

5. Räumliche Tragwerke



5. Räumliche Tragwerke

- Ein räumliches Tragwerk ist statisch bestimmt gelagert, wenn die Lagerreaktionen aus den 6 Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_x^B = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_y^B = 0$$

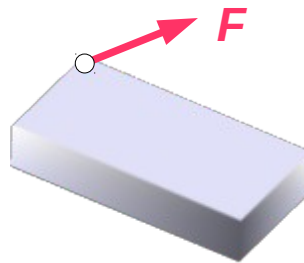
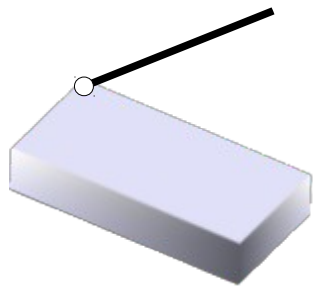
$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_z^B = 0$$

5. Räumliche Tragwerke

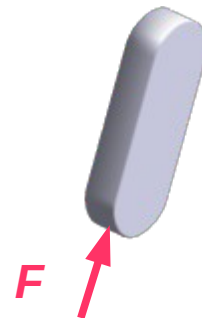
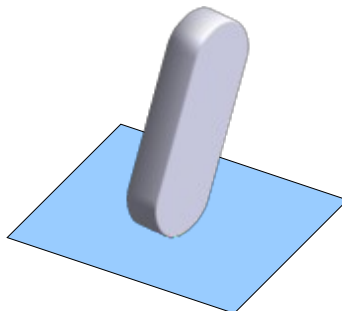
- Räumliche Lager:

- Seil:



1-wertig: Kraft F wirkt vom Bauteil weg in Richtung des Seils

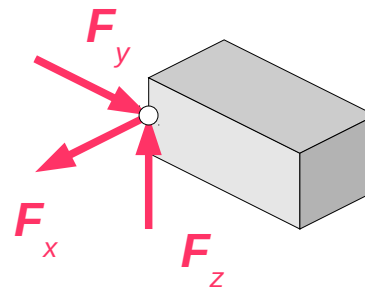
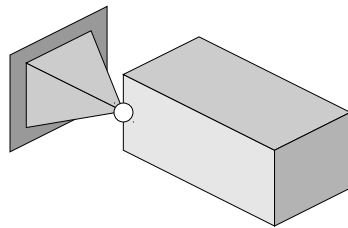
- Glatte Fläche:



1-wertig: Kraft F steht senkrecht auf Kontaktfläche

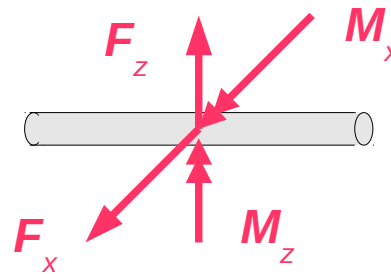
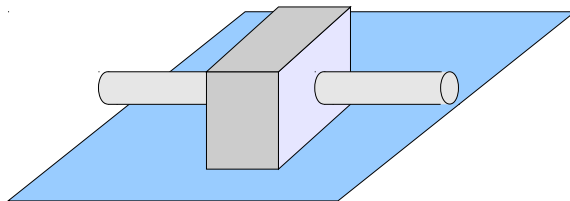
5. Räumliche Tragwerke

- Kugelgelenk:



3-wertig:
Kräfte F_x, F_y, F_z

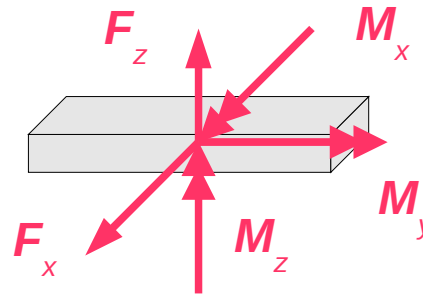
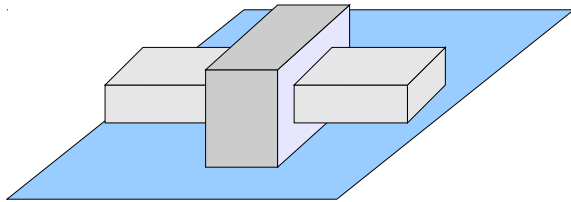
- Radiallager:



4-wertig:
Kräfte F_x, F_z
Momente M_x, M_z

5. Räumliche Tragwerke

- Schublager:

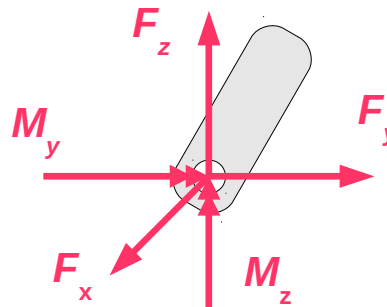
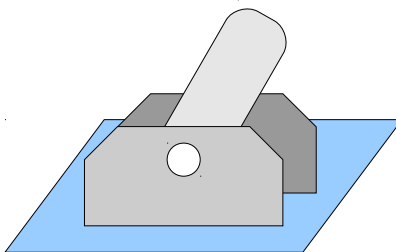


5-wertig:

Kräfte F_x, F_z

Momente M_x, M_y, M_z

- Festes Gelenklager:



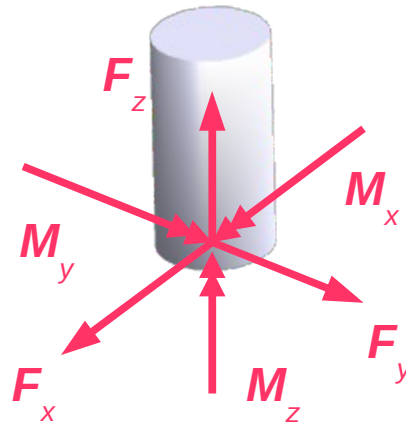
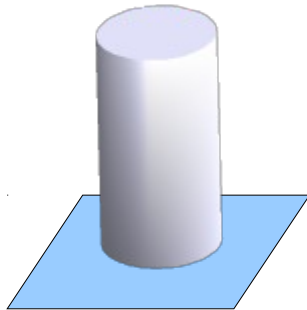
5-wertig:

Kräfte F_x, F_y, F_z

Momente M_y, M_z

5. Räumliche Tragwerke

- Feste Einspannung:



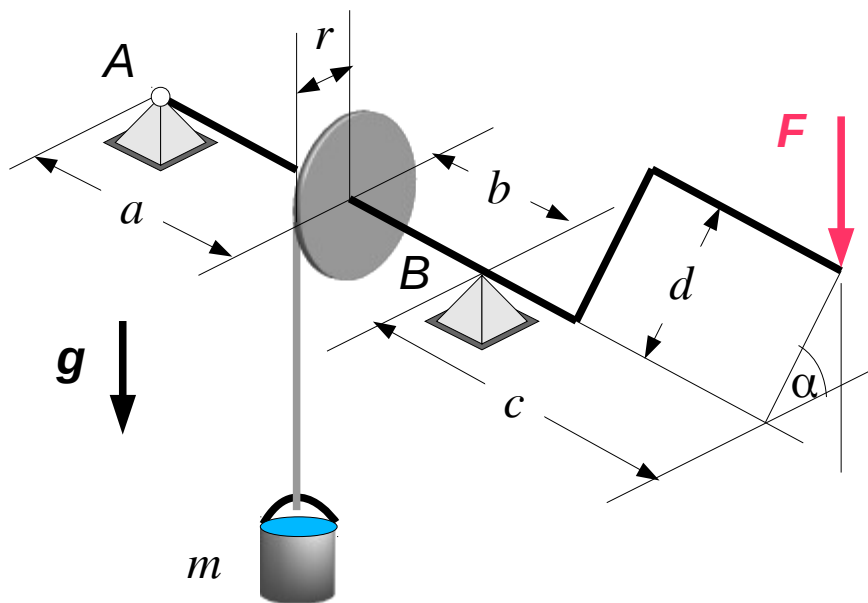
6-wertig:

Kräfte F_x , F_y , F_z

Momente M_x , M_y , M_z

5. Räumliche Tragwerke

- Beispiel: Winde



- Lager A: Kugelgelenk

- verhindert Verschiebungen in allen 3 Richtungen (Festlager)

- Lager B: Kugelgelenk

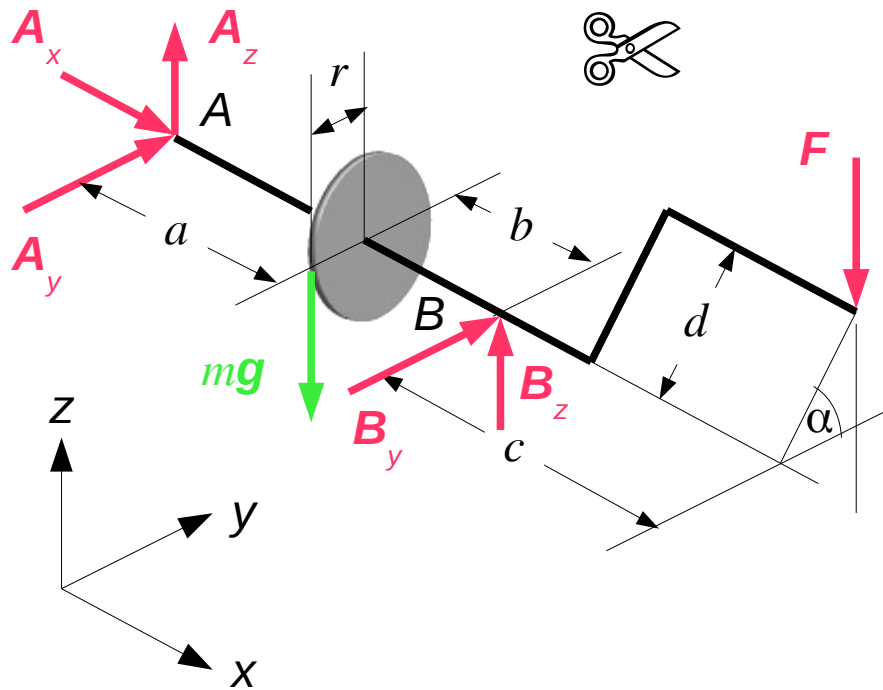
- verhindert Verschiebungen senkrecht zur Welle (Loslager)

5. Räumliche Tragwerke

- Gegeben:
 - Masse $m = 100$ kg
 - Abstände $a = 0,3$ m, $b = 0,5$ m, $c = 0,4$ m, $d = 0,3$ m
 - Radius $r = 0,1$ m
 - Winkel $\alpha = 30^\circ$
- Gesucht:
 - Kraft F
 - Lagerkräfte

5. Räumliche Tragwerke

- Freischnitt:



- Gleichgewicht:

$$\sum F_x = 0 : A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 : A_y + B_y = 0$$

$$\rightarrow B_y = -A_y$$

$$\sum F_z = 0 : \\ A_z + B_z - mg - F = 0$$

$$\rightarrow A_z = F + mg - B_z$$

5. Räumliche Tragwerke

$$\sum M_x^A = 0 : m g r - d \cos(\alpha) F = 0 \rightarrow F = \frac{m g r}{d \cos(\alpha)}$$

$$\sum M_y^A = 0 : m g a - (a+b) B_z + (a+b+c) F = 0$$

$$\rightarrow B_z = \frac{m g a + (a+b+c) F}{a+b}$$

$$\sum M_z^A = 0 : (a+b) B_y = 0 \rightarrow B_y = 0$$

5. Räumliche Tragwerke

- Zahlenwerte:

$$A_x = 0 \text{ N}, \quad A_y = -B_y = 0 \text{ N}$$

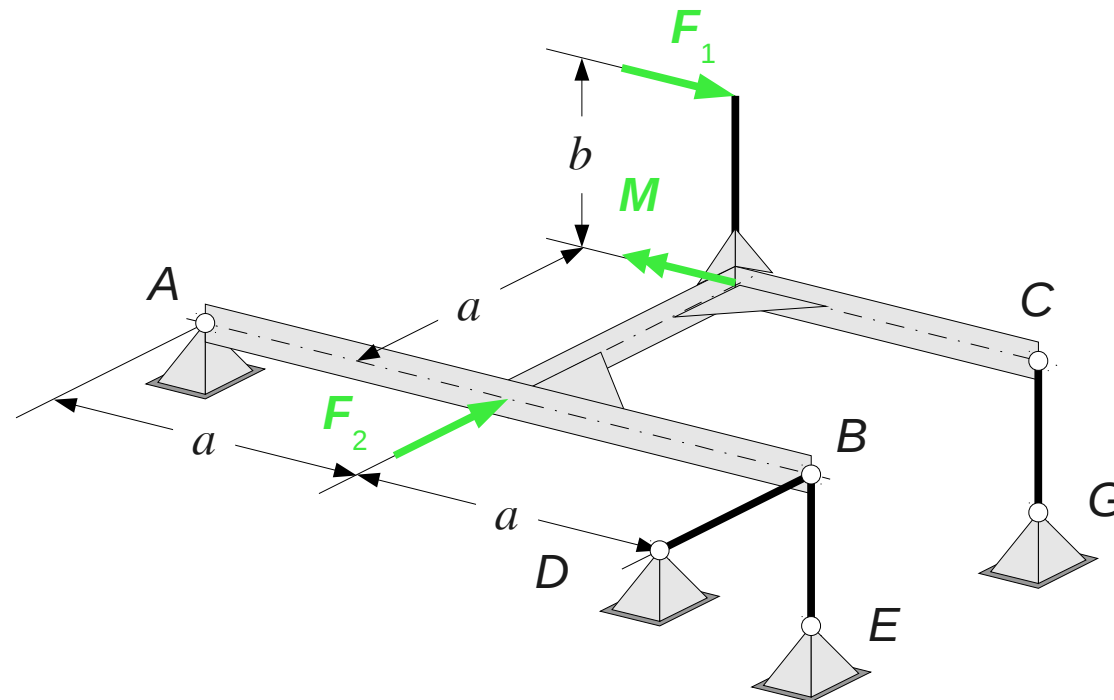
$$F = \frac{100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,1 \text{ m}}{0,3 \text{ m} \cdot \cos(30^\circ)} = \underline{377,6 \text{ N}}$$

$$B_z = \frac{100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,3 \text{ m} + (0,3 \text{ m} + 0,5 \text{ m} + 0,4 \text{ m}) \cdot 377,6 \text{ N}}{0,3 \text{ m} + 0,5 \text{ m}} \\ = \underline{934,3 \text{ N}}$$

$$A_z = 377,6 \text{ N} + 100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 - 934,3 \text{ N} = \underline{424,3 \text{ N}}$$

5. Räumliche Tragwerke

- Beispiel: Rahmen

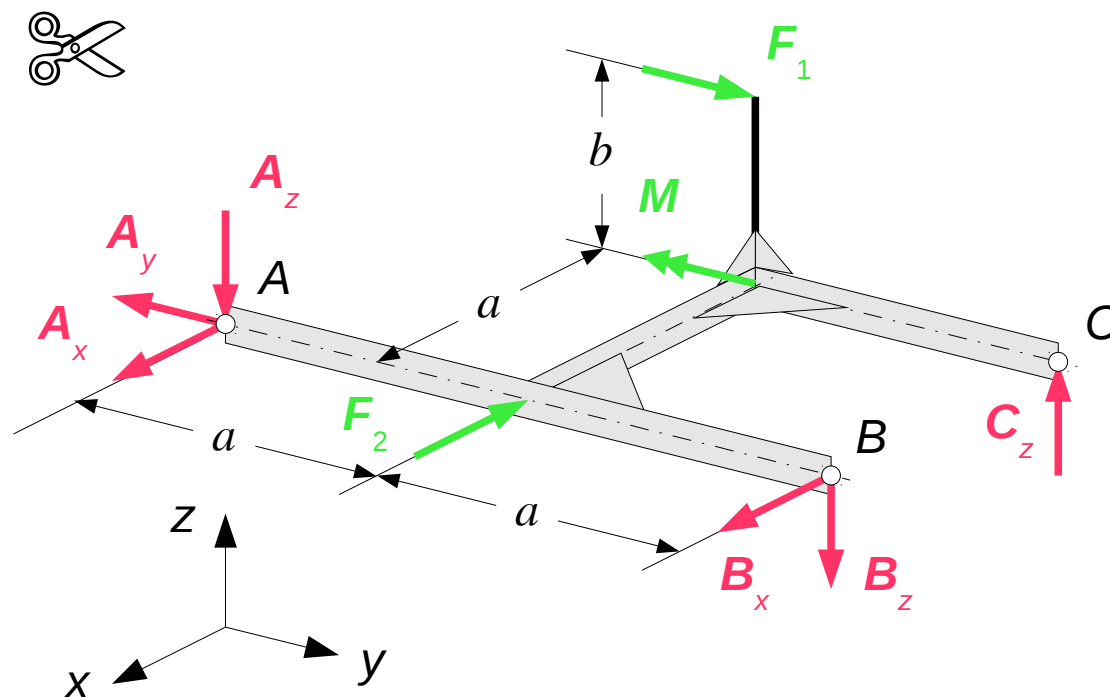


5. Räumliche Tragwerke

- Lagerung:
 - Punkte A , D , E und G : feste Kugelgelenke
 - Die Träger BE und BD sind im Punkt B gelenkig angeschlossen.
 - Der Träger CG ist im Punkt C gelenkig angeschlossen.
- Gegeben:
 - Kräfte F_1 und F_2
 - Moment M
 - Abmessungen a und b
- Gesucht:
 - Gelenkkkräfte in den Punkten A , B und C

5. Räumliche Tragwerke

- Freischnitt:



5. Räumliche Tragwerke

$$\sum M_y^A = 0 : -M + a C_z = 0 \quad \rightarrow \quad C_z = \frac{M}{a}$$

$$\sum M_x^A = 0 : -b F_1 + 2a C_z - 2a B_z = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = C_z - \frac{b}{2a} F_1 = \frac{M}{a} - \frac{b}{2a} F_1$$

$$\sum M_z^A = 0 : -a F_1 + a F_2 - 2a B_x = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = \frac{1}{2} (F_2 - F_1)$$

$$\sum F_x = 0 : A_x + B_x - F_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = F_2 - B_x = \frac{1}{2} (F_2 + F_1)$$

$$\sum F_y = 0 : -A_y + F_1 = 0 \quad \rightarrow \quad A_y = F_1$$

$$\sum F_z = 0 : -A_z - B_z + C_z = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = C_z - B_z = \frac{b}{2a} F_1$$

5. Räumliche Tragwerke

- Beispiel: Räumliches Fachwerk

- Gegeben: a, F
- Gesucht: Stabkräfte
- Koordinaten:

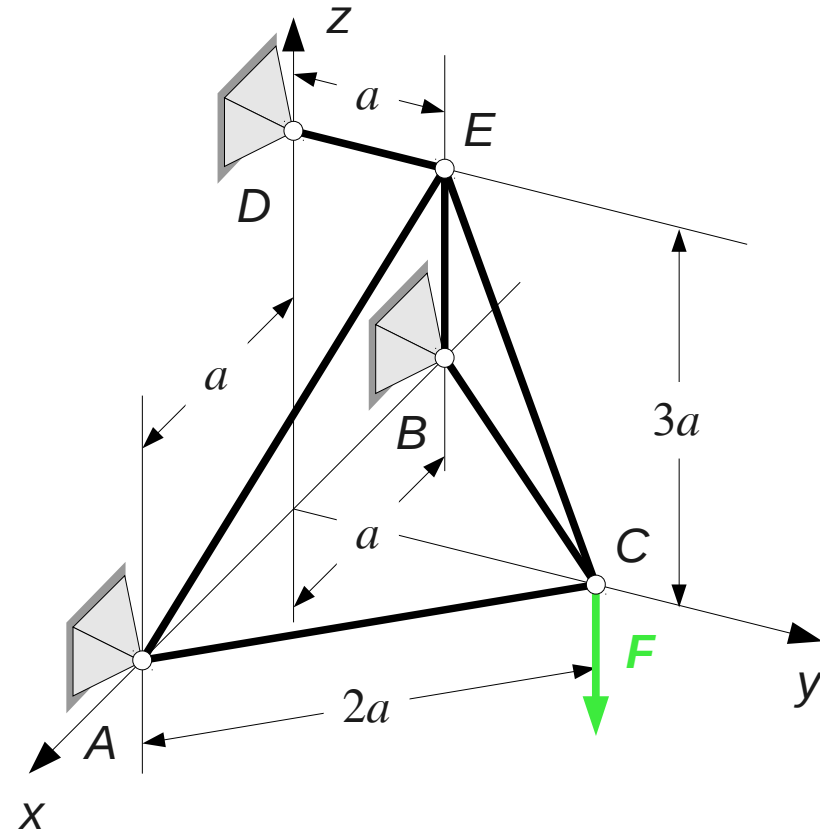
$$A = (1, 0, 0)a$$

$$B = (-1, 0, 0)a$$

$$C = (0, \sqrt{3}, 0)a$$

$$D = (0, 0, 3)a$$

$$E = (0, 1, 3)a$$



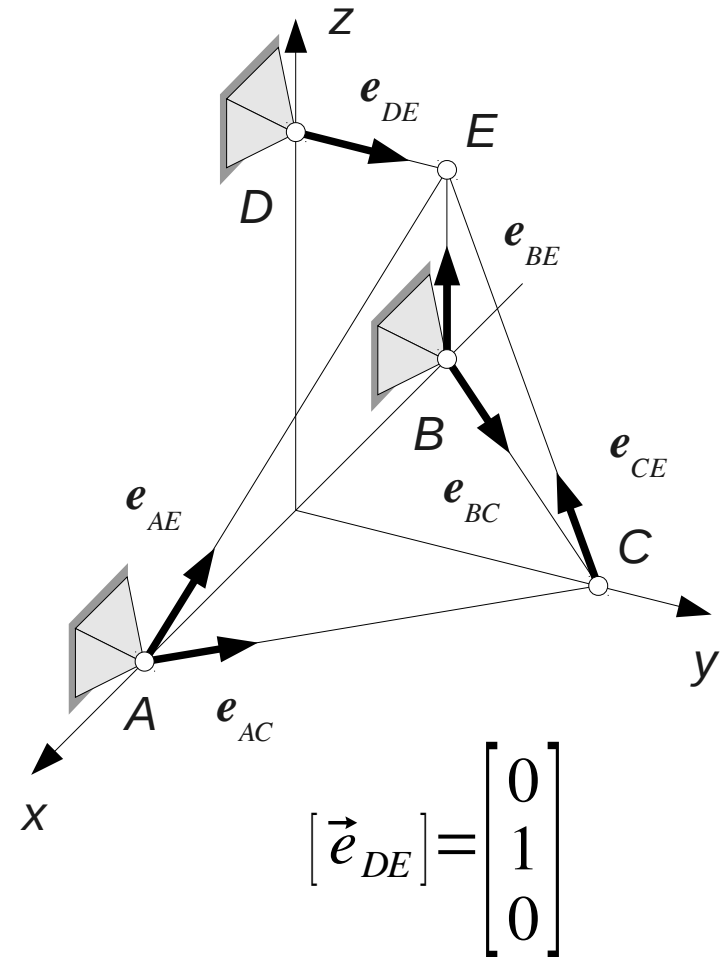
5. Räumliche Tragwerke

- Richtungsvektoren der Stäbe:

$$[\vec{e}_{AC}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\vec{e}_{BC}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{e}_{AE}] = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad [\vec{e}_{BE}] = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{e}_{CE}] = \frac{1}{3,088} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,7321 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2371 \\ 0,9715 \end{bmatrix}$$



5. Räumliche Tragwerke

- Knoten C:

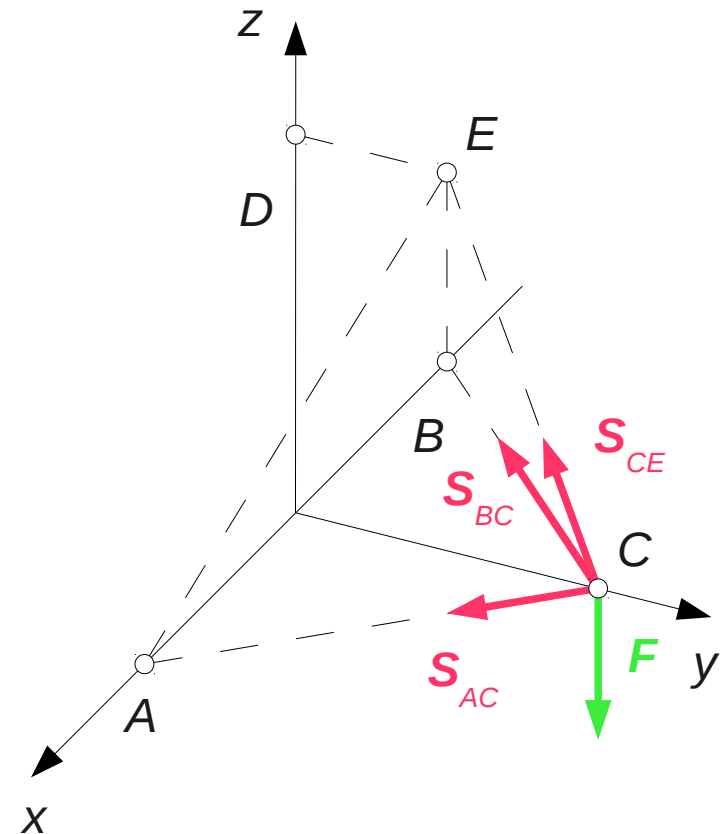
$$\sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{S}_{AC} + \vec{S}_{BC} + \vec{S}_{CE} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$-S_{AC} \vec{e}_{AC} - S_{BC} \vec{e}_{BC} + S_{CE} \vec{e}_{CE} - F \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 : \frac{1}{2} S_{AC} - \frac{1}{2} S_{BC} = 0$$

$$\sum F_y = 0 : \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} (S_{AC} + S_{BC}) - 0,2371 S_{CE} = 0$$

$$\sum F_z = 0 : 0,9715 S_{CE} - F = 0$$



5. Räumliche Tragwerke

$$\sum F_z = 0 \rightarrow S_{CE} = \frac{1}{0,9715} F = \underline{1,029 F}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{BC} = S_{AC}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \sqrt{3} S_{AC} = -0,2371 S_{CE} = -0,2441 F$$

$$\rightarrow S_{AC} = S_{BC} = \underline{-0,1410 F}$$

5. Räumliche Tragwerke

- Knoten E :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} : \vec{S}_{AE} + \vec{S}_{BE} + \vec{S}_{DE} + \vec{S}_{CE} = \vec{0}$$

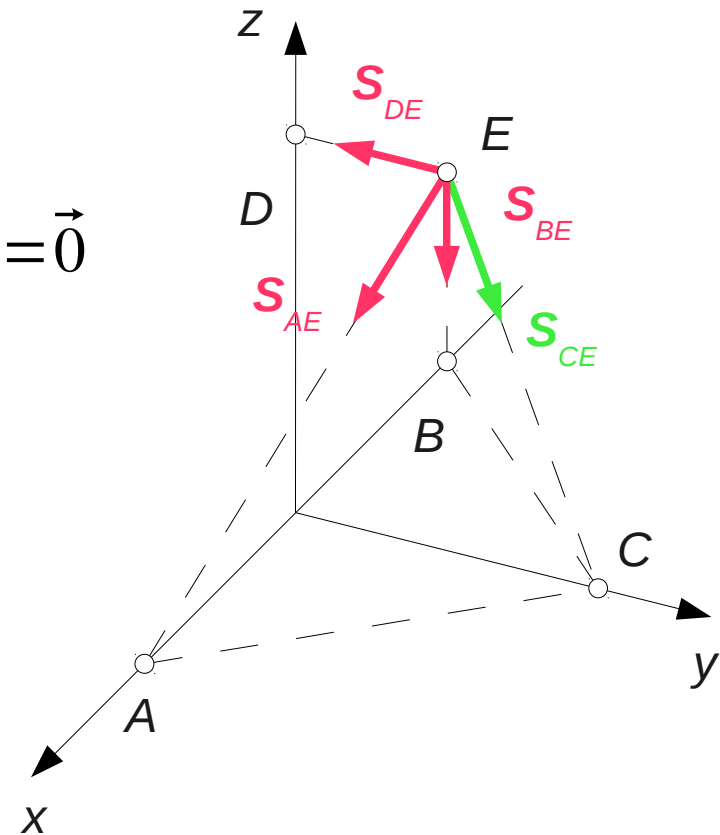
$$-S_{AE} \vec{e}_{AE} - S_{BE} \vec{e}_{BE} - S_{DE} \vec{e}_{DE} - S_{CE} \vec{e}_{CE} = \vec{0}$$

$$\sum F_x = 0 : \frac{1}{\sqrt{11}} (S_{AE} - S_{BE}) = 0$$

$$\sum F_z = 0 :$$

$$-\frac{3}{\sqrt{11}} (S_{AE} + S_{BE}) - 0,9715 S_{CE} = 0$$

$$\sum F_y = 0 : -\frac{1}{\sqrt{11}} (S_{AE} + S_{BE}) + 0,2371 S_{CE} - S_{DE} = 0$$



5. Räumliche Tragwerke

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_{BE} = S_{AE}$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow 6S_{AE} = -0,9715\sqrt{11}S_{CE} = -3,222S_{CE}$$

$$\rightarrow S_{AE} = S_{BE} = -0,5370 \cdot 1,029 F = \underline{-0,5526 F}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow S_{DE} = 0,2371S_{CE} - \frac{2}{\sqrt{11}}S_{AE}$$

$$\rightarrow S_{DE} = \left(0,2371 \cdot 1,029 + \frac{2}{\sqrt{11}} \cdot 0,5526 \right) F = \underline{0,5772 F}$$

5. Räumliche Tragwerke

- Ergebnis:

Stab	Kraft	
<i>AC</i>	$-0,1410F$	Druck
<i>BC</i>	$-0,1410F$	Druck
<i>AE</i>	$-0,5526F$	Druck
<i>BE</i>	$-0,5526F$	Druck
<i>CE</i>	$1,029F$	Zug
<i>DE</i>	$0,5772F$	Zug