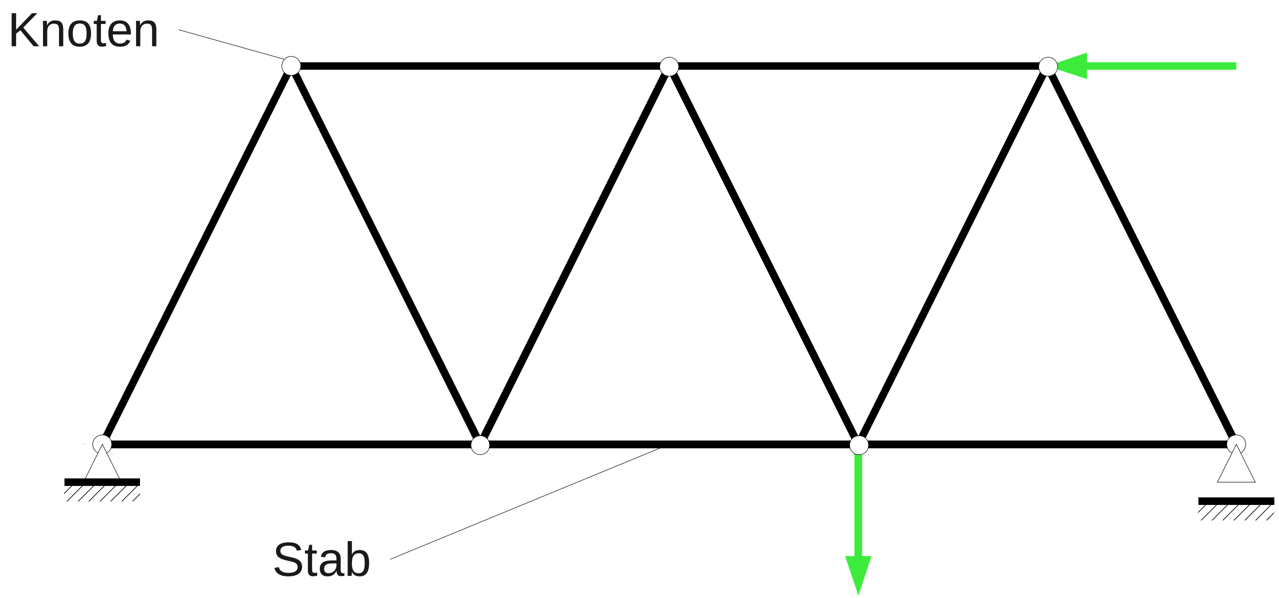
4. Ebene Fachwerke

4. Ebene Fachwerke

- Ein Fachwerk ist ein Tragwerk, bei dem die folgenden vereinfachenden Annahmen zulässig sind:
  - Das Tragwerk besteht aus gelenkig miteinander verbundenen Trägern.
  - Jeder Träger ist an genau zwei Gelenken angeschlossen.
  - Äußere Kräfte greifen nur in den Gelenken an.
- Dann sind alle Träger Pendelstützen.
- Die Träger eines Fachwerks werden als *Stäbe* und die Gelenke als *Knoten* bezeichnet.

4. Ebene Fachwerke



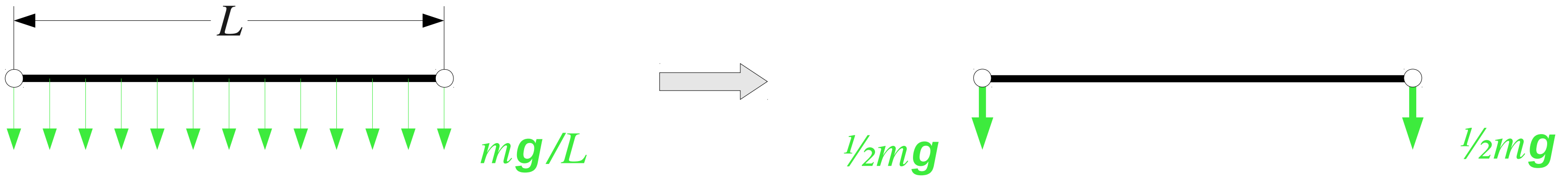
- Bei realen Konstruktionen sind die Annahmen nur angenähert erfüllt.

4. Ebene Fachwerke

Foto: Rainer Knäpper, Lizenz Freie Kunst (http://artlibre.org/licence/lal/de)

4. Ebene Fachwerke

- Idealisierungen:
  - Über die Knoten übertragene Momente sind klein, wenn die Biegesteifigkeit der Stäbe klein gegenüber der Dehnsteifigkeit ist.
  - Längs der Stäbe verteilte Lasten werden durch statisch gleichwertige Kräftegruppen an den benachbarten Knoten ersetzt.
  - Beispiel: Stabgewicht



4. Ebene Fachwerke

4.1 Knotenpunktverfahren

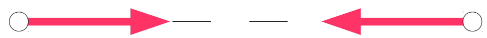
- Beim Knotenpunktverfahren werden die Stabkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten berechnet:
  - Freischneiden der Knoten
  - Die am Knoten angreifenden Kräfte bilden ein zentrales Kraftsystem.
  - Gleichgewichtsbedingungen: $\sum F_x = 0, \ \sum F_y = 0$

4. Ebene Fachwerke

- Statisch bestimmte Fachwerke:
  - Ein Fachwerk heißt statisch bestimmt, wenn sich die Kräfte in den Stäben aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln lassen.
  - Sei S die Anzahl der Stäbe, K die Anzahl der Knoten und L die Anzahl der Lagerkräfte.
  - Ein Fachwerk ist statisch bestimmt, wenn gilt:
    - Ebenes Fachwerk: $S + L = 2K$
    - Räumliches Fachwerk: $S + L = 3K$

4.1 Knotenpunktverfahren

- Vorgehen:
  - Ermittlung der Lagerkräfte aus Gesamtgleichgewicht
  - Nummerierung der Knoten
  - Nummerierung der Stäbe:
    - z. B. Stab 12 verbindet die Knoten 1 und 2
  - Stabkräfte an den Knoten einzeichnen:
    - Werden die Kräfte von den Knoten weg zeigend eingezeichnet, dann sind Zugkräfte positiv.

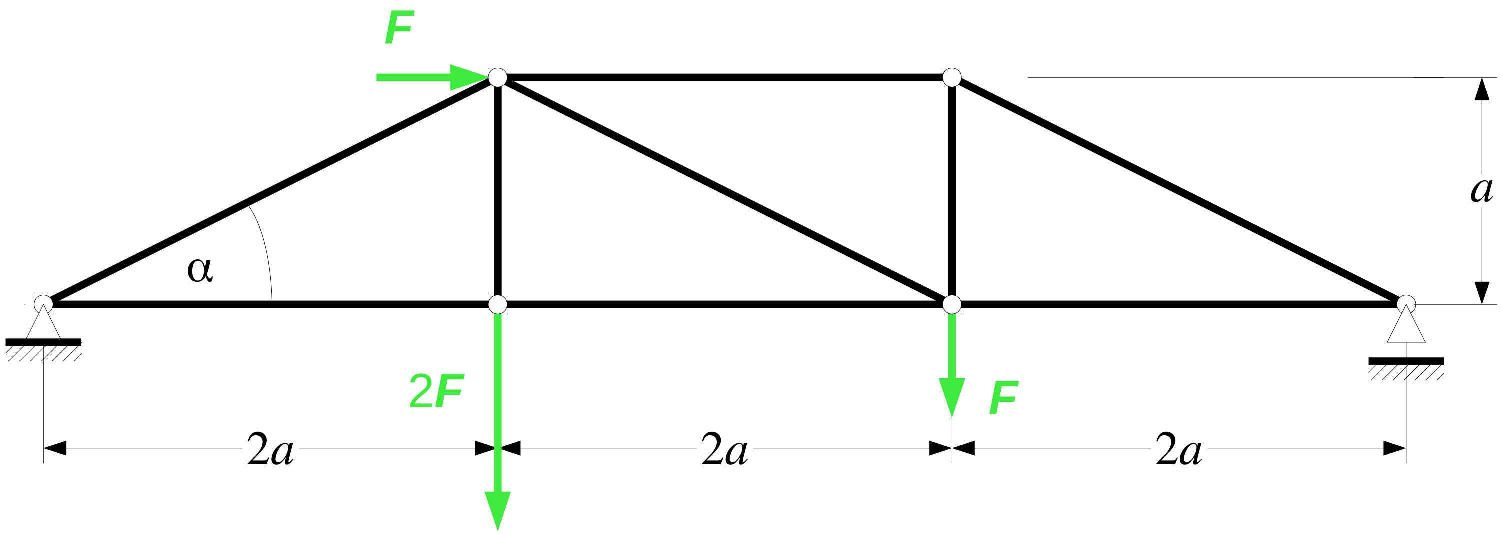


Zugkraft (positiv)

  - Kräftegleichgewicht an Knoten aufstellen

4.1 Knotenpunktverfahren

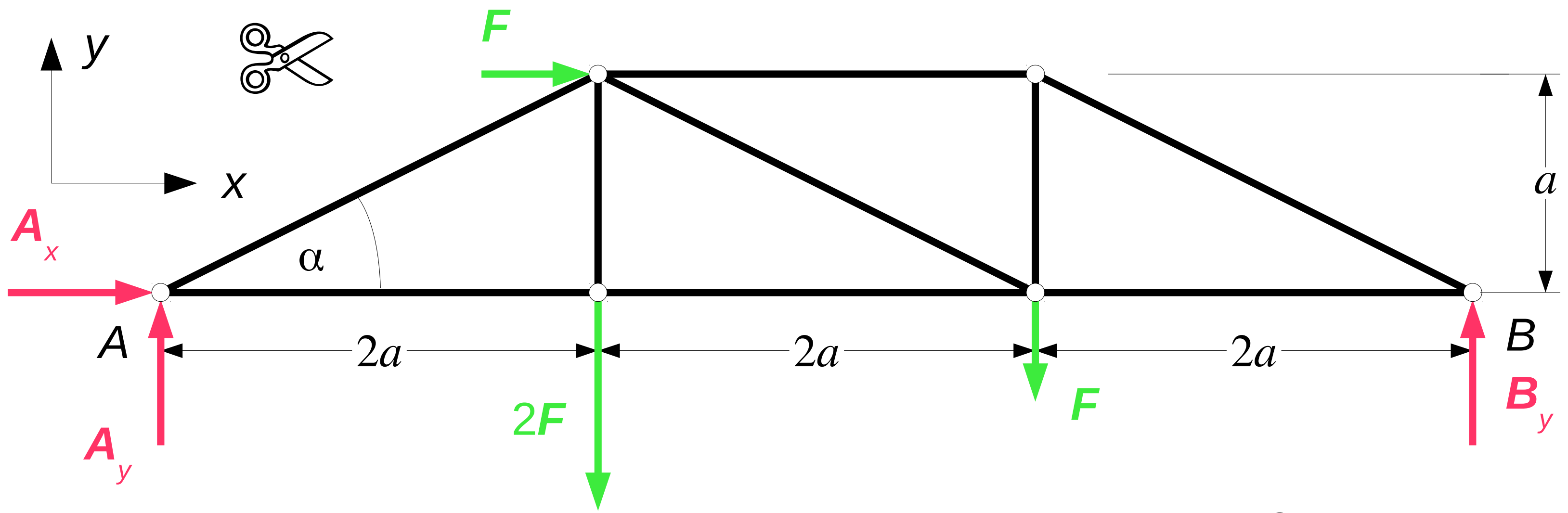
- Beispiel:



  - Gegeben:
    - $F = 1500\ \mathrm{N}$
  - Gesucht:
    - Lagerkräfte und Stab-kräfte

4.1 Knotenpunktverfahren

- Lagerkräfte:



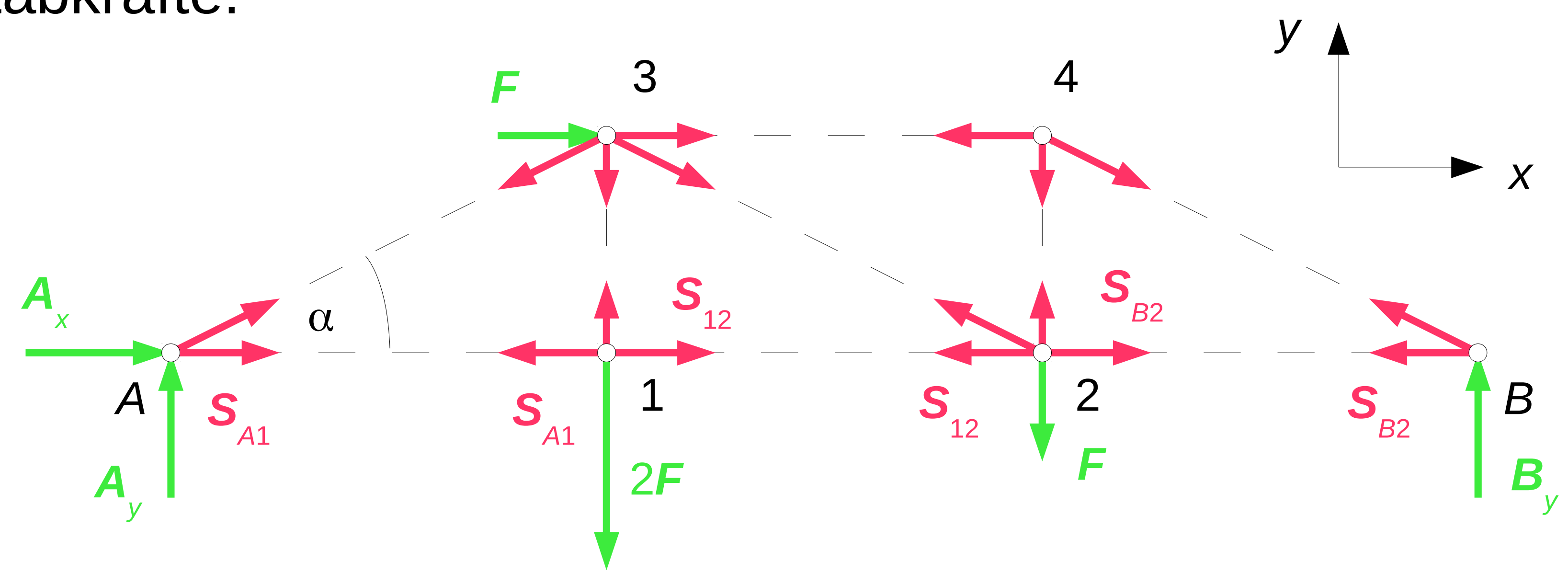
$$\sum M^A = 0 \ : \ 6aB_y - 4aF - 2a \cdot 2F - aF = 0 \ \rightarrow \ B_y = \frac{3}{2}F = 2250\,\mathrm{N}$$

$$\sum M^B = 0 \ : \ -6aA_y - aF + 4a \cdot 2F + 2aF = 0 \ \rightarrow \ A_y = \frac{3}{2}F = 2250\,\mathrm{N}$$

$$\sum F_x = 0 \ : \ A_x + F = 0 \ \rightarrow \ A_x = -F = -1500\,\mathrm{N}$$

4.1 Knotenpunktverfahren

- Stabkräfte:

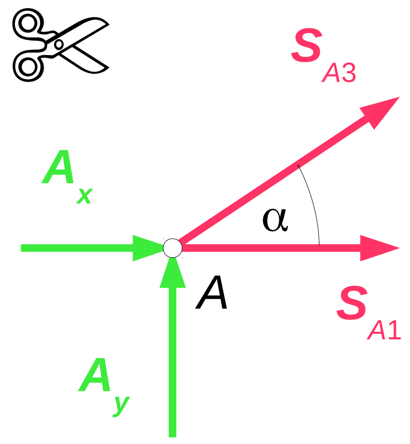


- Geometrie: $$\tan(\alpha)=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2},\quad \cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(\alpha)=\tan(\alpha)\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

4.1 Knotenpunktverfahren

- Knoten *A*:



$$\sum F_y = 0 \;:\; A_y + S_{A3}\sin(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow\; S_{A3} = -\frac{A_y}{\sin(\alpha)} = -\sqrt{5}\,A_y = -\frac{3\sqrt{5}}{2}F$$

$$\sum F_x = 0 \;:\; A_x + S_{A1} + S_{A3}\cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow\; S_{A1} = -A_x + \frac{A_y}{\tan(\alpha)} = -A_x + 2A_y$$

$$= (1+3)\,F = 4F$$

4.1 Knotenpunktverfahren

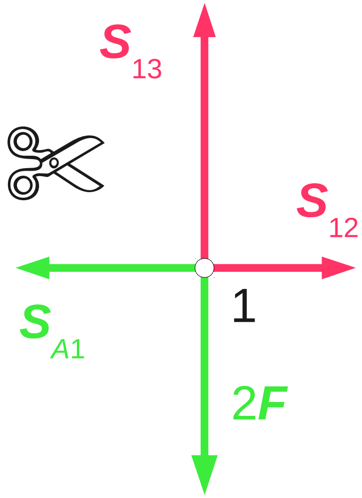
- Knoten 1:

$$\sum F_x = 0 \;:\; -S_{A1} + S_{12} = 0$$

$$\rightarrow \; S_{12} = S_{A1} = 4F$$

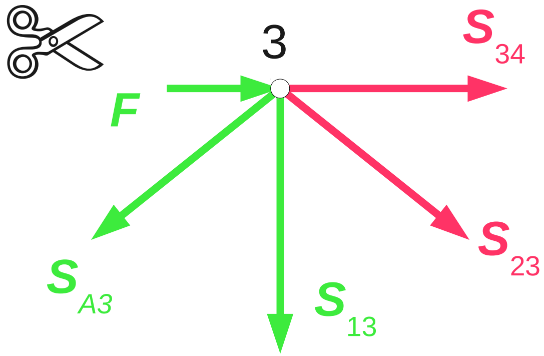
$$\sum F_y = 0 \;:\; -2F + S_{13} = 0$$

$$\rightarrow \; S_{13} = 2F$$



4.1 Knotenpunktverfahren

- Knoten 3:



$$\sum F_y = 0 \quad :$$

$$-S_{A3}\sin(\alpha) - S_{13} - S_{23}\sin(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \quad S_{23} = -S_{A3} - \frac{S_{13}}{\sin(\alpha)} = -S_{A3} - \sqrt{5}\,S_{13}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - 2\right)\sqrt{5}\,F = -\frac{\sqrt{5}}{2}F$$

$$\sum F_x = 0 \quad : \quad F + S_{34} + \left(S_{23} - S_{A3}\right)\cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \quad S_{34} = -F - \left(S_{23} - S_{A3}\right)\cos(\alpha) = -F - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(S_{23} - S_{A3}\right)$$

$$= -F - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)F = -3F$$

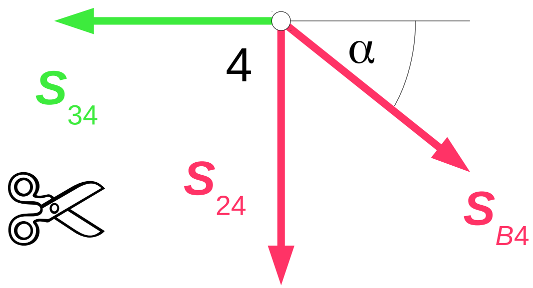
4.1 Knotenpunktverfahren

- Knoten 4:

$$\sum F_x = 0 \ : \ -S_{34} + S_{B4}\cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \ S_{B4} = \frac{S_{34}}{\cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{5}}{2} S_{34}$$

$$= -\frac{3\sqrt{5}}{2} F$$



$$\sum F_y = 0 \ : \ -S_{24} - S_{B4}\sin(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \ S_{24} = -S_{B4}\sin(\alpha) = -S_{34}\tan(\alpha) = -\frac{1}{2} S_{34} = \frac{3}{2} F$$

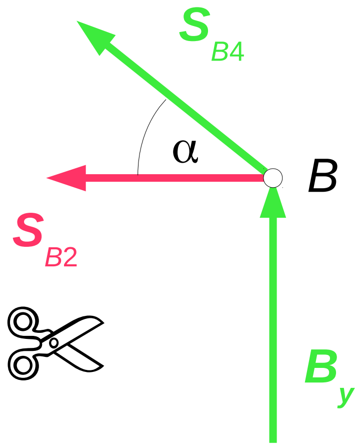
4.1 Knotenpunktverfahren

- Knoten B:

$$\sum F_x = 0 \quad : \quad -S_{B2} - S_{B4}\cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \quad S_{B2} = -S_{B4}\cos(\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{5}} S_{B4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{3\sqrt{5}}{2} F = 3F$$



Probe: $$\sum F_y = S_{B4}\sin(\alpha) + B_y = \left(-\frac{3\sqrt{5}}{2} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{2} \right) F = 0$$

- Knoten 2 liefert zwei weitere Gleichungen zur Probe.

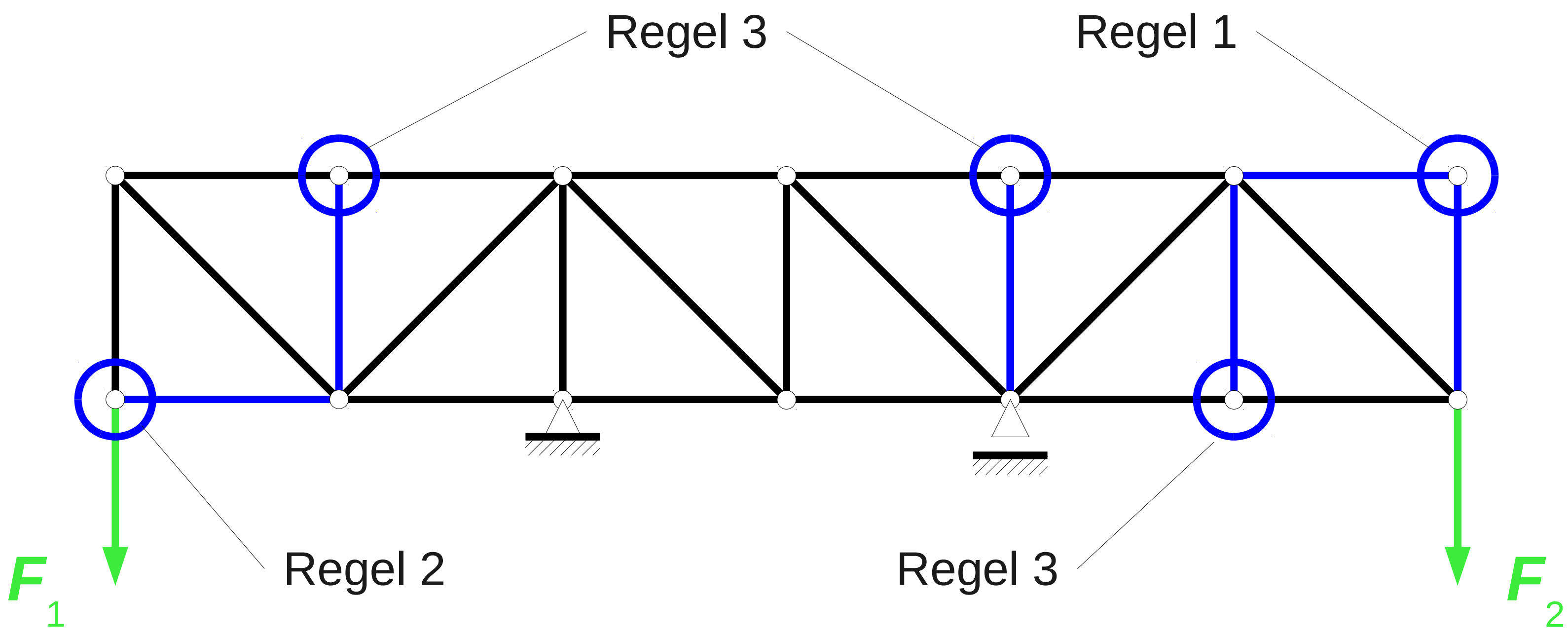
4.1 Knotenpunktverfahren

Stab	Kraft	
$A1$	$4F = 6000$ N	Zug
12	$4F = 6000$ N	Zug
$B2$	$3F = 4500$ N	Zug
34	$-3F = -4500$ N	Druck
$A3$	$-3\sqrt{5}F/2 = -5031$ N	Druck
13	$2F = 3000$ N	Zug
23	$-\sqrt{5}F/2 = -1677$ N	Druck
24	$3F/2 = 2250$ N	Zug
$B4$	$-3\sqrt{5}F/2 = -5031$ N	Druck

4.1 Knotenpunktverfahren

- Nullstäbe:
  - Nullstäbe sind Stäbe, deren Kraft null ist.
  - Es gelten folgende Regeln:
    1) Sind an einem <u>unbelasteten</u> Knoten <u>zwei</u> Stäbe angeschlossen, die nicht in gleicher Richtung liegen, dann sind beide Stäbe Nullstäbe.
    2) Sind an einem <u>belasteten</u> Knoten <u>zwei</u> Stäbe angeschlossen und greift die äußere Last in Richtung des einen Stabes an, dann ist der andere Stab ein Nullstab.
    3) Sind an einem <u>unbelasteten</u> Knoten <u>drei</u> Stäbe angeschlossen, von denen zwei in der gleichen Richtung liegen, dann ist der dritte Stab ein Nullstab.

4.1 Knotenpunktverfahren

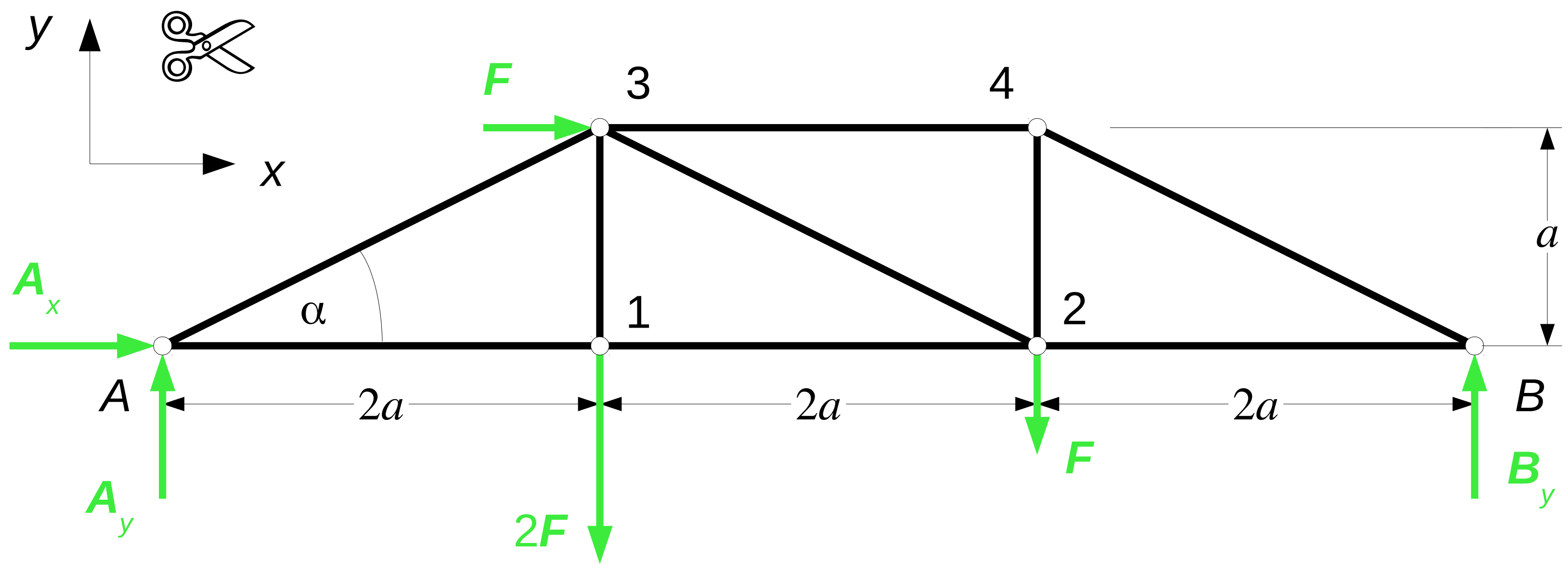


4.2 Ritterschеs Schnittverfahren

- Das Rittersche Schnittverfahren ist vorteilhaft, wenn nur einige Stabkräfte zu bestimmen sind.
- Vorgehen:
  - Teilfachwerke werden so freigeschnitten, dass maximal drei Stäbe mit unbekannten Kräften geschnitten werden, die nicht alle zum gleichen Knoten gehören.
  - Die Stabkräfte werden aus den drei Gleichgewichtsbedingungen für die Teilfachwerke bestimmt.
- Das Rittersche Schnittverfahren eignet sich auch als Kontrolle für das Knotenpunktverfahren.

4.2 Rittersches Schnittverfahren

- Beispiel:
  - Für das abgebildete Fachwerk sollen die Kräfte in den Stäben 12, 34 und 23 bestimmt werden.



4.2 Rittersches Schnittverfahren

- Lagerkräfte (vgl. Abschnitt 4.1):

$$A_x = -F = -1500\,\mathrm{N}\,,\quad A_y = \frac{3}{2}F = 2250\,\mathrm{N}\,,\quad B_y = \frac{3}{2}F = 2250\,\mathrm{N}$$

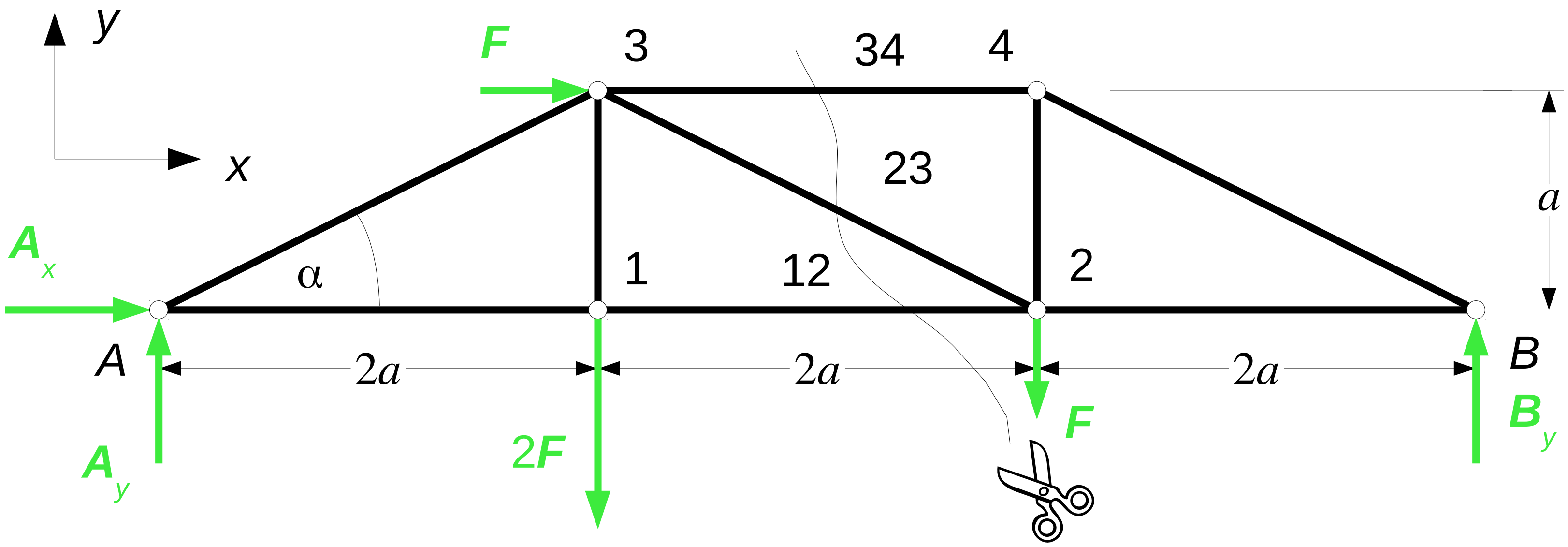
- Geometrie (vgl. Abschnitt 4.1):

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}\,,\quad \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

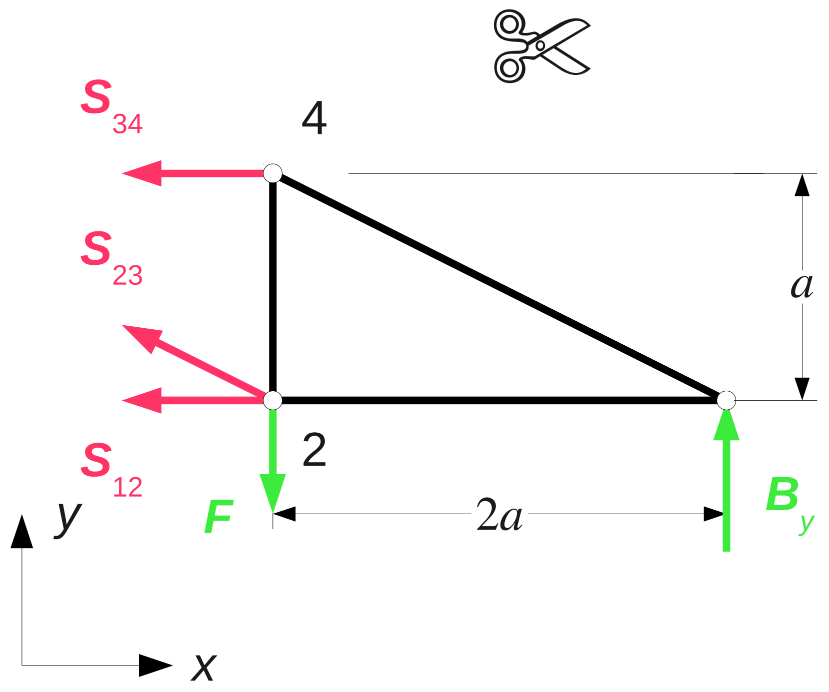
4.2 Ritterschеs Schnittverfahren

- Stabkräfte:



4.2 Ritterschnittverfahren

- Gleichgewicht am rechten Teilfachwerk:



$$\sum M^2=0 \quad : \quad a\,S_{34}+2\,a\,B_y=0$$

$$S_{34}=-2\cdot\frac{3}{2}F=-3F=-4500\,\mathrm{N}$$

$$\sum F_y=0 \quad : \quad S_{23}\sin(\alpha)-F+B_y=0$$

$$S_{23}=\left(1-\frac{3}{2}\right)\sqrt{5}\,F=-\frac{\sqrt{5}}{2}F=-1677\,\mathrm{N}$$

$$\sum F_x=0 \quad : \quad -S_{34}-S_{23}\cos(\alpha)-S_{12}=0$$

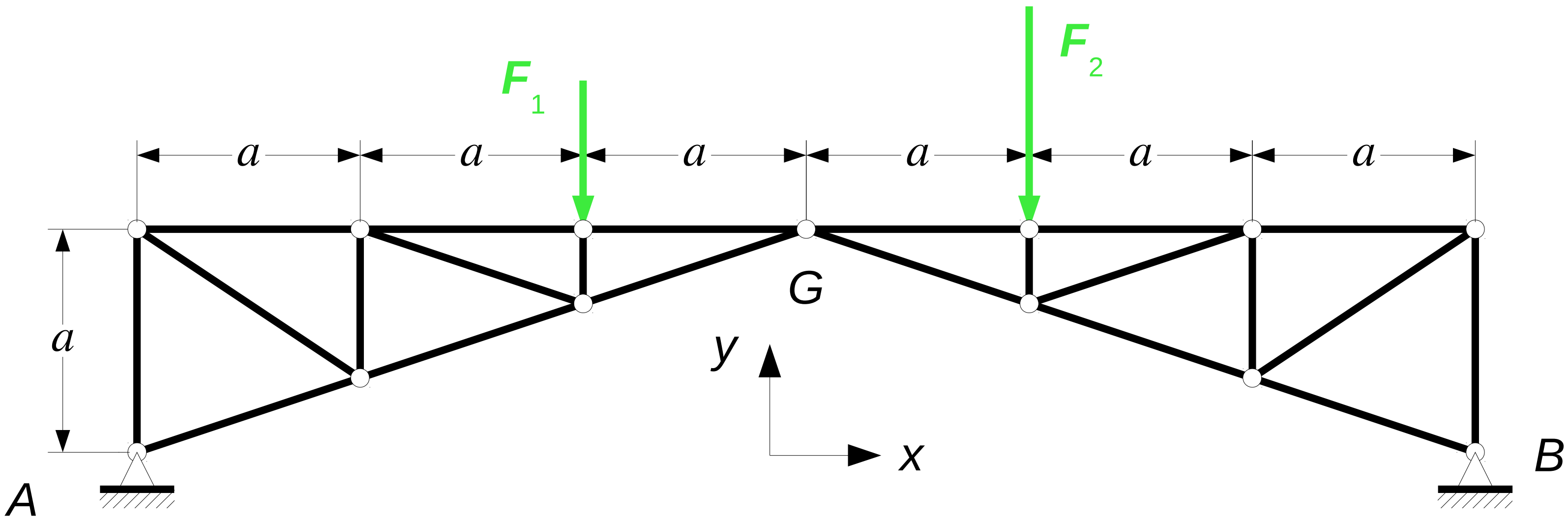
$$S_{12}=\left(2\cdot\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)F=4F=6000\,\mathrm{N}$$

4.3 Fachwerk-Systeme

- Komplizierte Fachwerke lassen sich leichter berechnen, wenn sie in Teilfachwerke zerlegt werden.
- Zuerst werden wie bei der Tragwerksanalyse die Lagerkräfte und die Zwischenreaktionen ermittelt.
- Anschließend können die Stabkräfte berechnet werden.

4.3 Fachwerk-Systeme

- Beispiel:



- Gegeben:
  - $F_1 = F_2 = 10\ \mathrm{kN}$

- Gesucht:
  - Kräfte im Gelenk *G*
  - Stabkräfte

4.3 Fachwerk-Systeme

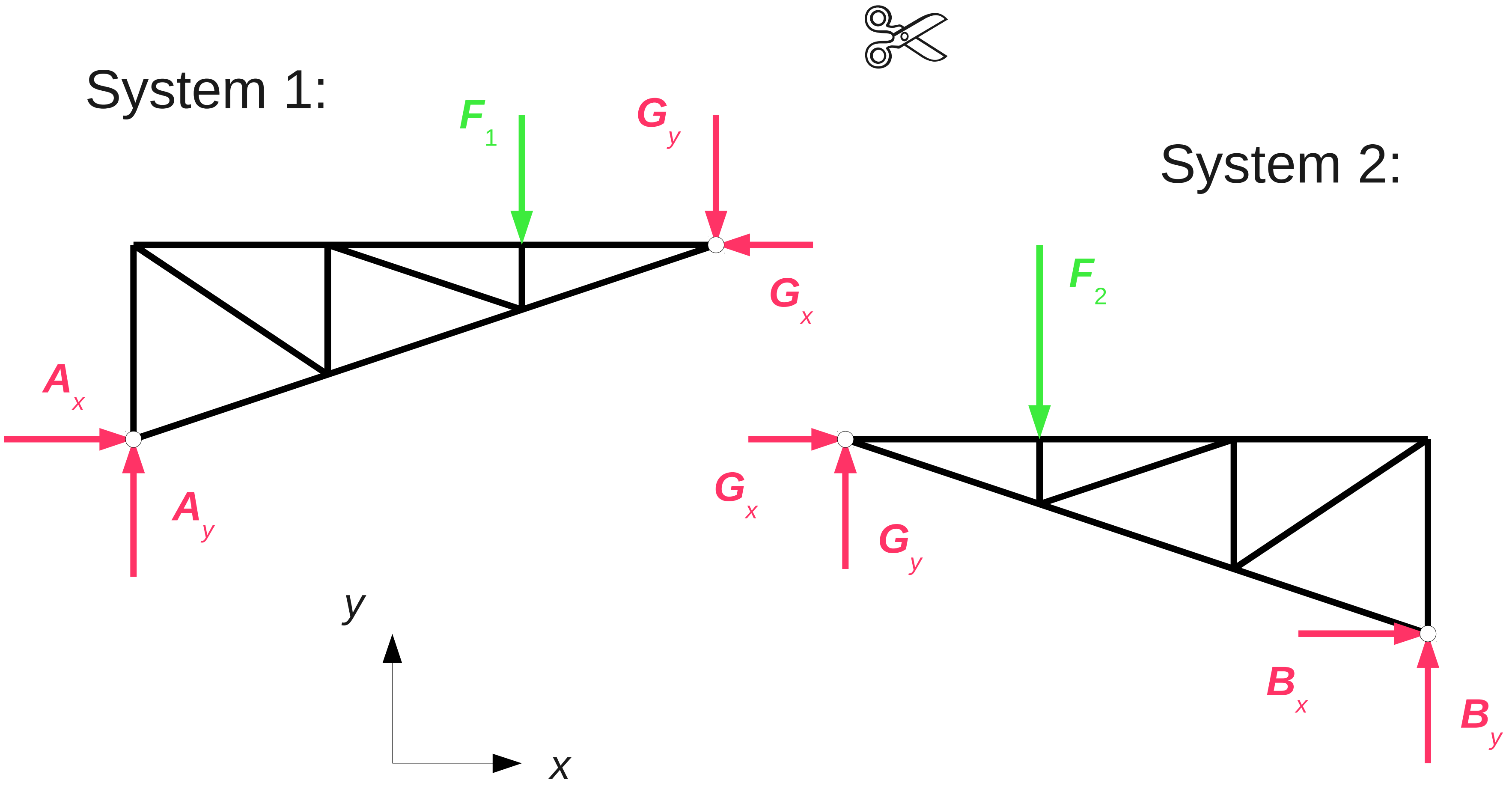
- Gesamtfachwerk:
  - 22 Stäbe, 4 Lagerkräfte, 13 Knoten

    $S+L=22+4=26=2\cdot 13=2\cdot K$ → statisch bestimmt

  - aber: Lagerkräfte können nicht vorab aus Gleichgewicht am Gesamtfachwerk bestimmt werden
- Aufschneiden am Knoten *G*
  - 4 Lagerkräfte, 2 Zwischenreaktionen (Gelenkkräfte G_x , G_y), 2 Bauteile

    $L+Z=4+2=6=3\cdot 2=3\cdot N$ → statisch bestimmt

4.3 Fachwerk-Systeme

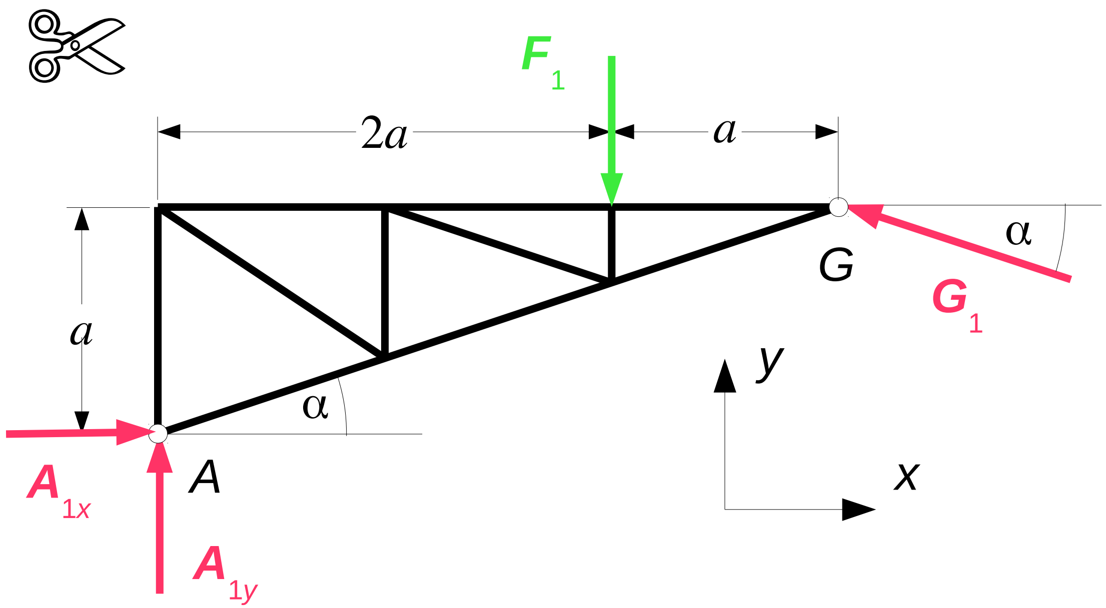


4.3 Fachwerk-Systeme

- Es stehen 2·3 Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der 6 unbekannten Kräfte zur Verfügung.
- Es ist jedoch nicht möglich, die Kräfte für jedes Teilsystem allein zu ermitteln.
- Die Rechnung vereinfacht sich durch Aufteilung in 2 Lastfälle:
  - Lastfall 1: Nur Kraft $\boldsymbol{F}_1$ auf System 1
  - Lastfall 2: Nur Kraft $\boldsymbol{F}_2$ auf System 2
- Die tatsächlichen Kräfte ergeben sich durch Überlagerung der beiden Lastfälle.

4.3 Fachwerk-Systeme

- Lastfall 1, System 1:
  - System 2 ist eine Pendelstütze.



$$\tan(\alpha)=\frac{1}{3} \quad : \quad \cos(\alpha)=\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

4.3 Fachwerk-Systeme

$$\sum M^A=0\ :\ 3aG_1\sin(\alpha)+aG_1\cos(\alpha)-2aF_1=0$$

$$\rightarrow\ G_1(3+3)=2\sqrt{10}\,F$$

$$\rightarrow\ G_1=\frac{\sqrt{10}}{3}F_1$$

$$G_{1x}=G_1\cos(\alpha)=\frac{3}{\sqrt{10}}G_1=F_1$$

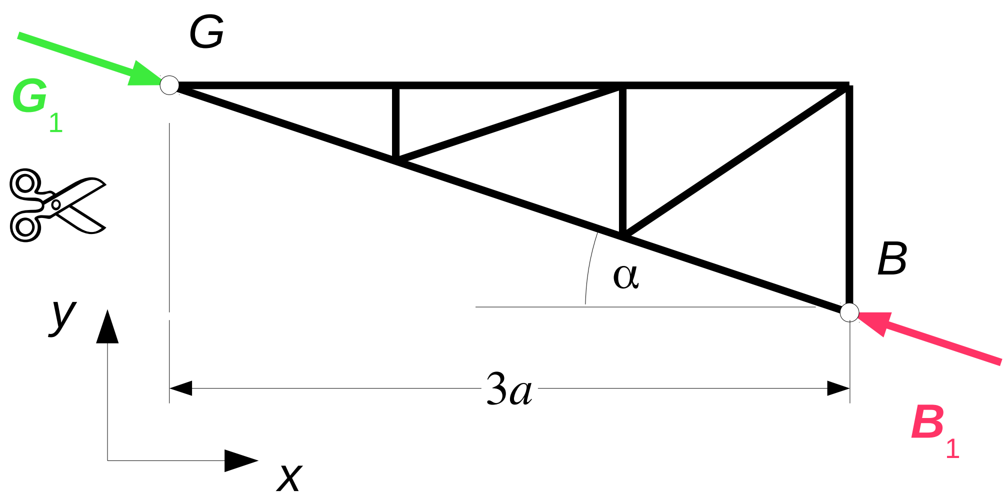
$$G_{1y}=-G_1\sin(\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{10}}G_1=-\frac{F_1}{3}$$

$$\sum F_x=0\ :\ A_{1x}-G_1\cos(\alpha)=0\ \rightarrow\ A_{1x}=G_1\cos(\alpha)=F_1$$

$$\sum F_y=0\ :\ A_{1y}-F_1+G_1\sin(\alpha)=0\ \rightarrow\ A_{1y}=F_1-G_1\sin(\alpha)=\frac{2}{3}F_1$$

4.3 Fachwerk-Systeme

- Lastfall 1, System 2: Pendelstütze

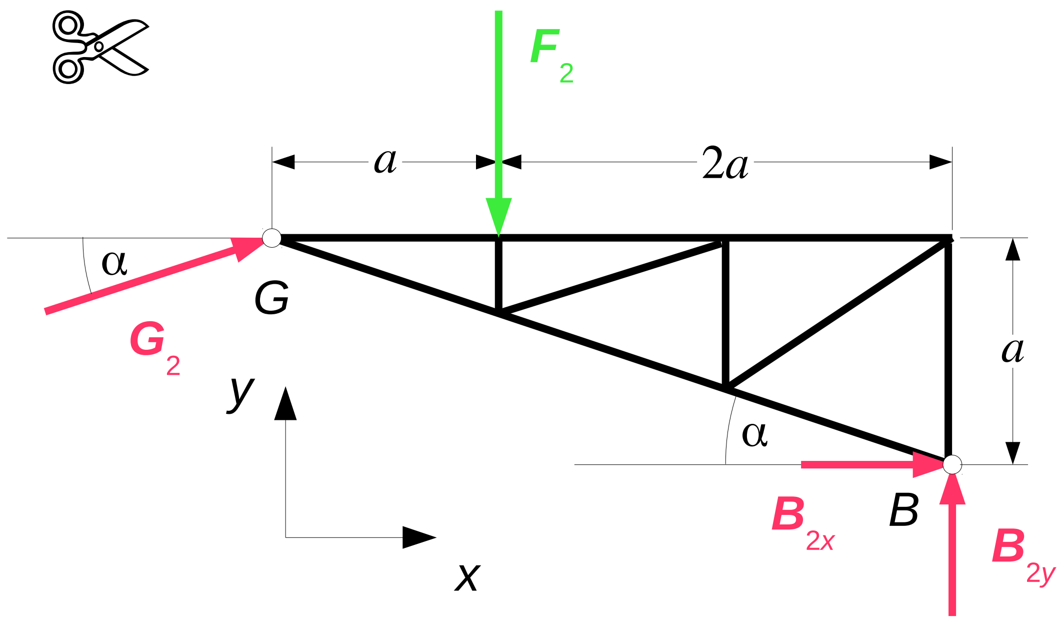


$$B_1 = G_1$$

$$B_{1x} = -B_1 \cos(\alpha) = -F_1, \quad B_{1y} = B_1 \sin(\alpha) = \frac{F_1}{3}$$

4.3 Fachwerk-Systeme

- Lastfall 2, System 2:
  - System 1 ist eine Pendelstütze.



4.3 Fachwerk-Systeme

$$\sum M^B = 0 \ : \ -3\,a\,G_2 \sin(\alpha) - a\,G_2 \cos(\alpha) + 2\,a\,F_2 = 0$$

$$\rightarrow \ G_2 (3+3) = 2\sqrt{10}\,F_2 \qquad G_{2x} = G_2 \cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}} G_2 = F_2$$

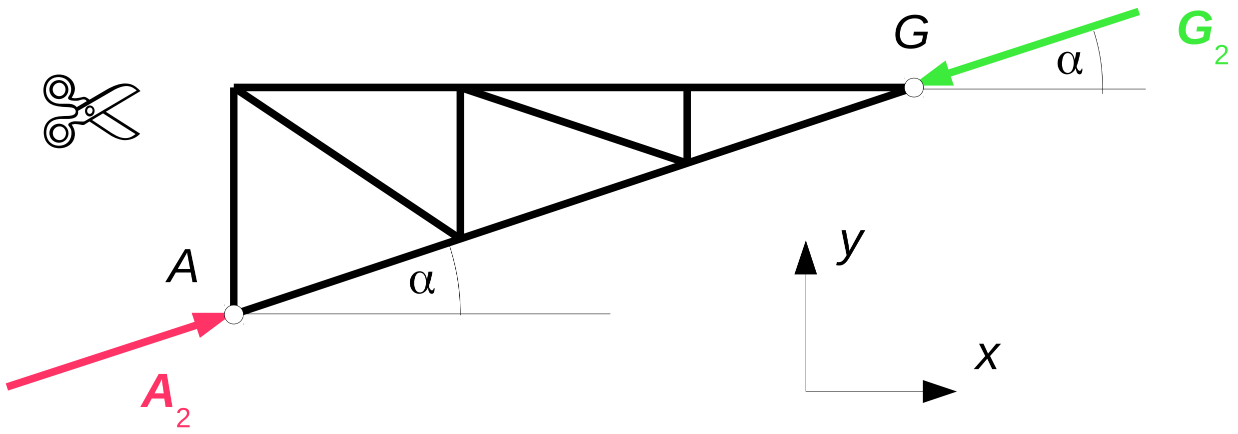
$$\rightarrow \ G_2 = \frac{\sqrt{10}}{3} F_2 \qquad G_{2y} = G_2 \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}} G_2 = \frac{F_2}{3}$$

$$\sum F_x = 0 \ : \ G_2 \cos(\alpha) + B_{2x} = 0 \ \rightarrow \ B_{2x} = -G_2 \cos(\alpha) = -F_2$$

$$\sum F_y = 0 \ : \ G_2 \sin(\alpha) - F_2 + B_{2y} = 0 \ \rightarrow \ B_{2y} = F_2 - G_2 \sin(\alpha) = \frac{2}{3} F_2$$

4.3 Fachwerk-Systeme

- Lastfall 2, System 1: Pendelstütze



$$A_2 = G_2$$

$$A_{2x} = A_2 \cos(\alpha) = F_2, \quad A_{2y} = A_2 \sin(\alpha) = \frac{F_2}{3}$$

4.3 Fachwerk-Systeme

- Ergebnis:

	Lastfall 1	Lastfall 2	Überlagerung	Zahlenwert
A_x	F_1	F_2	$F_1 + F_2$	20 kN
A_y	$2F_1/3$	$F_2/3$	$(2F_1 + F_2)/3$	10 kN
B_x	$-F_1$	$-F_2$	$-F_1 - F_2$	-20 kN
B_y	$F_1/3$	$2F_2/3$	$(F_1 + 2F_2)/3$	10 kN
G_x	F_1	F_2	$F_1 + F_2$	20 kN
G_y	$-F_1/3$	$F_2/3$	$(F_2 - F_1)/3$	0 kN

4.3 Fachwerk-Systeme

- Ermittlung der Stabkräfte:
  - Übung