} \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Zahlenwerte:

$$F^2 = 250^2\,\mathrm{N}^2 + 375^2\,\mathrm{N}^2 - 2 \cdot 250\,\mathrm{N} \cdot 375\,\mathrm{N}\cos\left(75°\right) = 154600\,\mathrm{N}^2$$

➔ $F = \underline{393{,}2\,\mathrm{N}}$

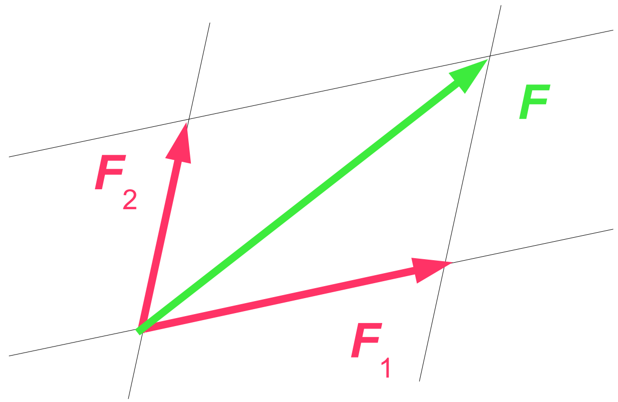
$$\cos\left(30° - \alpha\right) = \frac{375}{393{,}2}\sin\left(75°\right) = 0{,}9212$$

➔ $30° - \alpha = 22{,}90°$

➔ $\alpha = 30° - 22{,}90° = \underline{7{,}100°}$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Zerlegung von Kräften:
  - Eine Kraft kann eindeutig in ihre Komponenten entlang von zwei vorgegebenen Wirkungslinien zerlegt werden.

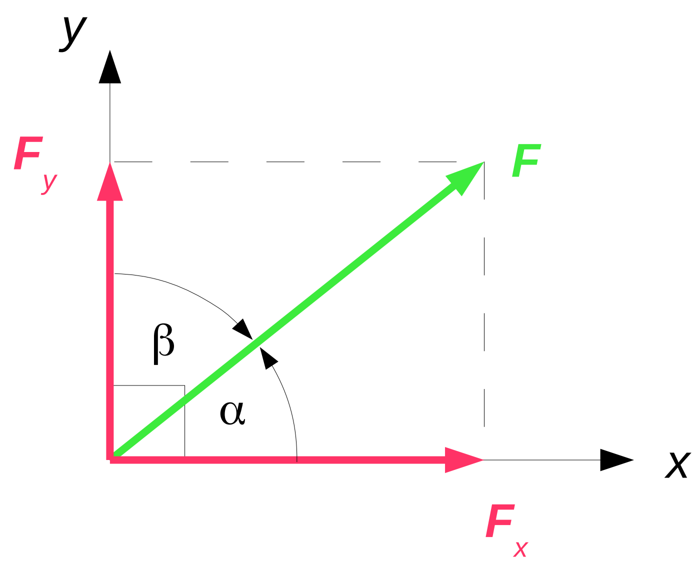


- Kartesische Komponenten:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

$$F_x = F\cos(\alpha) = F\sin(\beta)$$
$$F_y = F\sin(\alpha) = F\cos(\beta)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \tan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x}$$

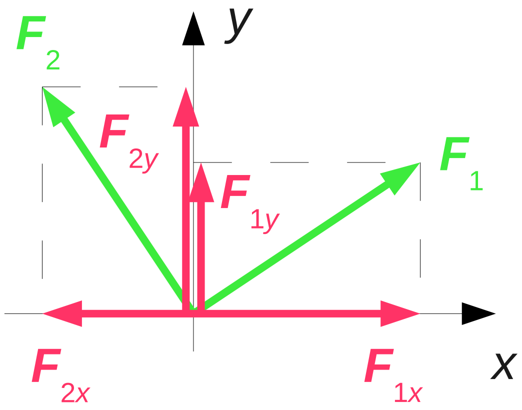


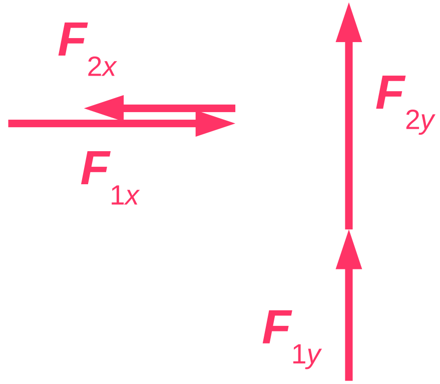
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Addition in Komponenten:
  - Die Kräfte werden in ihre Komponenten zerlegt.
  - Die Komponenten werden nach dem Kräfteplan addiert.
  - Für die Beträge der Komponenten gilt:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}, \quad F_y = F_{1y} + F_{2y}$$

  - Dabei werden Komponenten in Koordinatenrichtung positiv und Komponenten entgegen der Koordinatenrichtung negativ gezählt.

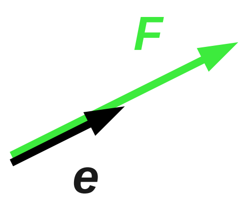




2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Einheitsvektoren:
  - Ein Einheitsvektor $\vec{e}$ ist ein Vektor der Länge eins.
  - Jeder Vektor $\vec{F}$ lässt sich schreiben als Produkt seines Betrags mit einem Einheitsvektor, der seine Richtung angibt:

$$\vec{F} = F\,\vec{e}$$

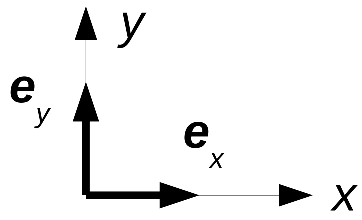


- In einem kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

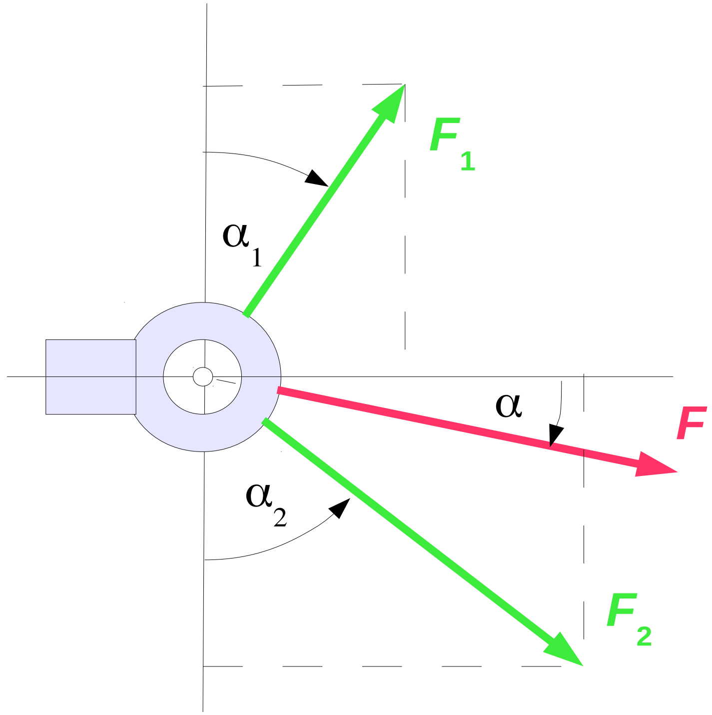
- Oft wird dafür die Matrix-Schreibweise verwendet:

$$[\vec{F}] = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$



2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Beispiel: Öse
  - Gegeben:
    - $F_1 = 250\ \mathrm{N},\ \alpha_1 = 30^\circ$
    - $F_2 = 375\ \mathrm{N},\ \alpha_2 = 45^\circ$
  - Gesucht:
    - Resultierende Kraft F, α

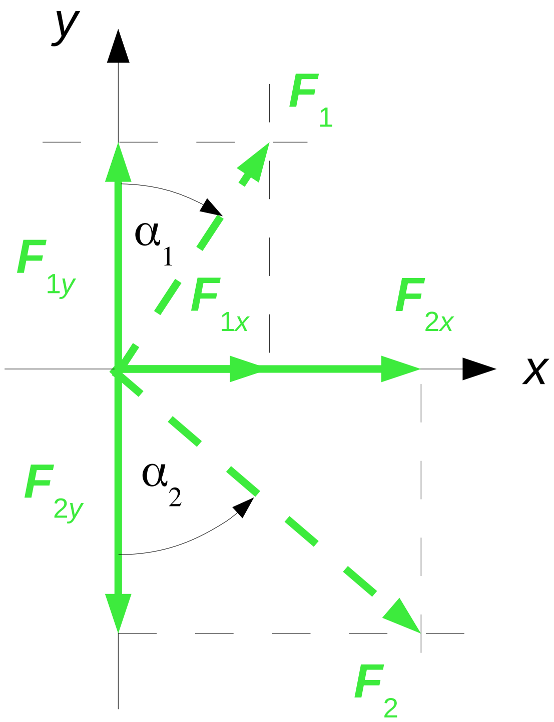


2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Zerlegung der Kräfte in ihre Komponenten:

$$F_{1x} = F_1 \sin(\alpha_1)$$
$$F_{1y} = F_1 \cos(\alpha_1)$$

$$F_{2x} = F_2 \sin(\alpha_2)$$
$$F_{2y} = -F_2 \cos(\alpha_2)$$



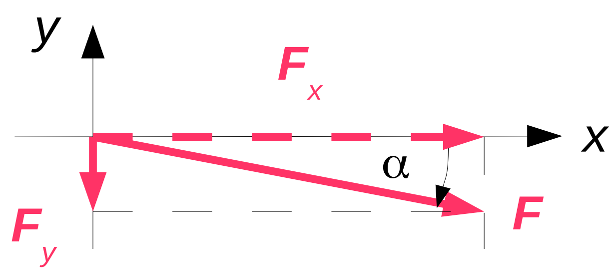
- Resultierende Kraft:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= 250\,\mathrm{N} \cdot \sin(30°) &= 125{,}0\,\mathrm{N} \\ F_{2x} &= 375\,\mathrm{N} \cdot \sin(45°) &= 265{,}2\,\mathrm{N} \\ F_x & &= 390{,}2\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

$$F_{1y} = 250\,\mathrm{N} \cdot \cos(30°) = 216{,}5\,\mathrm{N}$$
$$F_{2y} = -375\,\mathrm{N} \cdot \cos(45°) = -265{,}2\,\mathrm{N}$$
$$F_{y} = -48{,}7\,\mathrm{N}$$

- Betrag und Richtung:



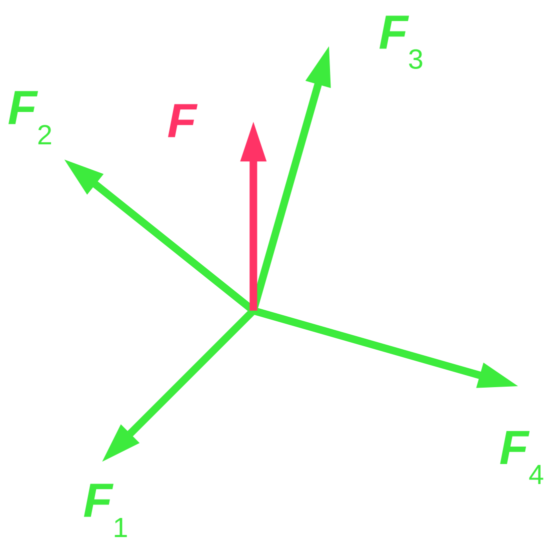
$$F = \sqrt{390{,}2^2 + 48{,}7^2}\,\mathrm{N} = \underline{393{,}2\,\mathrm{N}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-48{,}7}{390{,}2} = -0{,}1248 \;\rightarrow\; \alpha = \underline{-7{,}114°}$$

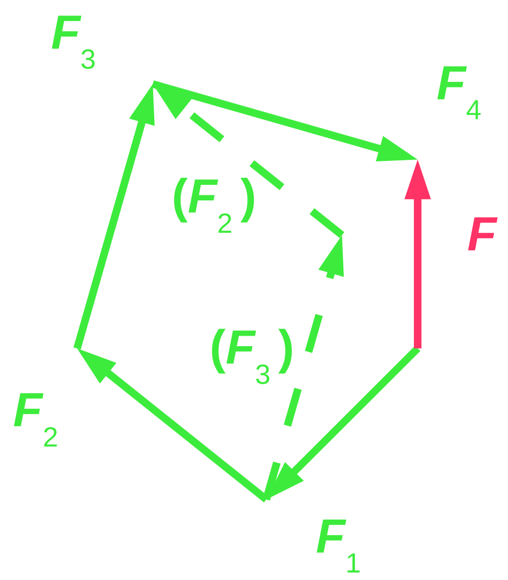
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Addition mehrerer Kräfte:
  - Zeichnerische Lösung:

Lageplan



Kräfteplan



  - Die Reihenfolge der Addition ist beliebig.

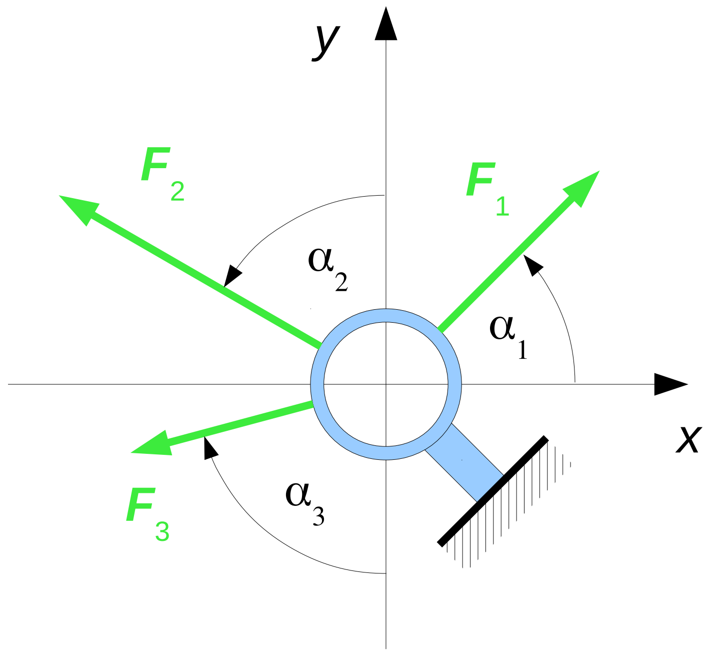
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Rechnerische Lösung:
  - Zerlegung der Einzelkräfte in *x*- und *y*-Komponenten
  - (skalare) Addition der einzelnen Komponenten
  - (vektorielle) Addition der Gesamtkomponenten

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \sum_n F_{nx} \\ F_y &= \sum_n F_{ny} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Beispiel: Öse
  - Gegeben:
    - $F_1 = 600$ N, $\alpha_1 = 45°$
    - $F_2 = 800$ N, $\alpha_2 = 60°$
    - $F_3 = 450$ N, $\alpha_3 = 75°$
  - Gesucht:
    - Betrag F und Richtung α der resultierenden Kraft



2.1 Zentrale Kraftsystem in der Ebene

- Lösung:

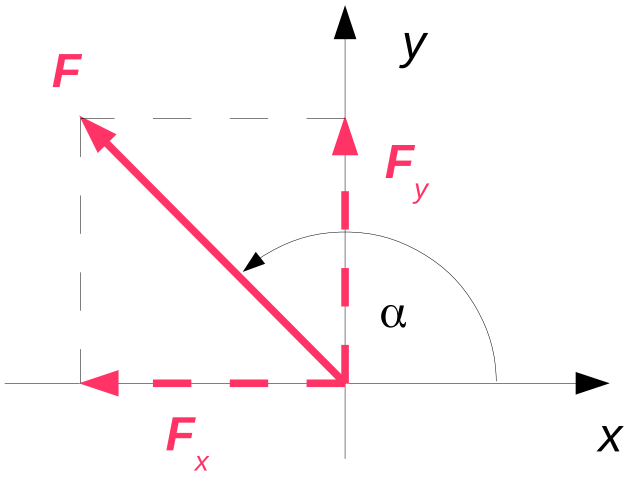
$$
\begin{aligned}
F_{1x} &= F_1 \cos(\alpha_1) &&= 600\,\mathrm{N} \cdot \cos(45\,°) &&= 424{,}3\,\mathrm{N} \\
F_{2x} &= -F_2 \sin(\alpha_2) &&= -800\,\mathrm{N} \cdot \sin(60\,°) &&= -692{,}8\,\mathrm{N} \\
F_{3x} &= -F_3 \sin(\alpha_3) &&= -450\,\mathrm{N} \cdot \sin(75\,°) &&= -434{,}7\,\mathrm{N} \\
F_x & && &&= \underline{-703{,}2\,\mathrm{N}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{1y} &= F_1 \sin(\alpha_1) &&= 600\,\mathrm{N} \cdot \sin(45\,°) &&= 424{,}3\,\mathrm{N} \\
F_{2y} &= F_2 \cos(\alpha_2) &&= 800\,\mathrm{N} \cdot \cos(60\,°) &&= 400{,}0\,\mathrm{N} \\
F_{3y} &= -F_3 \cos(\alpha_3) &&= -450\,\mathrm{N} \cdot \cos(75\,°) &&= -116{,}5\,\mathrm{N} \\
F_y & && &&= \underline{707{,}8\,\mathrm{N}}
\end{aligned}
$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{703{,}2^2 + 707{,}8^2}\,\mathrm{N} = \underline{997{,}7\,\mathrm{N}}$$

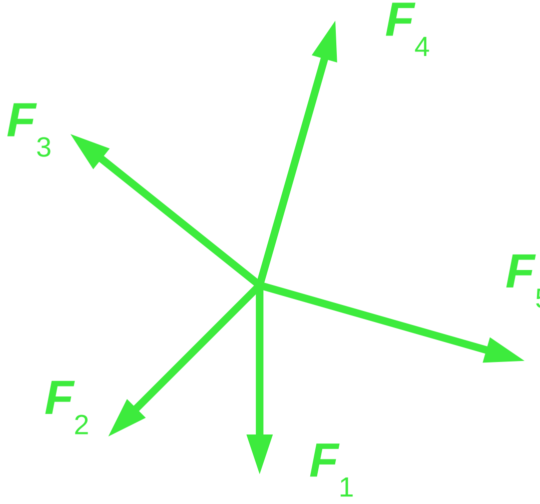
$$\tan(\alpha) = \frac{F_y}{F_x} = \frac{707{,}8}{-703{,}2} = -1{,}006 \;\rightarrow\; \alpha = -45{,}18° + 180° = \underline{134{,}8°}$$



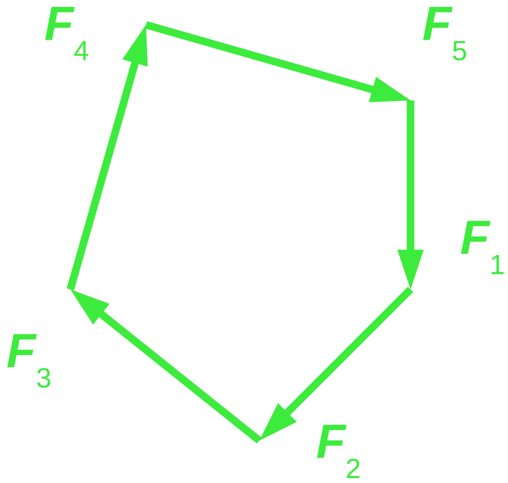
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Gleichgewichtsbedingung:
  - Ein zentrales Kraftsystem ist im Gleichgewicht, wenn die Vektorsumme aller Kräfte null ist.

Lageplan:



Kräfteplan:

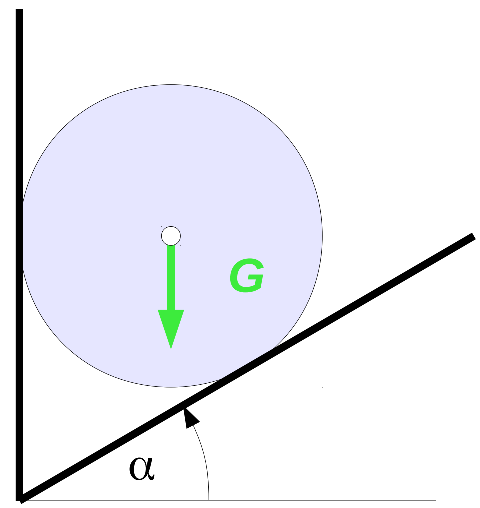


$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad :$$

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

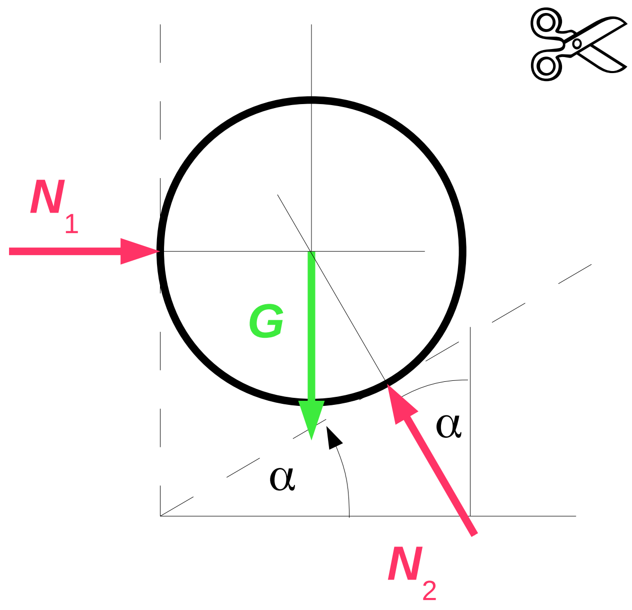
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Beispiel:
  - Eine Kugel liegt auf einer glatten schiefen Ebene und wird von einer glatten Wand gehalten.
  - Gegeben:
    - Gewicht $G = 100\ \mathrm{N}$
    - Winkel $\alpha = 20°$
  - Gesucht:
    - Kräfte zwischen Kugel und Wänden



2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

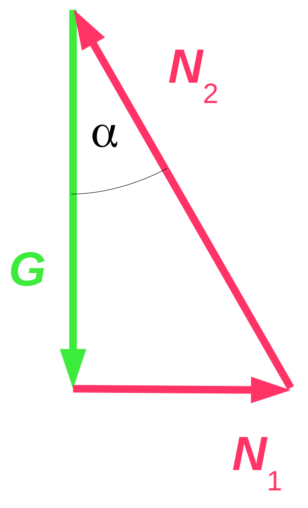
- Schritt 1: Freischneiden der Kugel
  - Die Wände werden entfernt.
  - Die Kräfte, die die Wände auf die Kugel ausüben, werden als unbekannte Kräfte eingetragen.



Die Kraft, die eine glatte Wand auf einen Körper ausübt, ist senkrecht zur Wand.

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Schritt 2: Gleichgewichtsbedingung
  - Die unbekannten Kräfte werden so bestimmt, dass die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist.
  - Mit Kräfteplan:

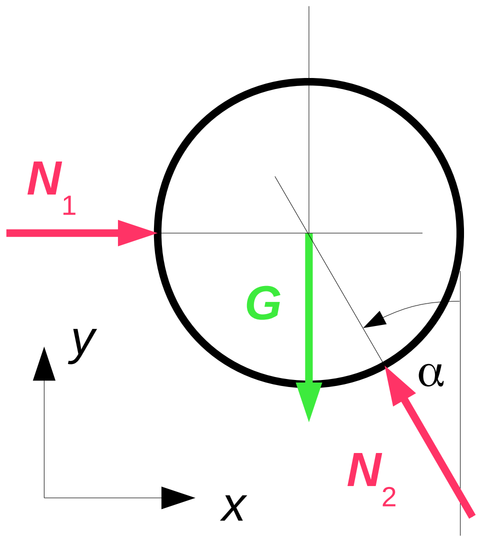


$$G = N_2 \cos(\alpha) \rightarrow N_2 = \frac{G}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{N_1}{G} = \tan(\alpha) \rightarrow N_1 = G \tan(\alpha)$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- In Komponenten:



$$\sum F_y = 0 \quad : \quad -G + N_2 \cos(\alpha) = 0$$
$$\rightarrow \quad N_2 = \frac{G}{\cos(\alpha)}$$

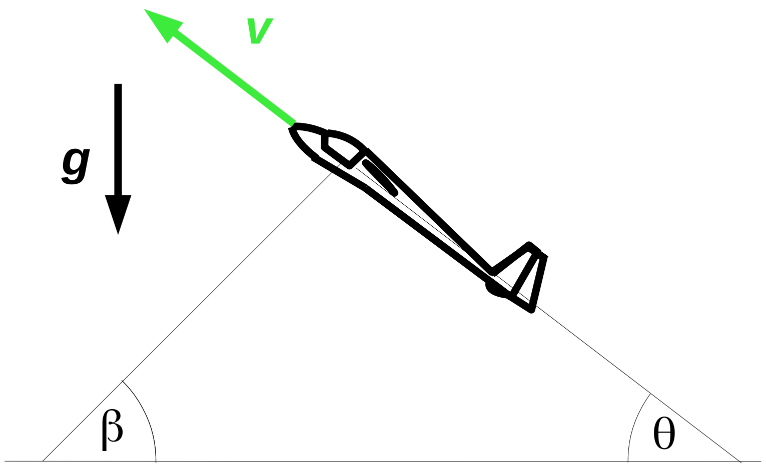
$$\sum F_x = 0 \quad : \quad N_1 - N_2 \sin(\alpha) = 0$$
$$\rightarrow \quad N_1 = G \tan(\alpha)$$

- Zahlenwerte: $N_2 = \frac{100\,\mathrm{N}}{\cos(20°)} = \frac{100\,\mathrm{N}}{0{,}9397} = \underline{106{,}4\,\mathrm{N}}$

$$N_1 = 100\,\mathrm{N} \cdot \tan(20°) = 100\,\mathrm{N} \cdot 0{,}3640 = \underline{36{,}4\,\mathrm{N}}$$

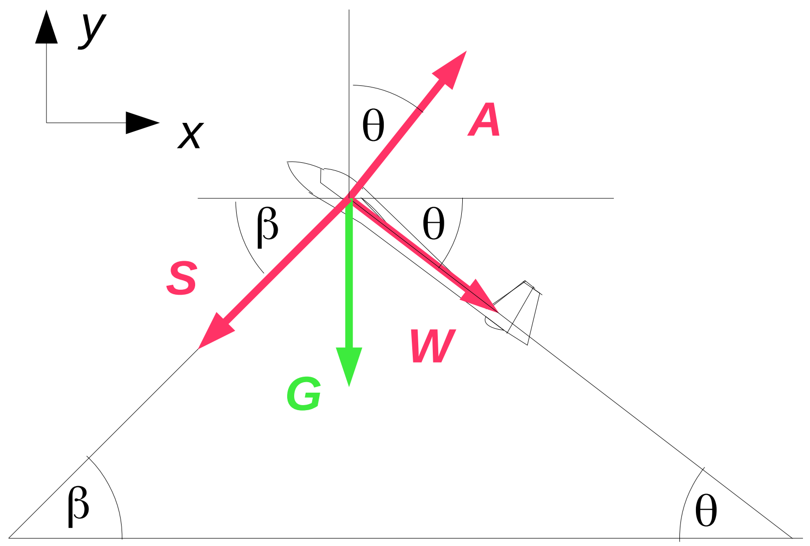
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Beispiel: Windenstart
  - Gegeben:
    - Flugzeuggewicht G
    - Seilwinkel β
    - Bahnwinkel θ
  - Gesucht:
    - Anstellwinkel α
    - Seilkraft S
    - Auftriebskraft A
    - Luftwiderstand W



2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Freischnitt:
  - Die Auftriebskraft steht senkrecht auf der Flugbahn.
  - Die Luftwiderstandskraft wirkt tangential zur Flugbahn.



- Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \quad : \quad -S\cos(\beta) + W\cos(\theta) + A\sin(\theta) = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad -S\sin(\beta) - W\sin(\theta) + A\cos(\theta) - G = 0 \qquad (2)$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen kann zunächst die Seilkraft S eliminiert werden:

$$(1)\sin(\beta)-(2)\cos(\beta)\quad:$$

$$W\left(\cos(\theta)\sin(\beta)+\sin(\theta)\cos(\beta)\right)$$
$$+A\left(\sin(\theta)\sin(\beta)-\cos(\theta)\cos(\beta)\right)+G\cos(\beta)=0$$

- Mit den Additionstheoremen der Winkelfunktionen

$$\sin(\beta+\theta)=\sin(\beta)\cos(\theta)+\cos(\beta)\sin(\theta)$$
$$\cos(\beta+\theta)=\cos(\beta)\cos(\theta)-\sin(\beta)\sin(\theta)$$

folgt daraus:

$$W\sin(\beta+\theta)-A\cos(\beta+\theta)+G\cos(\beta)=0\qquad(3)$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Die Aerodynamik liefert einen Zusammenhang zwischen den Luftkräften und dem Anstellwinkel α.
- Bei geeigneter Wahl der Bezugsrichtung für den Anstellwinkel gilt für kleine Anstellwinkel mit guter Näherung:

$$A(\alpha) = A_\alpha \alpha, \quad W(\alpha) = W_0 + k A^2 = W_0 + k A_\alpha^2 \alpha^2$$

- Dabei sind A_α, W_0 und k Konstanten, die von der Fluggeschwindigkeit abhängen, und der Anstellwinkel ist im Bogenmaß einzusetzen.
- Einsetzen in (3) ergibt eine quadratische Gleichung für α:

$$\alpha^2 k A_\alpha^2 \sin(\beta+\theta) - \alpha A_\alpha \cos(\beta+\theta) + W_0 \sin(\beta+\theta) + G \cos(\beta) = 0$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Typische Zahlenwerte für ein Standardklasse-Segelflugzeug bei $110\ \mathrm{km/h}$:
  - Gewicht: $G = 3200\ \mathrm{N}$
  - Aerodynamische Parameter:
    $A_\alpha = 40500\ \mathrm{N}$, $W_0 = 65\ \mathrm{N}$, $k = 2{,}6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}^{-1}$
  - Winkel: $\theta = 40°$, $\beta = 30°$
  - Koeffizienten der quadratischen Gleichung:

$$a = k A_\alpha^2 \sin(\beta+\theta) = 2{,}6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}^{-1} \cdot 40500^2\,\mathrm{N}^2 \cdot \sin(70°) = 4007\,\mathrm{N}$$

$$b = -A_\alpha \cos(\beta+\theta) = -40500\,\mathrm{N} \cdot \cos(70°) = -13850\,\mathrm{N}$$

$$c = W_0 \sin(\beta+\theta) + G\cos(\beta) = 65\,\mathrm{N} \cdot \sin(70°) + 3200\,\mathrm{N} \cdot \cos(30°)$$
$$= 2832\,\mathrm{N}$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Anstellwinkel:

$$\alpha_{1/2}=\frac{13850\,\mathrm{N}\pm\sqrt{13850^2-4\cdot 4007\cdot 2832}\,\mathrm{N}}{2\cdot 4007\,\mathrm{N}}=\frac{13850\pm 12100}{8014}$$

$$\rightarrow\quad \alpha_1=\frac{13850-12100}{8014}=0{,}2184=12{,}51\,°$$

$$\alpha_2=\frac{13850+12100}{8014}=3{,}238=185{,}5\,°$$

- Nur der kleinere Anstellwinkel $\alpha_1=0{,}2184$ ist physikalisch sinnvoll.
- Für die aerodynamischen Kräfte folgt:

$$A=A_\alpha\alpha_1=40500\,\mathrm{N}\cdot 0{,}2184=8845\,\mathrm{N}$$
$$W=W_0+k\,A^2=65\,\mathrm{N}+2{,}6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}^{-1}\cdot 8845^2\,\mathrm{N}^2=268{,}4\,\mathrm{N}$$

2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Die Seilkraft kann aus Gleichung (1) berechnet werden:

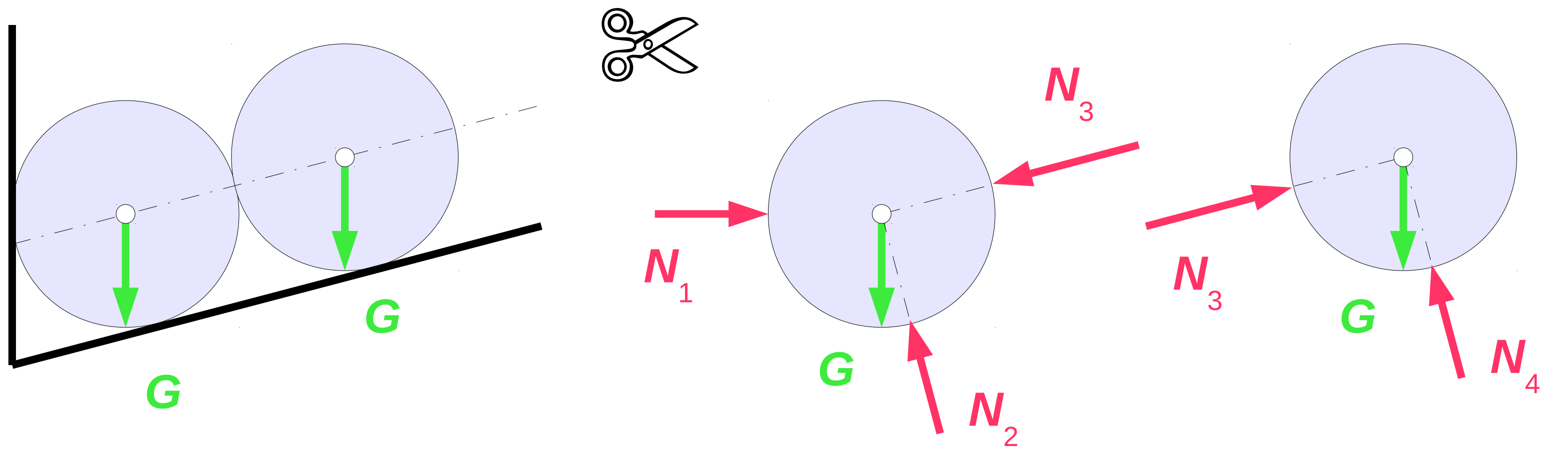
$$S = \frac{W\cos(\theta) + A\sin(\theta)}{\cos(\beta)} = \frac{268{,}4\,\mathrm{N}\cdot\cos(40\,°) + 8845\,\mathrm{N}\cdot\sin(40\,°)}{\cos(30\,°)}$$
$$= 6802\,\mathrm{N}$$

- Gleichung (2) kann zur Probe verwendet werden:

$$-6802\,\mathrm{N}\cdot\sin(30\,°) - 268{,}4\,\mathrm{N}\cdot\sin(40\,°) + 8845\,\mathrm{N}\cdot\cos(40\,°)$$
$$-3200\,\mathrm{N} = 2\,\mathrm{N} \approx 0\,\mathrm{N}$$

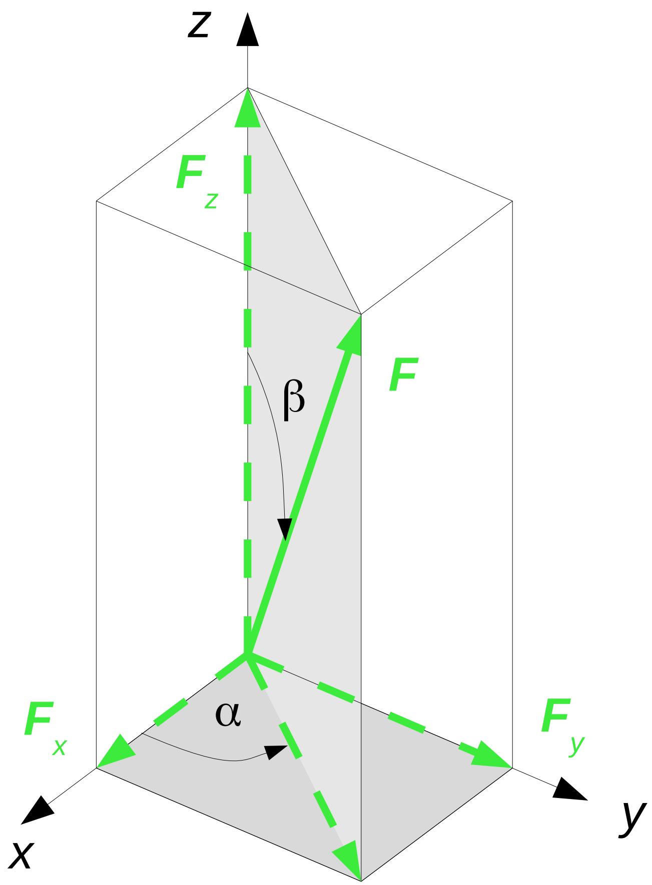
2.1 Zentrale Kraftsysteme in der Ebene

- Wechselwirkungsgesetz:
  - Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und haben die gleiche Wirkungslinie.
  - Beispiel: Zwei glatte Kugeln



2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Kräfte im Raum:



– Komponenten:

$$F_x = F\sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$F_y = F\sin(\beta)\sin(\alpha)$$
$$F_z = F\cos(\beta)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$$

$$[\vec{F}] = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = F\begin{bmatrix} \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Mit dem Einheitsvektor

$$[\vec{e}] = \begin{bmatrix} \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

gilt: $\vec{F} = F\,\vec{e}$

- Addition:

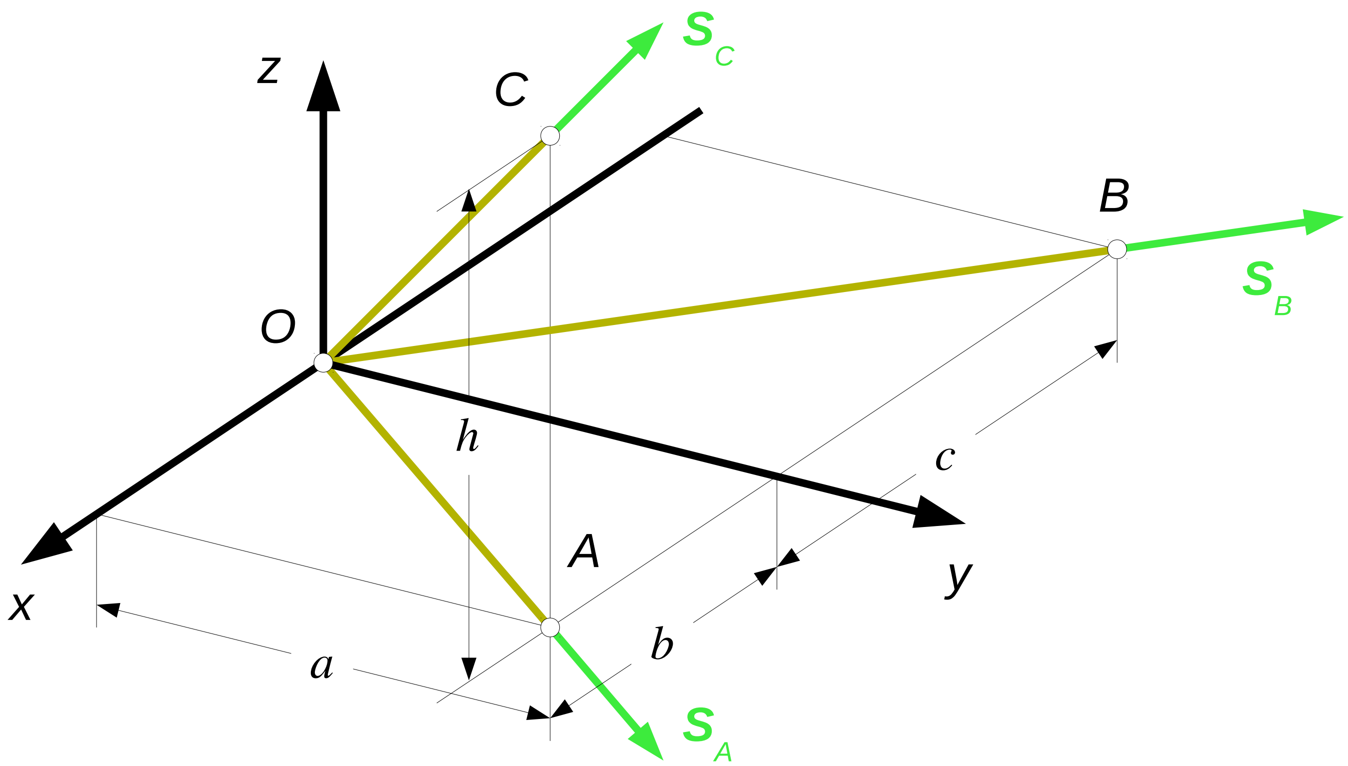
$$F_x = \sum_n F_{nx}$$
$$F_y = \sum_n F_{ny}$$
$$F_z = \sum_n F_{nz}$$

- Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Beispiel:



2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Im Punkt *O* sind drei Seile befestigt, an denen die Kräfte S_A , S_B und S_C angreifen.
- Gegeben:
  - $S_A = 400$ N, $S_B = 500$ N, $S_C = 300$ N
  - $a = 40$ cm, $b = 30$ cm, $c = 60$ cm, $h = 70$ cm
- Gesucht:
  - Komponenten S_x , S_y und S_z der resultierenden Kraft S

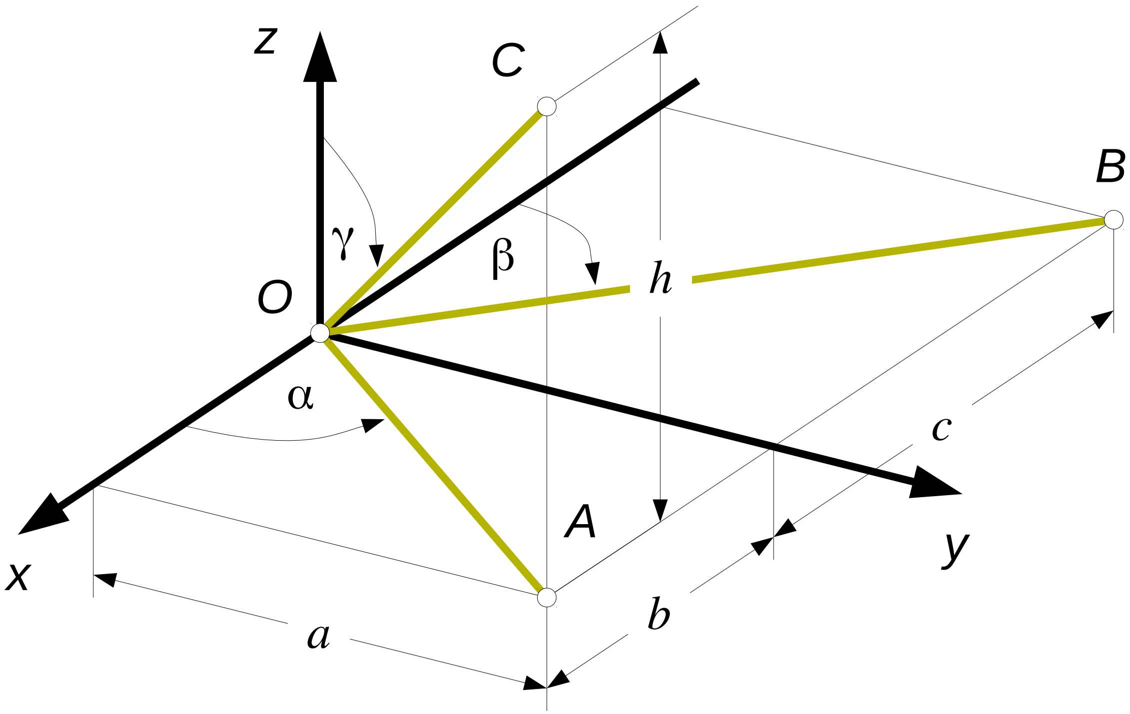
2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Geometrie:

$$\tan(\alpha)=\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$$

$$\tan(\beta)=\frac{a}{c}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\tan(\gamma)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{h}$$
$$=\frac{50}{70}=\frac{5}{7}$$



2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

$$\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}=\frac{1}{\sqrt{1+(a/b)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(4/3)^2}}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

$$\sin(\alpha)=\cos(\alpha)\tan(\alpha)=\frac{3}{5}\frac{4}{3}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

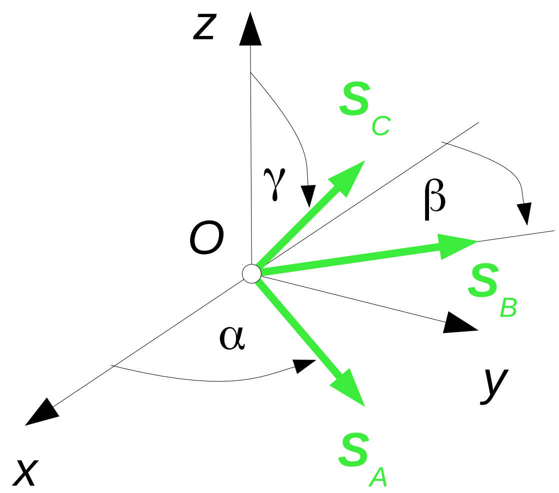
$$\cos(\beta)=\frac{1}{\sqrt{1+(2/3)^2}}=0{,}8321\,,\quad \sin(\beta)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}8321=0{,}5547$$

$$\cos(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{1+(5/7)^2}}=0{,}8137\,,\quad \sin(\gamma)=\frac{5}{7}\cdot 0{,}8137=0{,}5812$$

2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Komponenten der Kräfte:

$$S_{Ax} = S_A \cos(\alpha) \qquad S_{Bx} = -S_B \cos(\beta)$$
$$S_{Ay} = S_A \sin(\alpha) \qquad S_{By} = S_B \sin(\beta)$$
$$S_{Az} = 0 \qquad S_{Bz} = 0$$



$$S_{Cx} = S_C \sin(\gamma)\cos(\alpha)$$
$$S_{Cy} = S_C \sin(\gamma)\sin(\alpha)$$
$$S_{Cz} = S_C \cos(\gamma)$$

2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Resultierende Kraft:

$$S_C \sin(\gamma) = 300\,\mathrm{N} \cdot 0{,}5812 = 174{,}4\,\mathrm{N}$$

$$S_{Cz} = S_C \cos(\gamma) = 300\,\mathrm{N} \cdot 0{,}8137 = \underline{244{,}1\,\mathrm{N}}$$

$$\begin{aligned}
S_{Ax} &= 400\,\mathrm{N} \cdot 0{,}6 &&= 240{,}0\,\mathrm{N} \\
S_{Bx} &= -500\,\mathrm{N} \cdot 0{,}8321 &&= -416{,}1\,\mathrm{N} \\
S_{Cx} &= 174{,}4\,\mathrm{N} \cdot 0{,}6 &&= 104{,}6\,\mathrm{N} \\
S_x & &&= \underline{-71{,}5\,\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{Ay} &= 400\,\mathrm{N} \cdot 0{,}8 &&= 320{,}0\,\mathrm{N} \\
S_{By} &= 500\,\mathrm{N} \cdot 0{,}5547 &&= 277{,}4\,\mathrm{N} \\
S_{Cy} &= 174{,}4\,\mathrm{N} \cdot 0{,}8 &&= 139{,}5\,\mathrm{N} \\
S_y & &&= \underline{736{,}9\,\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

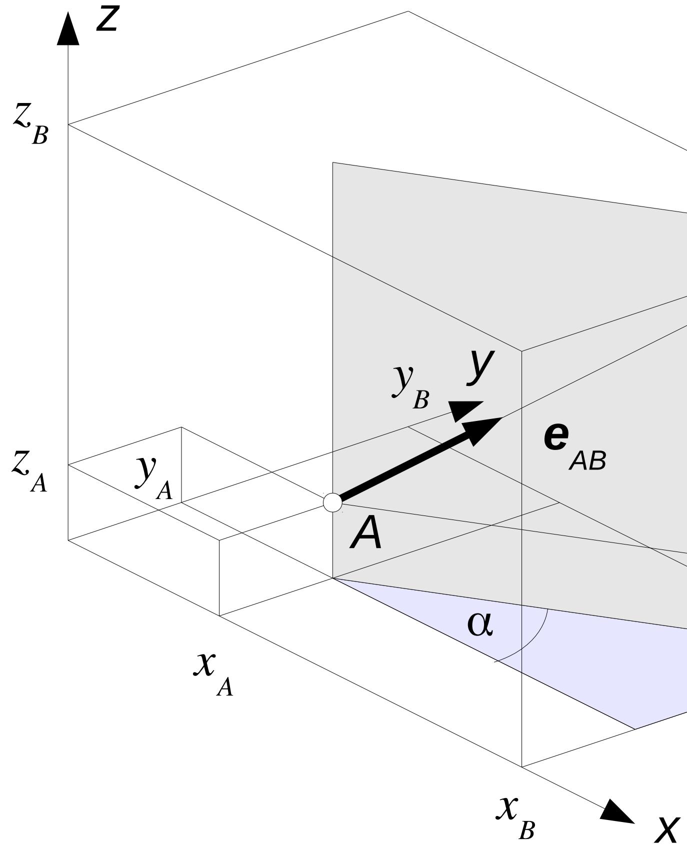
- Definition der Wirkungslinie durch zwei Punkte im Raum:

$$\cos(\beta)=\frac{z_B-z_A}{L_{AB}}$$

$$\sin(\beta)=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{L_{AB}}$$

$$\sin(\alpha)=\frac{y_B-y_A}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{x_B-x_A}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$



2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

$$L_{AB}=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$

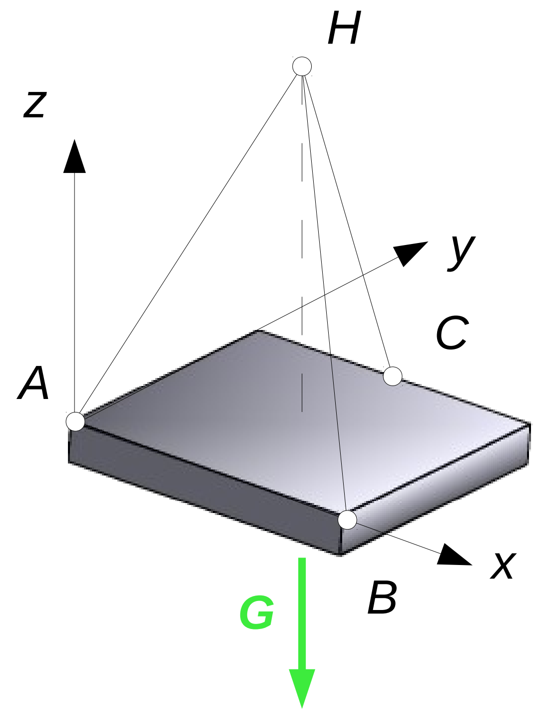
$$\left[\vec{e}_{AB}\right]=\begin{bmatrix}\sin(\beta)\cos(\alpha)\\ \sin(\beta)\sin(\alpha)\\ \cos(\beta)\end{bmatrix}=\frac{1}{L_{AB}}\begin{bmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{bmatrix}$$

2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Beispiel:
  - Eine Last hängt an drei Seilen, die an einem Haken befestigt sind.
  - Die Wirkungslinie der Gewichts-kraft geht durch den Haken.
  - Gegeben:
    - Koordinaten der Punkte:

$$A = (0, 0, 0)\,\mathrm{m}, \quad B = (2, 0, 0)\,\mathrm{m}$$
$$C = (1, 2, 0)\,\mathrm{m}, \quad H = (1, 1, 4)\,\mathrm{m}$$

    - Gewicht $G = 10\ \mathrm{kN}$



  - Gesucht:
    - Seilkräfte

2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Richtungen der Seilkräfte:

Ein Seil überträgt nur Zugkräfte. Die Wirkungslinie stimmt mit der Seilrichtung überein.

$$[\vec{e}_{AH}] = \frac{1}{L_{AH}} \begin{bmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \\ z_H - z_A \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{e}_{BH}] = \frac{1}{L_{BH}} \begin{bmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \\ z_H - z_B \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [\vec{e}_{CH}] = \frac{1}{L_{CH}} \begin{bmatrix} x_H - x_C \\ y_H - y_C \\ z_H - z_C \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

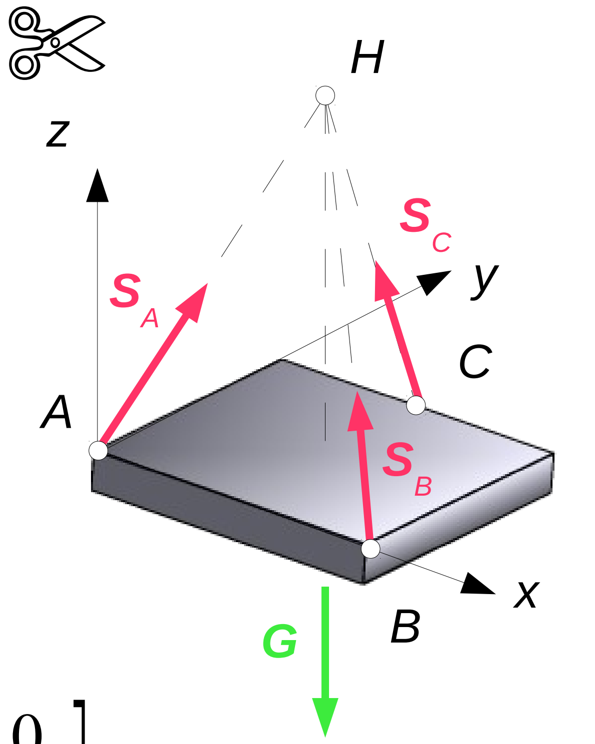
2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Kraftvektoren:

$$\left[\vec{S}_A\right]=\begin{bmatrix} S_{Ax} \\ S_{Ay} \\ S_{Az} \end{bmatrix}=S_A\left[\vec{e}_{AH}\right]=\frac{S_A}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{S}_B\right]=\begin{bmatrix} S_{Bx} \\ S_{By} \\ S_{Bz} \end{bmatrix}=S_B\left[\vec{e}_{BH}\right]=\frac{S_B}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{S}_C\right]=\begin{bmatrix} S_{Cx} \\ S_{Cy} \\ S_{Cz} \end{bmatrix}=S_C\left[\vec{e}_{CH}\right]=\frac{S_C}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \left[\vec{G}\right]=G\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \quad : \quad \frac{1}{3\sqrt{2}} S_A \quad - \quad \frac{1}{3\sqrt{2}} S_B \quad = \quad 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad \frac{1}{3\sqrt{2}} S_A \quad + \quad \frac{1}{3\sqrt{2}} S_B \quad - \quad \frac{1}{\sqrt{17}} S_C \quad = \quad 0 \quad (2)$$

$$\sum F_z = 0 \quad : \quad \frac{4}{3\sqrt{2}} S_A \quad + \quad \frac{4}{3\sqrt{2}} S_B \quad + \quad \frac{4}{\sqrt{17}} S_C - G \quad = \quad 0 \quad (3)$$

- Lösung des Gleichungssystems:
  - Aus Gleichung (1) folgt: $S_B = S_A$
  - Addition der ersten beiden Gleichungen liefert:

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} S_A - \frac{1}{\sqrt{17}} S_C = 0 \;\rightarrow\; S_C = \frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} S_A$$

2.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum

- Einsetzen in Gleichung (3) ergibt:

$$\left(\frac{2\cdot 4}{3\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{17}}\frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}\right)S_A=G \rightarrow \frac{16}{3\sqrt{2}}S_A=G \rightarrow S_A=3\frac{\sqrt{2}}{16}G$$

- Für die anderen beiden Seilkräfte folgt daraus:

$$S_B=S_A=3\frac{\sqrt{2}}{16}G,\quad S_C=\frac{2\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}\frac{3\sqrt{2}}{16}G=\frac{\sqrt{17}}{8}G$$

- Zahlenwerte:

$$S_A=2{,}65\,\mathrm{kN},\quad S_B=2{,}65\,\mathrm{kN},\quad S_C=5{,}15\,\mathrm{kN}$$