

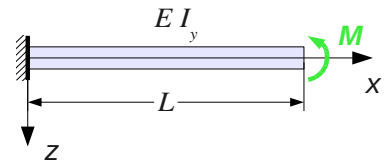
3.3 Biegelinie

Lösungen

Aufgabe 1

Aus dem Gleichgewicht für den rechten Teilbalken folgt für das Biegemoment:

$$M_y(x) = M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$



Zweimaliges Integrieren führt auf die Biegelinie:

$$EI_y \frac{dw}{dx}(x) = -Mx + c_1$$

$$EI_y w(x) = -\frac{1}{2} Mx^2 + c_1 x + c_2$$

Die Konstanten werden aus den Randbedingungen am linken Ende bestimmt:

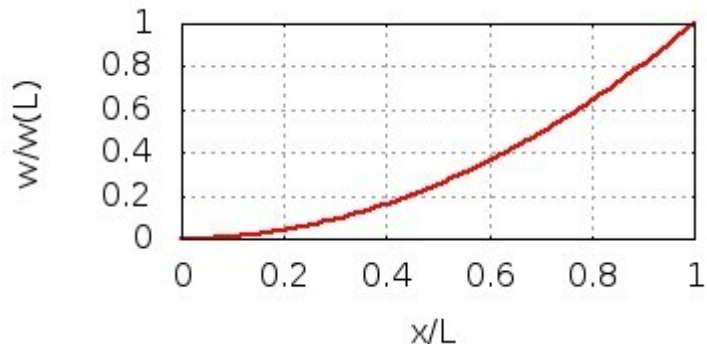
$$\frac{dw}{dx}(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0, \quad w(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

Damit gilt für die Biegelinie:

$$w(x) = -\frac{Mx^2}{2EI_y}$$

Die Verschiebung am freien Ende berechnet sich zu

$$w(L) = -\frac{ML^2}{2EI_y}$$

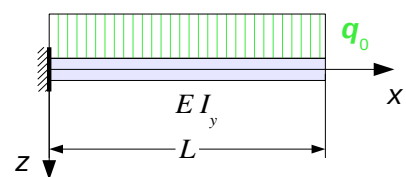


Aufgabe 2

Die konstante Streckenlast muss viermal integriert werden:

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0$$

$$EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0 x + c_1 = -Q_z$$



$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} q_0 x^2 + c_1 x + c_2 = -M_y$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$E I_y w = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Randbedingungen:

Linkes Ende: $\frac{dw}{dx}(0) = 0 \rightarrow c_3 = 0$

$w(0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$

Rechtes Ende: $Q_z(L) = 0 \rightarrow q_0 L + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = -q_0 L$

$M_y(L) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} q_0 L^2 + c_1 L + c_2 = 0$

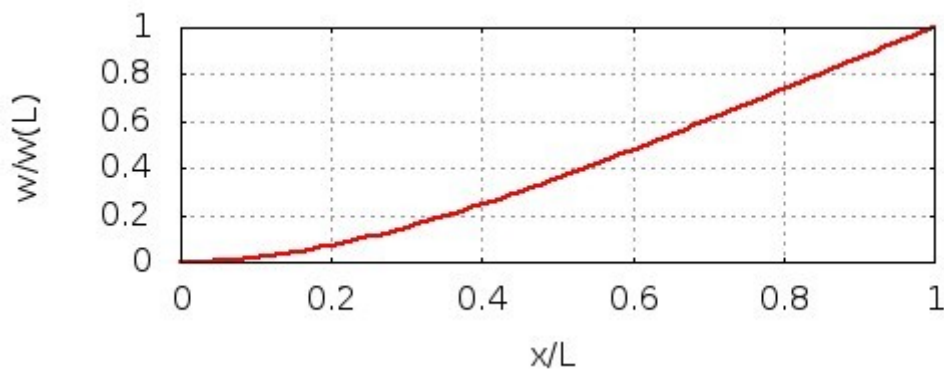
$\rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} q_0 L^2 + q_0 L^2 = \frac{1}{2} q_0 L^2$

Biegelinie:

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24 E I_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Verschiebung am freien Ende:

$$w(L) = \frac{q_0 L^4}{24 E I_y} (1 - 4 + 6) = \frac{q_0 L^4}{8 E I_y}$$



Aufgabe 3

a) Gewichtskraft als Einzelkraft

Schnittlasten:

$$Q_z(x) = - \left(-A_z + \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 G \right)$$

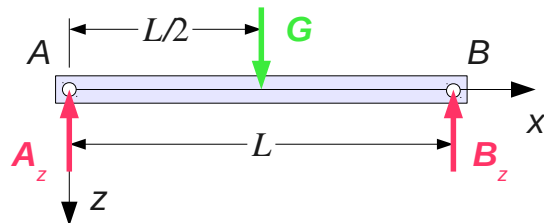
$$M_y(x) = A_z x - \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle G + c_1$$

$$M_y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$M_y(L) = 0 : A_z L - \frac{L}{2} G = 0 \rightarrow A_z = \frac{G}{2}$$

$$\rightarrow M_y = \frac{G}{2} x - \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle G : M_{y\max} = M_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{4} G L$$

$$\text{Mit } G = \rho g A L \text{ folgt: } M_{y\max} = \frac{1}{4} \rho g A L^2$$



Biegelinie:

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = -\frac{G}{2} x + \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle G$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = -\frac{G}{4} x^2 + \frac{1}{2} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^2 G + c_2$$

$$E I_y w = -\frac{G}{12} x^3 + \frac{1}{6} \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^3 G + c_2 x + c_3$$

$$w(0) = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$w(L) = 0 : -\frac{GL^3}{12} + \frac{GL^3}{48} + c_2 L = 0 \rightarrow c_2 = \frac{GL^2}{16}$$

$$w(x) = \frac{GL^3}{48 E I_y} \left[-4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 8 \left\langle \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right\rangle^3 + 3 \frac{x}{L} \right]$$

$$w_{\max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{GL^3}{48 E I_y} = \frac{\rho g A L^4}{48 E A i_y^2} = \frac{1}{48} \frac{\rho g L^4}{E i_y^2} = 0,02083 \frac{\rho g L^4}{E i_y^2}$$

b) Gewichtskraft als Streckenlast

Schnittlasten:

$$q_z = q_0 = \rho g A$$

$$Q_z(x) = -\rho g A x + c_1$$

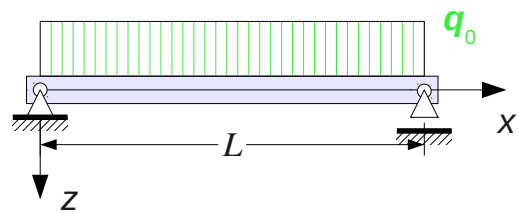
$$M_y(x) = -\frac{1}{2} \rho g A x^2 + c_1 x + c_2$$

$$M_y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$M_y(L) = 0 : -\frac{1}{2} \rho g A L^2 + c_1 L = 0 \rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \rho g A L$$

$$\rightarrow Q_z(x) = \frac{1}{2} \rho g A L \left(1 - 2 \frac{x}{L}\right), \quad M_y(x) = \frac{1}{2} \rho g A L^2 \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$M_{y_{\max}} = M_y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2} \rho g A L^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} q_0 L^2 = \underline{\underline{\frac{1}{8} \rho g A L^2}}$$



Biegelinie:

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = \frac{1}{2} \rho g A L^2 \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2} \rho g A L^3 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_2\right] = \frac{\rho g A L^3}{12} \left[2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6 c_2\right]$$

$$E I_y w = \frac{\rho g A L^4}{12} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^4 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 6 c_2 \frac{x}{L} + c_3\right]$$

$$= \frac{\rho g A L^4}{24} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 12 c_2 \frac{x}{L} + 2 c_3\right]$$

$$w(0) = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$w(L) = 0 : 1 - 2 + 12 c_2 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{1}{12}$$

$$\rightarrow w(x) = \frac{\rho g A L^4}{24 E I_y} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{x}{L}\right]$$

$$w_{\max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\rho g A L^4}{24 E I_y} \left[\frac{1}{16} - \frac{2}{8} + \frac{1}{2}\right] = \frac{5}{384} \frac{\rho g A L^4}{E I_y} = 0,01302 \frac{\rho g L^4}{E i_y^2}$$

Die mit der Gewichtskraft als Einzelkraft ermittelten Ergebnisse sind deutlich zu groß.

Aufgabe 4

a) Biegelinie

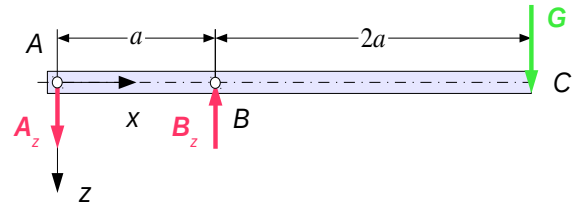
Lagerkräfte:

$$\sum M^A = 0 : a B_z - 3a G = 0$$

$$\rightarrow B_z = 3G$$

$$\sum M^B = 0 : a A_z - 2a G = 0$$

$$\rightarrow A_z = 2G$$

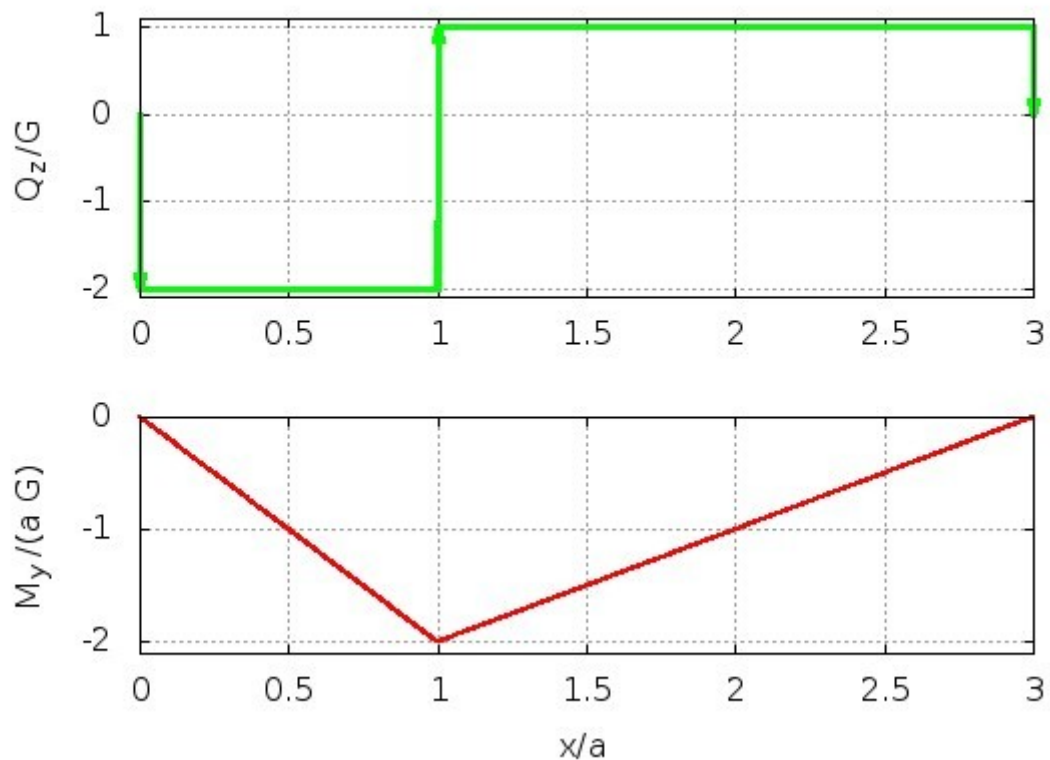


Querkraft: $Q_z(x) = -(A_z - \langle x-a \rangle^0 B_z) = -2G + 3\langle x-a \rangle^0 G$

Biegemoment: $M_y(x) = -2Gx + 3\langle x-a \rangle G + c_1$

$$M_y(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$M_y(3a) = -6aG + 3 \cdot 2aG = 0$$



Biegelinie: $E I_y \frac{dw}{dx}(x) = G x^2 - \frac{3}{2} \langle x-a \rangle^2 G + c_2$

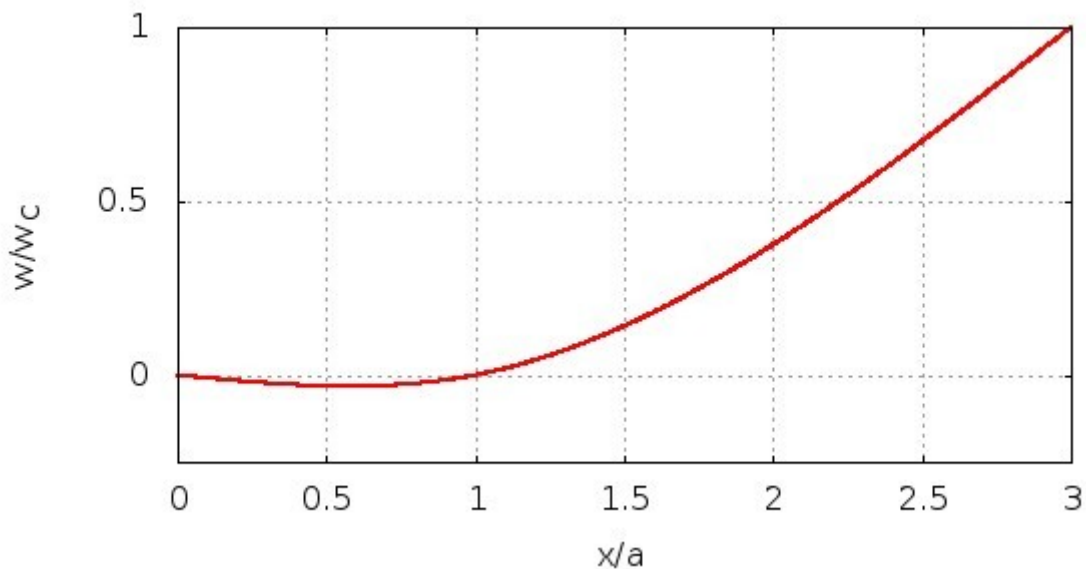
$$E I_y w(x) = \frac{1}{3} G x^3 - \frac{1}{2} \langle x-a \rangle^3 G + c_2 x + c_3$$

$$w(0)=0 \rightarrow c_3=0$$

$$w(a)=0 \rightarrow \frac{1}{3} G a^3 + c_2 a = 0 \rightarrow c_2 = -\frac{1}{3} G a^2$$

Ergebnis:

$$w(x) = \frac{G a^3}{6 E I_y} \left[2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 3 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 - 2 \frac{x}{a} \right]$$



b) Durchbiegung im Punkt C

$$w_C = w(3a) = \frac{G a^3}{6 E I_y} (2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 2^3 - 2 \cdot 3) = 4 \frac{G a^3}{E I_y}$$

Zahlenwert:

$$w_C = 4 \cdot \frac{600 \text{ N} \cdot 10^9 \text{ mm}^3}{5 \cdot 10^{11} \text{ Nmm}^2} = \underline{4,800 \text{ mm}}$$

Aufgabe 5

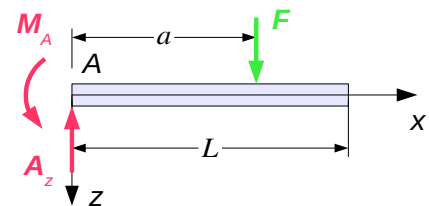
Schnittlasten:

$$Q_z(x) = -(-A_z + \langle x-a \rangle^0 F)$$

$$Q_z(L) = 0 : A_z - F = 0 \rightarrow A_z = F$$

$$M_y(x) = F(x - \langle x-a \rangle) + c_1$$

$$M_y(L) = 0 \rightarrow F(L - L + a) + c_1 = 0 \\ \rightarrow c_1 = -a F$$



$$\rightarrow M_y(x) = F(x - a - \langle x - a \rangle)$$

Biegelinie:

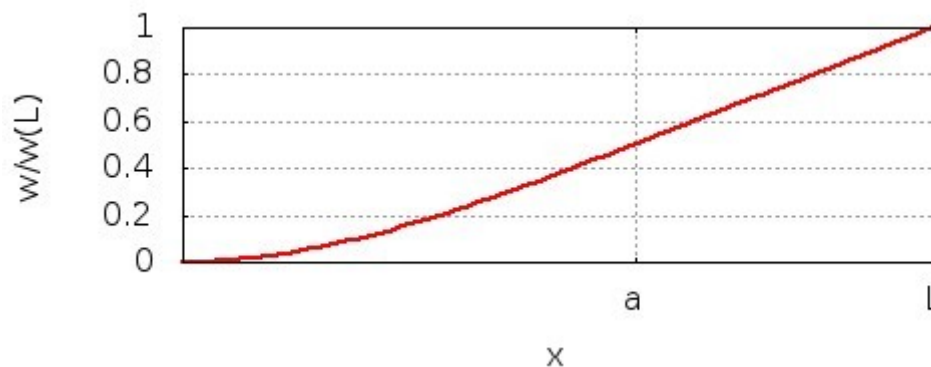
$$EI_y \frac{dw}{dx}(x) = -F \left(\frac{1}{2} x^2 - a x - \frac{1}{2} \langle x - a \rangle^2 \right) + c_2$$

$$\frac{dw}{dx}(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$EI_y w(x) = -F \left(\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} a x^2 - \frac{1}{6} \langle x - a \rangle^3 \right) + c_3$$

$$w(0) = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$\rightarrow w(x) = -\frac{F L^3}{6 E I_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^3 - 3 \frac{a}{L} \left(\frac{x}{L} \right)^2 - \left\langle \frac{x}{L} - \frac{a}{L} \right\rangle^3 \right]$$



Verschiebung am freien Ende:

$$\begin{aligned} w(L) &= -\frac{F L^3}{6 E I_y} \left(1 - 3 \frac{a}{L} - \left(1 - \frac{a}{L} \right)^3 \right) \\ &= -\frac{F L^3}{6 E I_y} \left[1 - 3 \frac{a}{L} - \left(1 - 3 \frac{a}{L} + 3 \left(\frac{a}{L} \right)^2 - \left(\frac{a}{L} \right)^3 \right) \right] \\ &= \frac{F L^3}{6 E I_y} \left[3 \left(\frac{a}{L} \right)^2 - \left(\frac{a}{L} \right)^3 \right] \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Aus dem Gleichgewicht für den rechten Teilbalken folgt für das Biegemoment:

$$M_y(x) = (1 - \langle x - a \rangle^0) M$$

Biegelinie: $E I_y \frac{dw}{dx}(x) = -(x - \langle x - a \rangle) M + c_1$

$$\frac{dw}{dx}(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$E I_y w(x) = -\frac{1}{2} (x^2 - \langle x - a \rangle^2) M + c_2$$

$$w(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

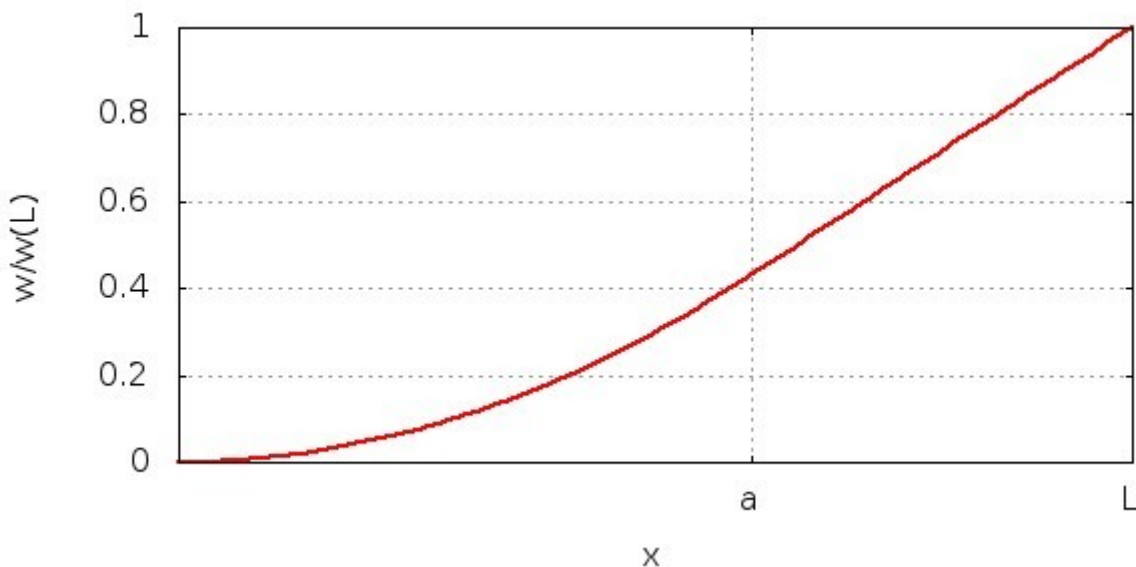
Ergebnis: $w(x) = \frac{M L^2}{2 E I_y} \left[\left\langle \frac{x}{L} - \frac{a}{L} \right\rangle^2 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$

Verschiebung am freien Ende:

$$w(L) = \frac{M L^2}{2 E I_y} \left[\left(1 - \frac{a}{L} \right)^2 - 1 \right] = \frac{M L^2}{2 E I_y} \left[\left(\frac{a}{L} \right)^2 - 2 \frac{a}{L} \right]$$

Probe: Für $a = L$ folgt

$$w(L) = \frac{M L^2}{2 E I_y} (1 - 2) = -\frac{M L^2}{2 E I_y}.$$



Aufgabe 7

Schnittlasten:

$$q(x) = \langle x - a \rangle^0 q_0$$

$$Q_z(x) = -\langle x - a \rangle q_0 + c_1$$

$$Q_z(L)=0 \rightarrow -(L-a)q_0+c_1=0 \rightarrow c_1=(L-a)q_0$$

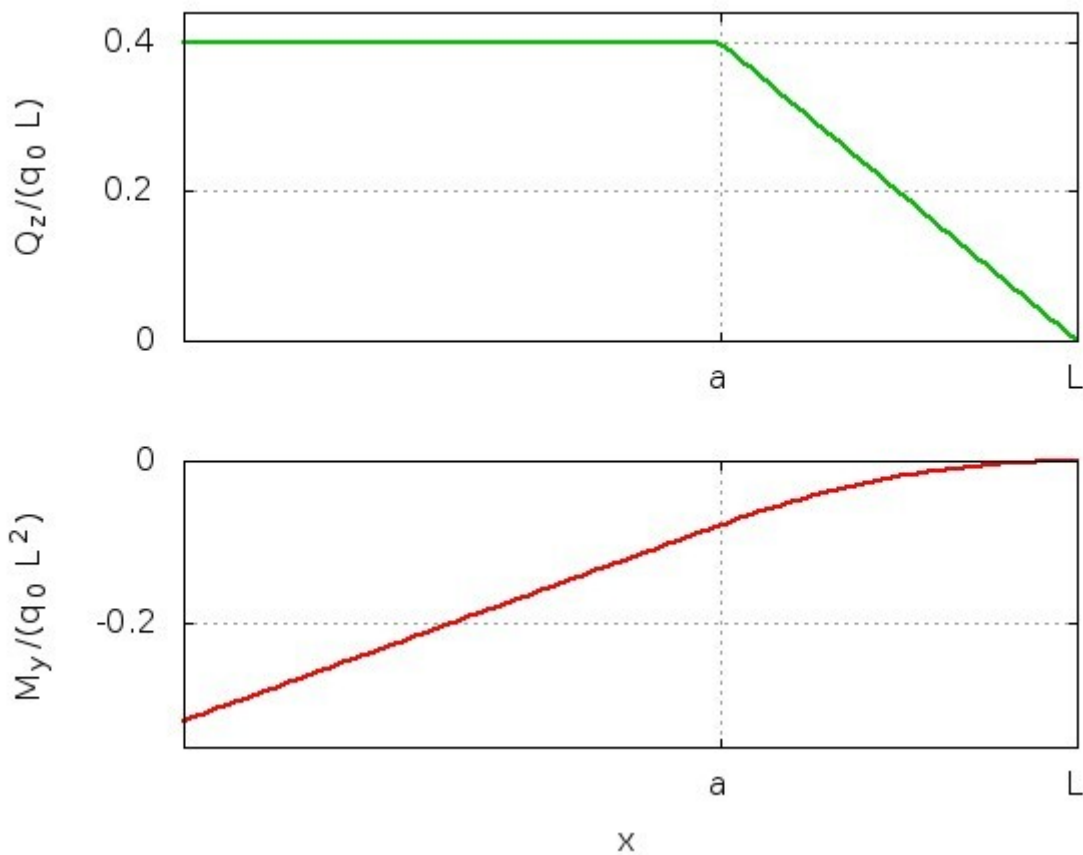
$$\rightarrow Q_z(x)=(L-a-\langle x-a \rangle)q_0$$

$$M_y(x)=(L-a)q_0x-\frac{1}{2}\langle x-a \rangle^2q_0+c_2$$

$$M_y(L)=0 \rightarrow (L-a)q_0L-\frac{1}{2}(L-a)^2q_0+c_2=0$$

$$\rightarrow c_2=\frac{1}{2}(L-a)q_0(L-a-2L)=-\frac{1}{2}(L^2-a^2)q_0$$

$$\rightarrow M_y(x)=q_0\left((L-a)x-\frac{1}{2}\langle x-a \rangle^2-\frac{1}{2}(L^2-a^2)\right)$$



Biegelinie:

$$EI_y \frac{dw}{dx}(x) = -q_0 \left(\frac{1}{2}(L-a)x^2 - \frac{1}{6}\langle x-a \rangle^3 - \frac{1}{2}(L^2-a^2)x + c_3 \right)$$

$$\frac{dw}{dx}(0)=0 \rightarrow c_3=0$$

$$EI_y w(x) = -q_0 \left(\frac{1}{6} (L-a)x^3 - \frac{1}{24} \langle x-a \rangle^4 - \frac{1}{4} (L^2 - a^2)x^2 + c_4 \right)$$

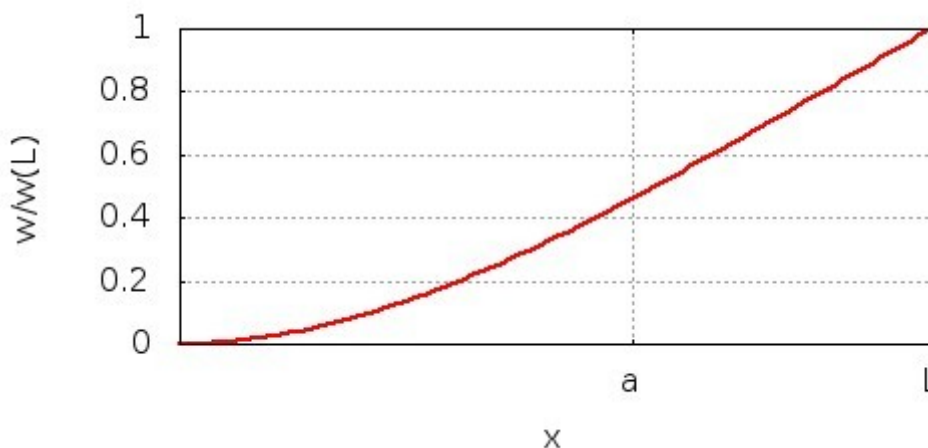
$$w(0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

Ergebnis:

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24 EI_y} \left[6 \left(1 - \left(\frac{a}{L} \right)^2 \right) \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left\langle \frac{x}{L} - \frac{a}{L} \right\rangle^4 - 4 \left(1 - \frac{a}{L} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

Verschiebung am freien Ende:

$$\begin{aligned} w(L) &= \frac{q_0 L^4}{24 EI_y} \left[6 \left(1 - \left(\frac{a}{L} \right)^2 \right) + \left(1 - \frac{a}{L} \right)^4 - 4 \left(1 - \frac{a}{L} \right) \right] \\ &= \frac{q_0 L^4}{24 EI_y} \left[6 - 6 \left(\frac{a}{L} \right)^2 + 1 - 4 \frac{a}{L} + 6 \left(\frac{a}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{a}{L} \right)^3 + \left(\frac{a}{L} \right)^4 - 4 + 4 \frac{a}{L} \right] \\ &= \frac{q_0 L^4}{24 EI_y} \left[3 - 4 \left(\frac{a}{L} \right)^3 + \left(\frac{a}{L} \right)^4 \right] \end{aligned}$$



Probe: Für $a = 0$ folgt

$$w(L) = \frac{q_0 L^4}{24 EI_y} \cdot 3 = \frac{q_0 L^4}{8 EI_y}$$

Aufgabe 8

Schnittlasten:

$$q_z(x) = q_0 \left(1 - \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle \right)$$

$$Q_z(x) = -q_0 \left(x - \frac{a}{2} \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^2 + c_1 \right)$$

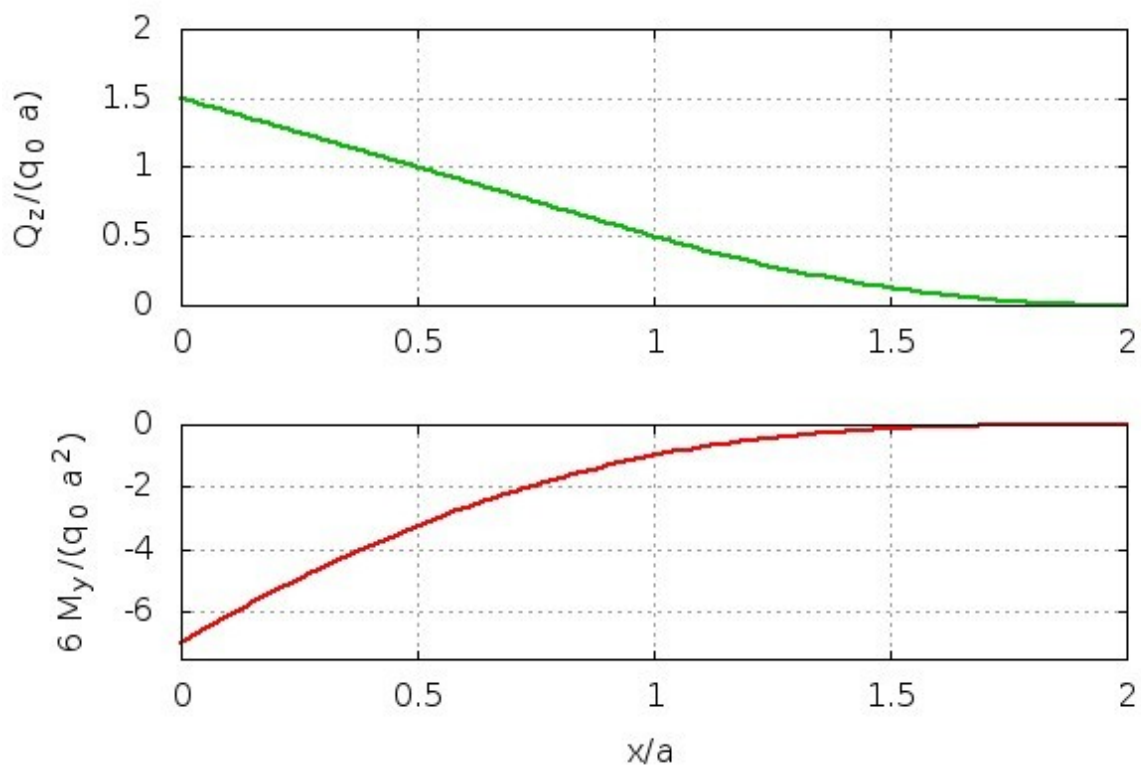
$$Q_z(2a) = 0 : 2a - \frac{a}{2} + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{3}{2}a$$

$$Q_z(x) = -q_0 a \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^2 - \frac{3}{2} \right)$$

$$M_y(x) = -q_0 a \left(\frac{x^2}{2a} - \frac{a}{6} \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 - \frac{3}{2}x + c_2 \right)$$

$$M_y(2a) = 0 : 2a - \frac{a}{6} - 3a + c_2 = 0 \rightarrow c_2 = \frac{7}{6}a$$

$$M_y(x) = -\frac{1}{6} q_0 a^2 \left[3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 - 9 \frac{x}{a} + 7 \right]$$



Biegelinie:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}(x) = -M_y(x) = \frac{1}{6} q_0 a^2 \left[3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 - 9 \frac{x}{a} + 7 \right]$$

$$EI_y \frac{dw}{dx}(x) = \frac{1}{6} q_0 a^2 \left[a \left(\frac{x}{a} \right)^3 - \frac{a}{4} \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^4 - \frac{9}{2} \frac{x^2}{a} + 7x + c_3 \right]$$

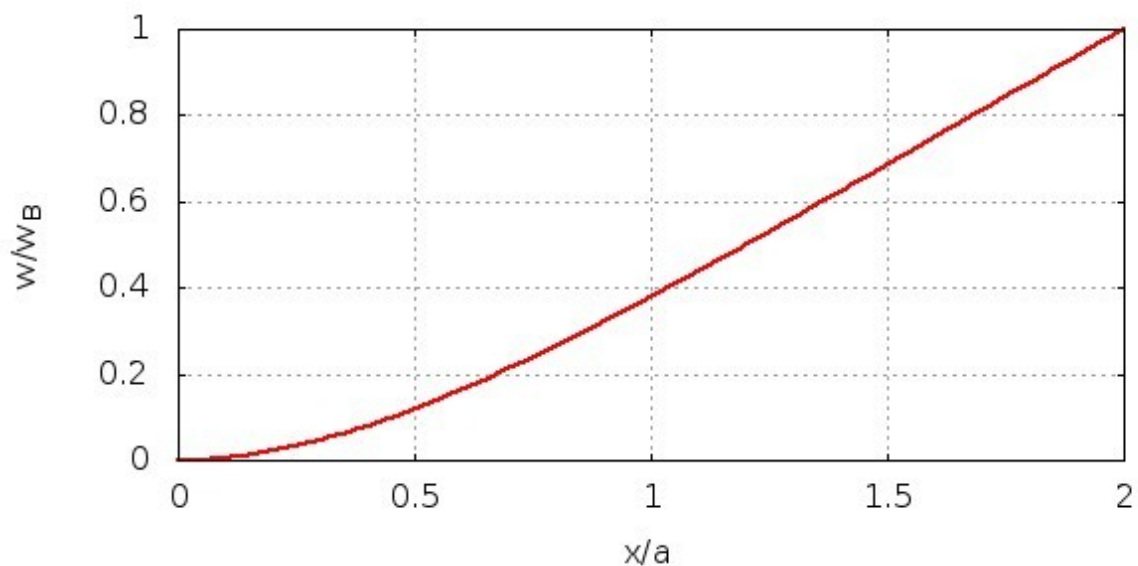
$$\frac{dw}{dx}(0)=0 \rightarrow c_3=0$$

$$EI_y \frac{dw}{dx}(x) = \frac{q_0 a^3}{24} \left[4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^4 - 18 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 28 \frac{x}{a} \right]$$

$$EI_y w(x) = \frac{q_0 a^3}{24} \left[a \left(\frac{x}{a} \right)^4 - \frac{a}{5} \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^5 - 6a \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 14 \frac{x^2}{a} + c_4 \right]$$

$$w(0)=0 \rightarrow c_4=0$$

$$w(x) = \frac{q_0 a^4}{120 EI_y} \left[5 \left(\frac{x}{a} \right)^4 - \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^5 - 30 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 70 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]$$

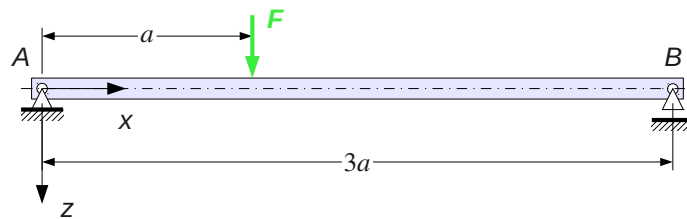


Durchbiegung am Flügelende:

$$w_B = w(2a) = \frac{q_0 a^4}{120 EI_y} (5 \cdot 16 - 1 - 30 \cdot 8 + 70 \cdot 4) = \frac{119}{120} \frac{q_0 a^4}{EI_y}$$

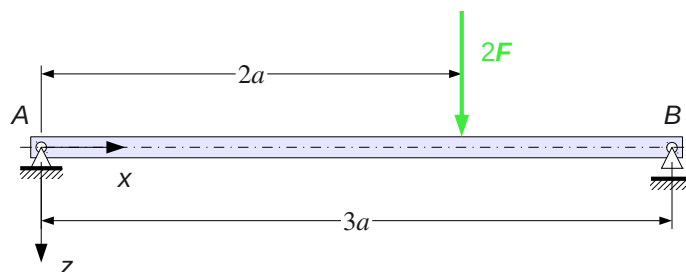
Aufgabe 9

Die Aufgabe lässt sich am einfachsten mit Superposition lösen.

Lastfall 1

Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

$$\begin{aligned}
 w_1(x) &= \frac{F(3a)^3}{6EI_y} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} \left(2 - \frac{1}{3}\right) \frac{x}{3a} - \left(\frac{x}{3a}\right)^3 \right) + \left\langle \frac{x}{3a} - \frac{1}{3} \right\rangle^3 \right] \\
 &= \frac{F a^3}{18EI_y} \left[10 \frac{x}{a} - 2 \left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 \right] \\
 w_1(a) &= \frac{F a^3}{18EI_y} (10 - 2) = \frac{4}{9} \frac{F a^3}{EI_y}, \quad w(2a) = \frac{F a^3}{18EI_y} (20 - 16 + 3) = \frac{7}{18} \frac{F a^3}{EI_y}
 \end{aligned}$$

Lastfall 2

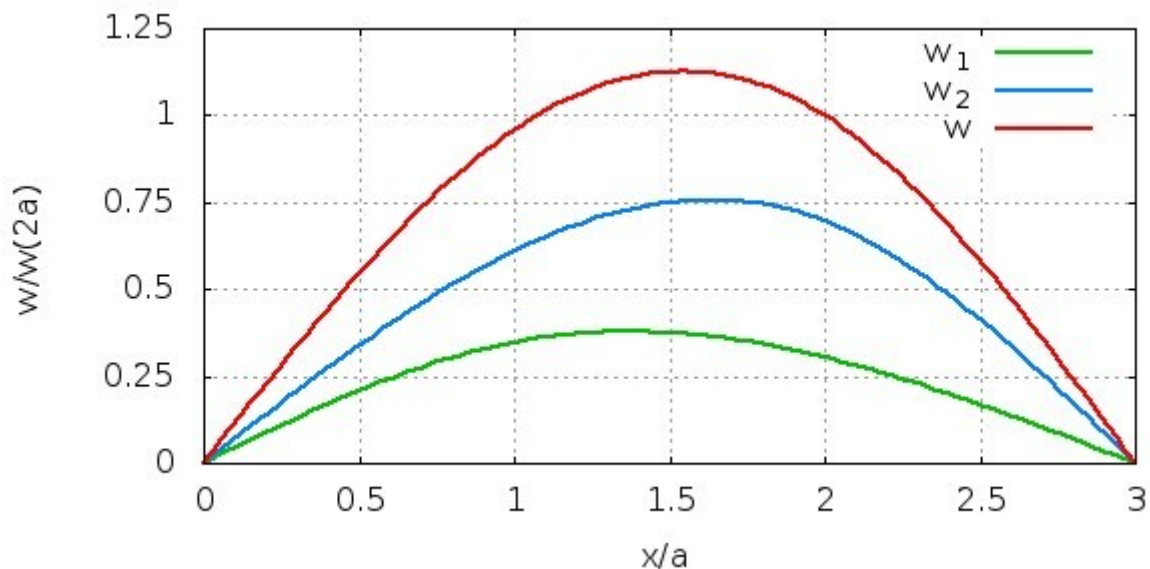
Aus der Biegeliniertabelle kann entnommen werden:

$$\begin{aligned}
 w_2(x) &= \frac{2F(3a)^3}{6EI_y} \left[\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3} \left(2 - \frac{2}{3}\right) \frac{x}{3a} - \left(\frac{x}{3a}\right)^3 \right) + \left\langle \frac{x}{3a} - \frac{2}{3} \right\rangle^3 \right] \\
 &= \frac{F a^3}{9EI_y} \left[8 \frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3 \left\langle \frac{x}{a} - 2 \right\rangle^3 \right] \\
 w_2(a) &= \frac{F a^3}{9EI_y} (8 - 1) = \frac{7}{9} \frac{F a^3}{EI_y}, \quad w_2(2a) = \frac{F a^3}{9EI_y} (16 - 8) = \frac{8}{9} \frac{F a^3}{EI_y}
 \end{aligned}$$

Überlagerung

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) = \frac{F a^3}{18 E I_y} \left[26 \frac{x}{a} - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 3 \left\langle \frac{x}{a} - 1 \right\rangle^3 + 6 \left\langle \frac{x}{a} - 2 \right\rangle^3 \right]$$

$$w(a) = w_1(a) + w_2(a) = \frac{11}{9} \frac{F a^3}{E I_y}, \quad w(2a) = w_1(2a) + w_2(2a) = \frac{23}{18} \frac{F a^3}{E I_y}$$



Aufgabe 10

Die Belastung wird in drei Lastfälle aufgeteilt:

1. Lastfall: Kraft F_1
2. Lastfall: Kraft F_2
3. Lastfall: Eigengewicht

Das größte Biegemoment tritt in allen drei Lastfällen an der Einspannstelle auf.

Biegesteifigkeit: $E I_y = 210000 \text{ N/mm}^2 \cdot 2140 \cdot (10 \text{ mm})^4 = 4,494 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$

Lastfall 1: Kraft F_1

Biegemoment an der Einspannstelle: $M_{y1}(0) = F_1 L$

Zahlenwert: $M_{y1}(0) = 8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 2 \cdot 10^3 \text{ mm} = 16 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

Durchbiegung am freien Ende: $w_{B1} = \frac{F_1 L^3}{3 E I_y}$

Zahlenwert: $w_{B1} = \frac{8 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 2000^3 \text{ mm}^3}{3 \cdot 4,494 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2} = 4,747 \text{ mm}$

Lastfall 2: Kraft F_2

Biegemoment an der Einspannstelle: $M_{y2}(0) = F_2 a$

Zahlenwert: $M_{y2}(0) = 10 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1500 \text{ mm} = 15 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$

Durchbiegung am freien Ende: $w_{B2} = \frac{F_2 L^3}{6 E I_y} \left[3 \left(\frac{a}{L} \right)^2 - \left(\frac{a}{L} \right)^3 \right]$

Zahlenwert: $\frac{F_2 L^3}{6 E I_y} = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 2000^3 \text{ mm}^3}{6 \cdot 4,494 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2} = 2,967 \text{ mm}$

$$3 \left(\frac{a}{L} \right)^2 - \left(\frac{a}{L} \right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^3 = \frac{81}{64}$$

$$w_{B2} = \frac{81}{64} \cdot 2,967 \text{ mm} = 3,755 \text{ mm}$$

Lastfall 3: Eigengewicht

Biegemoment an der Einspannstelle: $M_{y3}(0) = \frac{(G/L) L^2}{2}$

Zahlenwert: $M_{y3} = \frac{263 \text{ N/m} \cdot 2^2 \text{ m}^2}{2} = 526 \text{ Nm} = 526 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$

Durchbiegung am freien Ende: $w_{B3} = \frac{(G/L) L^4}{8 E I_y}$

Zahlenwert: $w_{B3} = \frac{263 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm} \cdot 2000^4 \text{ mm}^4}{8 \cdot 4,494 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2} = 0,1170 \text{ mm}$

Gesamtergebnisse

Durchbiegung am freien Ende:

$$w_B = w_{B1} + w_{B2} + w_{B3} = \underline{8,619 \text{ mm}}$$

Biegemoment an der Einspannstelle:

$$M_y(0) = M_{y1}(0) + M_{y2}(0) + M_{y3}(0) = 31,53 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Biegespannung: $\sigma = \frac{M_y}{W_y} = \frac{31,53 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{213 \cdot 10^3 \text{ mm}^3} = 148 \text{ MPa}$

Sicherheit: $S_F = \frac{R_e}{\sigma} = \frac{240 \text{ MPa}}{148 \text{ MPa}} = 1,6$

Aufgabe 11

Die Aufgabe wird mit Superposition gelöst.

Lastfall 1: Streckenlast

Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_1(x) = \frac{q_0 (4a)^4}{24 E I_y} \left[\left(\frac{x}{4a} \right)^4 - \left\langle \frac{x}{4a} - \frac{1}{2} \right\rangle^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{x}{4a} \right)^3 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \right) \frac{x}{4a} \right]$$

$$= \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^4 - \left\langle \frac{x}{a} - 2 \right\rangle^4 - 6 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 36 \frac{x}{a} \right]$$

$$w_1(2a) = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y} (16 - 6 \cdot 8 + 36 \cdot 2) = \frac{5}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

$$\phi_{1A} = -w'_{1A} = -\frac{q_0 (4a)^3}{24 E I_y} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{4}{2} + 4 \right] = -\frac{3}{2} \frac{q_0 a^3}{E I_y}$$

$$\phi_{1B} = -w'_{1B} = -\frac{q_0 (4a)^3}{24 E I_y} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2 \right] = \frac{7}{6} \frac{q_0 a^3}{E I_y}$$

Lastfall 2: Einzelkraft

Aus der Biegelinientabelle kann entnommen werden:

$$w_2(x) = \frac{F (4a)^3}{6 E I_y} \left[\left(1 - \frac{3}{4} \right) \left(\frac{3}{4} \left(2 - \frac{3}{4} \right) \frac{x}{4a} - \left(\frac{x}{4a} \right)^3 \right) + \left\langle \frac{x}{4a} - \frac{3}{4} \right\rangle^3 \right]$$

$$= \frac{F a^3}{24 E I_y} \left[15 \frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 4 \left\langle \frac{x}{a} - 3 \right\rangle^3 \right]$$

$$w_2(2a) = \frac{F a^3}{24 E I_y} (30 - 8) = \frac{11}{12} \frac{F a^3}{E I_y} = \frac{11}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

$$\phi_{2A} = -w'_{2A} = -\frac{F (4a)^2}{6 E I_y} \cdot \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3}{4} \right) \left(2 - \frac{3}{4} \right) = -\frac{5}{8} \frac{F a^2}{E I_y} = -\frac{5}{2} \frac{q_0 a^3}{E I_y}$$

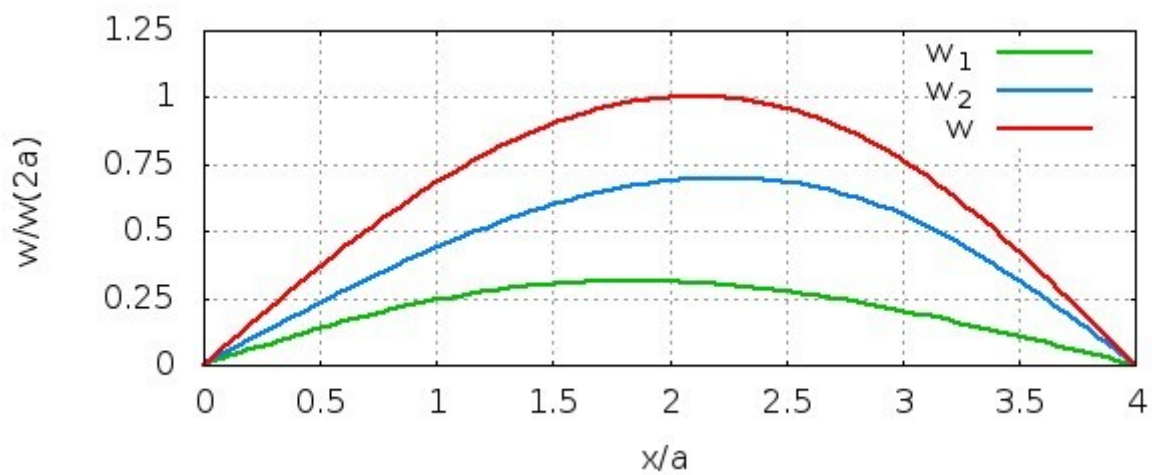
$$\phi_{2B} = -w'_{2B} = \frac{F (4a)^2}{6 E I_y} \cdot \frac{3}{4} \left(1 - \frac{9}{16} \right) = \frac{7}{8} \frac{F a^2}{E I_y} = \frac{7}{2} \frac{q_0 a^3}{E I_y}$$

Überlagerung

$$w(2a) = w_1(2a) + w_2(2a) = \frac{q_0 y^4}{3 E I_y} (5 + 11) = \frac{16}{3} \frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

$$\phi_A = -\frac{q_0 a^3}{2 E I_y} (3 + 5) = -4 \frac{q_0 a^3}{E I_y}$$

$$\phi_B = \frac{q_0 y^3}{E I_y} \left(\frac{7}{6} + \frac{7}{2} \right) = \frac{14}{3} \frac{q_0 a^3}{E I_y}$$

**Aufgabe 12**

Die Aufgabe kann durch dreimalige Integration der Querkraft gelöst werden:

$$Q_z(x) = -(-A_z + \langle x - 3a \rangle^0 F)$$

$$M_y(x) = A_z x - \langle x - 3a \rangle F + c_1$$

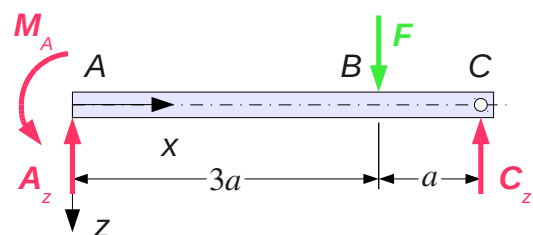
$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2}(x) = -M_y(x) :$$

$$E I_y \frac{dw}{dx}(x) = -\frac{1}{2} A_z x^2 + \frac{1}{2} \langle x - 3a \rangle^2 F - c_1 x + c_2$$

$$E I_y w(x) = -\frac{1}{6} A_z x^3 + \frac{1}{6} \langle x - 3a \rangle^3 F - \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \rightarrow c_3 = 0, \quad \frac{dw}{dx}(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$



$$M_y(4a)=0 : 4aA_z - aF + c_1 = 0 \rightarrow c_1 + 4aA_z = aF$$

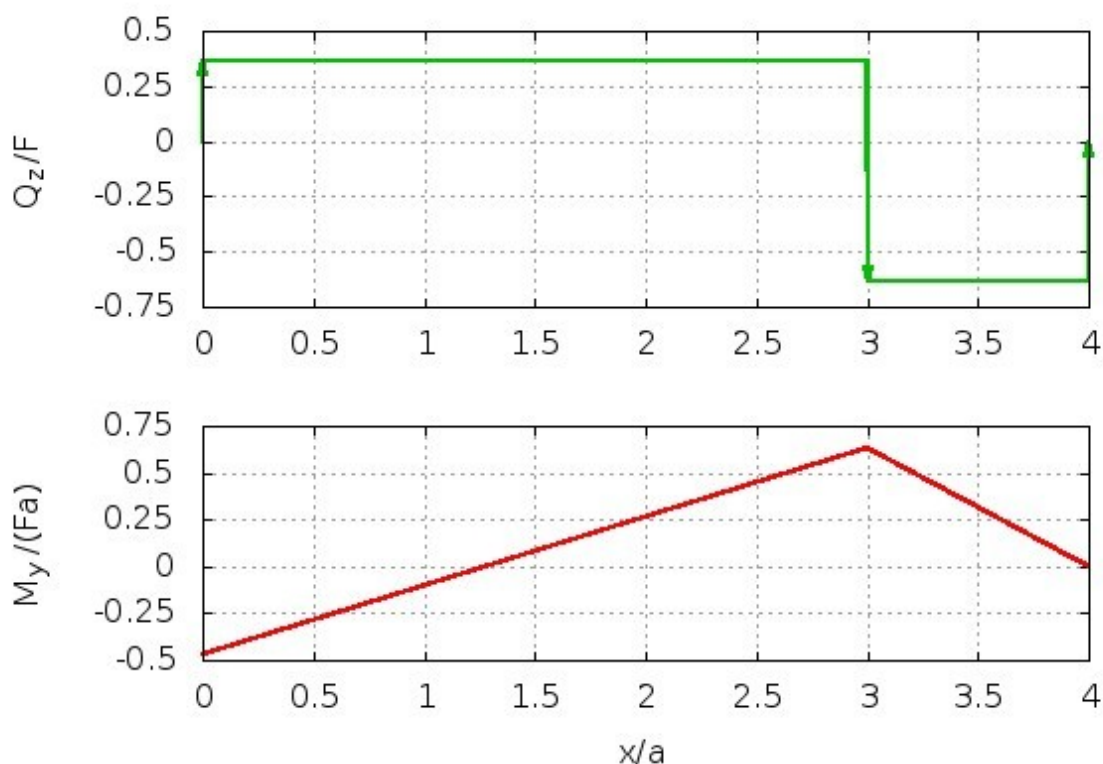
$$w(4a)=0 : -\frac{32}{3}a^3A_z + \frac{1}{6}a^3F - 8c_1a^2 = 0 \rightarrow 48c_1 + 64aA_z = aF$$

Auflösen der Randbedingungen am rechten Ende nach c_1 und A_z ergibt:

$$c_1 = -\frac{15}{32}aF, \quad A_z = \frac{47}{128}F$$

Damit gilt für die Schnittlasten:

$$Q_z(x) = \left(\frac{47}{128} - \langle x-3a \rangle^0 \right) F, \quad M_y(x) = \left(\frac{47}{128}x - \langle x-3a \rangle - \frac{15}{32}a \right) F$$



Die noch fehlenden Lagerreaktionen können aus den Schnittlasten bestimmt werden:

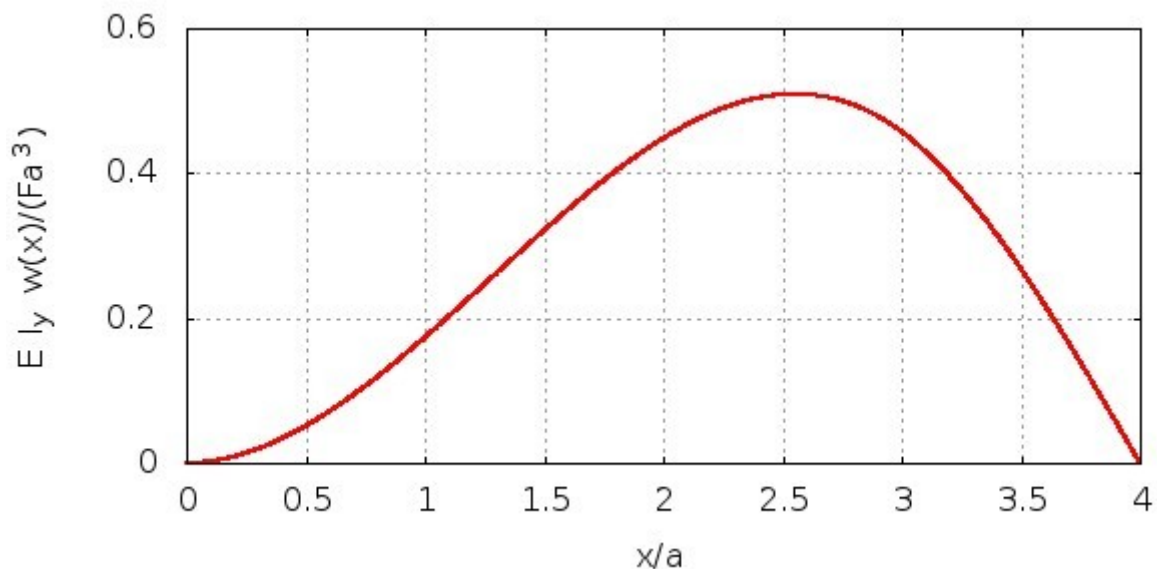
$$M_A = -M_y(0) = \frac{15}{32}aF \quad (\text{negatives Schnittufer})$$

$$C_z = -Q_z(4a) = -\left(\frac{47}{128} - 1 \right) F = \frac{81}{128}F \quad (\text{positives Schnittufer})$$

Für die Biegelinie folgt:

$$w(x) = \frac{F a^3}{E I_y} \left[-\frac{1}{6} \frac{47}{128} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \frac{1}{6} \left\langle \frac{x}{a} - 3 \right\rangle^3 + \frac{15}{64} \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{F a^3}{768 E I_y} \left[180 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 47 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + 128 \left\langle \frac{x}{a} - 3 \right\rangle^3 \right]$$



Verschiebung am Lastangriffspunkt:

$$w_B = w(3a) = \frac{F a^3}{768 E I_y} (180 \cdot 3^2 - 47 \cdot 3^3) = \frac{117}{256} \frac{F a^3}{E I_y}$$

Aufgabe 13

Die Aufgabe kann durch viermalige Integration der Streckenlast gelöst werden:

$$q_z(x) = q_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

$$Q_z(x) = -q_0 \left(x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L} + c_1 L \right) = -\frac{q_0 L}{2} \left(2 \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} + 2 c_1 \right)$$

$$M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{2} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{L^3} + 2 c_1 \frac{x}{L} + c_2 \right) = -\frac{q_0 L^2}{6} \left(3 \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} + 6 c_1 \frac{x}{L} + 3 c_2 \right)$$

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2}(x) = -M_y(x) = \frac{q_0 L^2}{6} \left(3 \frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} + 6 c_1 \frac{x}{L} + 3 c_2 \right)$$

$$EI_y \frac{dw}{dx}(x) = \frac{q_0 L^3}{6} \left(\frac{x^3}{L^3} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{L^4} + 3c_1 \frac{x^2}{L^2} + 3c_2 \frac{x}{L} + c_3 \right)$$

$$EI_y w(x) = \frac{q_0 L^4}{6} \left(\frac{1}{4} \frac{x^4}{L^4} - \frac{1}{20} \frac{x^5}{L^5} + c_1 \frac{x^3}{L^3} + \frac{3}{2} c_2 \frac{x^2}{L^2} + c_3 \frac{x}{L} + c_4 \right)$$

Randbedingungen:

$$w(0)=0 \rightarrow c_4=0, \quad \frac{dw}{dx}(0)=0 \rightarrow c_3=0$$

$$M_y(L)=0 : 3-1+6c_1+3c_2=0 \rightarrow 6c_1+3c_2=-2$$

$$w(L)=0 : \frac{1}{4}-\frac{1}{20}+c_1+\frac{3}{2}c_2=0 \rightarrow 20c_1+30c_2=-4$$

Auflösen der Randbedingungen am rechten Ende nach c_1 und c_2 ergibt:

$$c_1 = -\frac{2}{5}, \quad c_2 = \frac{2}{15}$$

Damit gilt für die Schnittlasten:

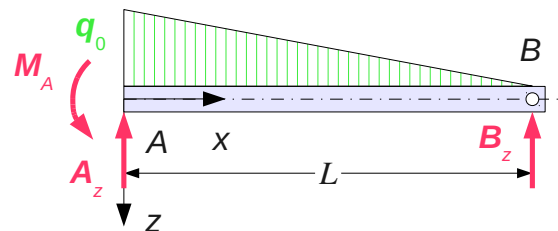
$$Q_z(x) = -\frac{q_0 L}{2} \left(2\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} - \frac{4}{5} \right), \quad M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{6} \left(3\frac{x^2}{L^2} - \frac{x^3}{L^3} - \frac{12}{5}\frac{x}{L} + \frac{2}{5} \right)$$

Die Lagerreaktionen können aus den Schnittlasten bestimmt werden:

$$A_z = Q_z(0) = \frac{2}{5} q_0 L$$

$$B_z = -Q_z(L) = \frac{1}{10} q_0 L$$

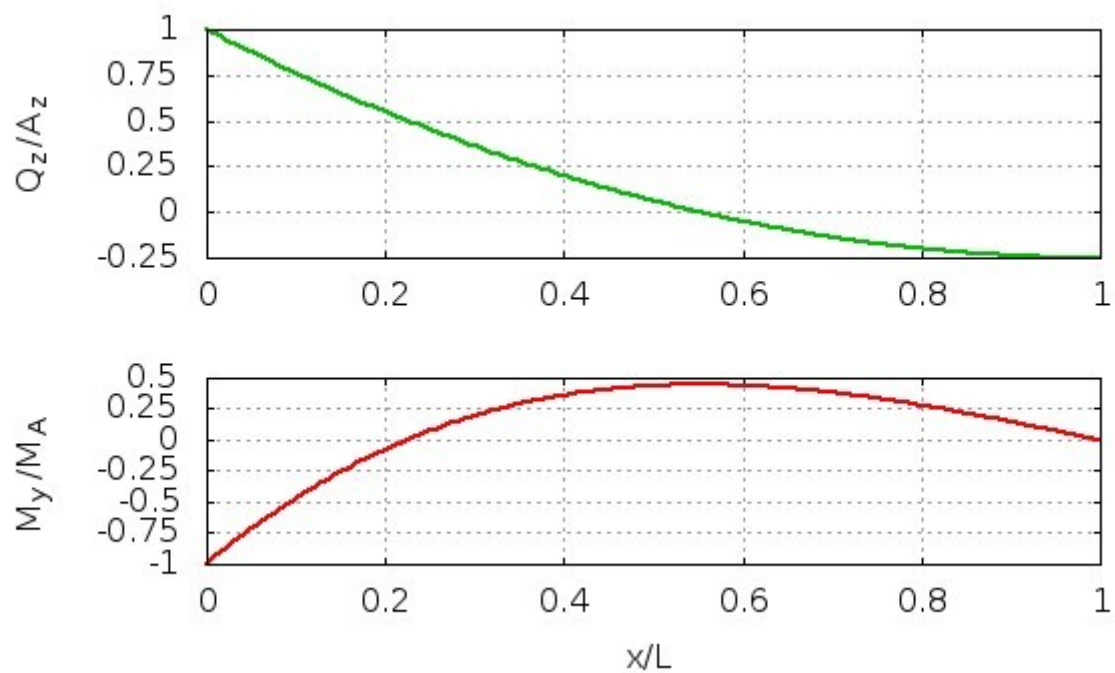
$$M_A = -M_y(0) = \frac{1}{15} q_0 L^2$$



Probe:

$$\sum F_z = -A_z - B_z + \frac{1}{2} q_0 L = \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} \right) q_0 L = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum M^A = M_A - \frac{L}{3} \frac{q_0 L}{2} + L B_z = \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \right) q_0 L^2 = 0 \quad \checkmark$$

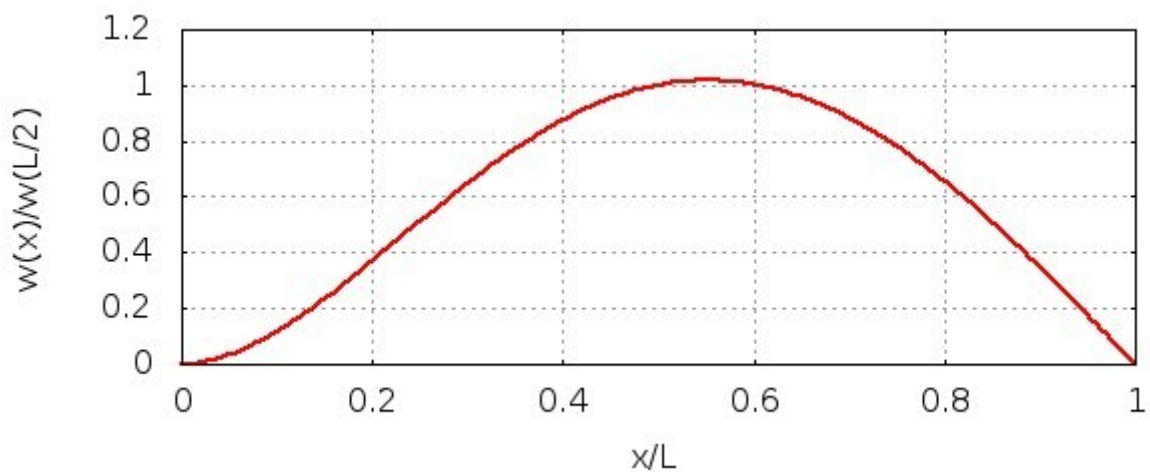


Für die Biegelinie folgt:

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{120 E I_y} \left[5 \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \left(\frac{x}{L} \right)^5 - 8 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Für den Biegewinkel im Punkt B gilt:

$$\phi_B = -\frac{dw}{dx}(L) = -\frac{q_0 L^3}{6 E I_y} \left(1 - \frac{1}{4} + 3c_1 + 3c_2 \right) = -\frac{q_0 L^3}{6 E I_y} \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{6}{5} + \frac{2}{5} \right) = \frac{q_0 L^3}{120 E I_y}$$



Aufgabe 14

Die Aufgabe kann durch viermalige Integration der Streckenlast gelöst werden:

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0$$

$$EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0 x + c_1 = -Q_z(x)$$

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} q_0 x^2 + c_1 x + c_2 = -M_y(x)$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$EI_y w(x) = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Randbedingungen:

$$w(0)=0 \rightarrow c_4=0, \quad \frac{dw}{dx}(L)=0 \rightarrow c_3=0$$

$$w(L)=0 : \frac{1}{24} q_0 L^4 + \frac{1}{6} c_1 L^3 + \frac{1}{2} c_2 L^2 = 0 \rightarrow 4c_1 L + 12c_2 = -q_0 L^2$$

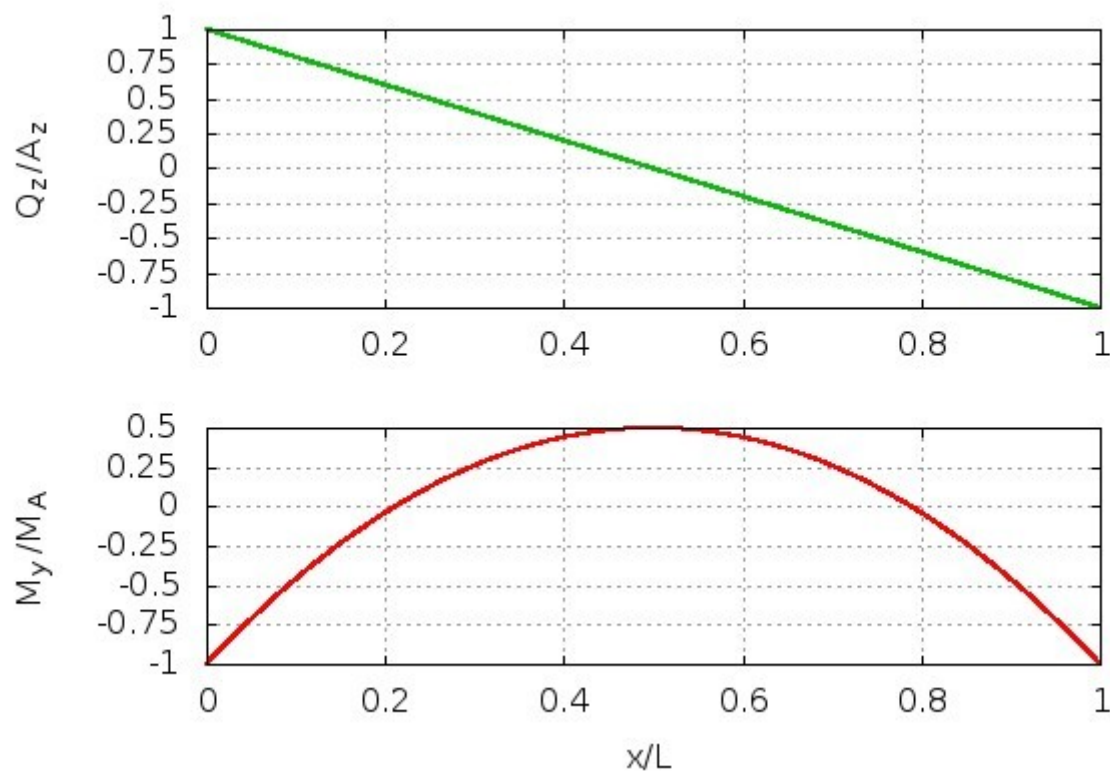
$$\frac{dw}{dx}(L)=0 : \frac{1}{6} q_0 L^3 + \frac{1}{2} c_1 L^2 + c_2 L = 0 \rightarrow 3c_1 L + 6c_2 = -q_0 L^2$$

Auflösen der Randbedingungen am rechten Ende nach c_1 und c_2 ergibt:

$$c_1 = -\frac{1}{2} q_0 L, \quad c_2 = \frac{1}{12} q_0 L^2$$

Damit gilt für die Schnittlasten:

$$Q_z(x) = -\frac{q_0 L}{2} \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right), \quad M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{12} \left[6 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 6 \frac{x}{L} + 1 \right]$$



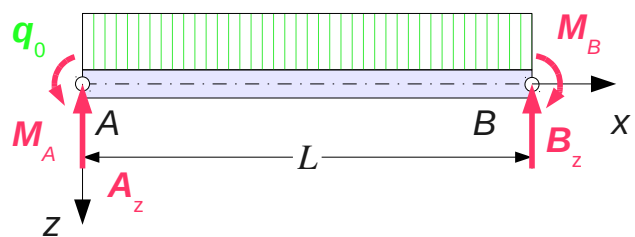
Die Lagerreaktionen können aus den Schnittlasten bestimmt werden:

$$A_z = Q_z(0) = \frac{q_0 L}{2}$$

$$B_z = -Q_z(L) = \frac{q_0 L}{2}$$

$$M_A = -M_y(0) = \frac{q_0 L^2}{12}$$

$$M_B = -M_y(L) = \frac{q_0 L^2}{12}$$



Das größte Biegemoment tritt an der Stelle auf, an der die Querkraft null ist:

$$Q_z(x_{\max}) = 0 : 2 \frac{x_{\max}}{L} - 1 = 0 \rightarrow \frac{x_{\max}}{L} = \frac{1}{2}$$

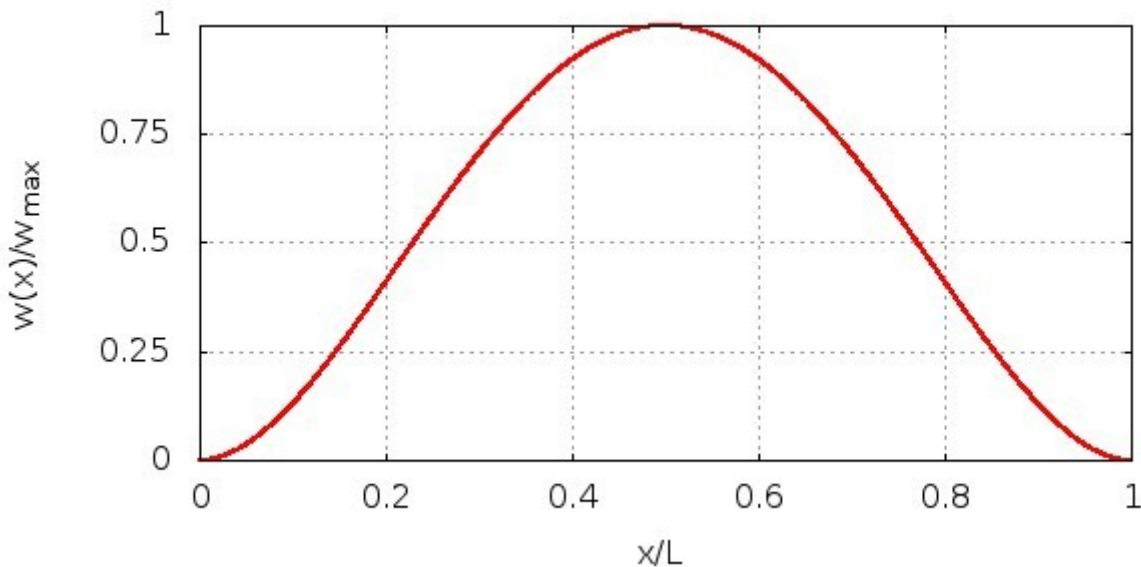
$$M_y(x_{\max}) = -\frac{q_0 L^2}{12} \left(\frac{6}{4} - \frac{6}{2} + 1 \right) = \frac{q_0 L^2}{24}$$

Dieser Wert ist vom Betrag kleiner als die Einspannmomente. Das betragsmäßig größte Biegemoment tritt daher an den Einspannstellen auf:

$$|M_y|_{\max} = |M_y(0)| = \frac{q_0 L^2}{12}$$

Für die Biegelinie folgt:

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24 E I_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$



Die größte Durchbiegung tritt an der Stelle auf, an der der Biegewinkel null ist:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx}(x_{\max}) &= 0 : \frac{1}{6} q_0 x_{\max}^3 - \frac{1}{4} q_0 L x_{\max}^2 + \frac{1}{12} q_0 L^2 x_{\max} = 0 \\ \rightarrow \frac{q_0 L^3}{12} \left(\frac{x_{\max}}{L} \right) \left[2 \left(\frac{x_{\max}}{L} \right)^2 - 3 \frac{x_{\max}}{L} + 1 \right] &= \frac{q_0 L^3}{12} \left(\frac{x_{\max}}{L} \right) \left(\frac{x_{\max}}{L} - 1 \right) \left(2 \frac{x_{\max}}{L} - 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

Der Biegewinkel ist am linken und rechten Ende und in der Mitte null. Die größte Durchbiegung tritt in der Mitte auf: $x_{\max}/L = 1/2$

$$w_{\max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^4}{24 E I_y} \left(\frac{1}{16} - \frac{2}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{q_0 L^4}{384 E I_y}$$

Zahlenwerte:

$$A_z = B_z = \frac{1}{2} \cdot 613 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m} = \underline{1226 \text{ N}}$$

$$M_A = M_B = \frac{1}{12} \cdot 613 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4^2 \text{ m}^2 = \underline{817,3 \text{ Nm}}$$

$$|M_y|_{\max} = |M_A| = \underline{817,3 \text{ Nm}}$$

$$w_{\max} = \frac{613 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm} \cdot (4 \cdot 10^3 \text{ mm})^4}{384 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 5700 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = \underline{0,03414 \text{ mm}}$$

Aufgabe 15

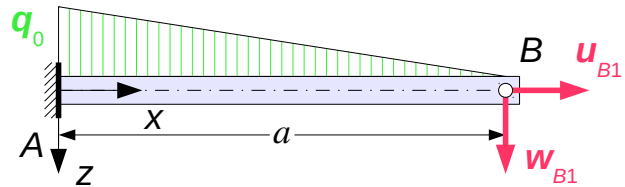
Die Aufgabe wird mit Superposition gelöst.

Lastfall 1: Streckenlast

$$u_{B1} = 0$$

Aus Tabelle:

$$w_{B1} = \frac{q_0 a^4}{30 E I_y}$$

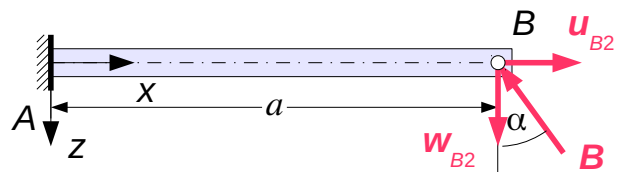


Lastfall 2: Lagerkraft

$$u_{B2} = -\frac{B \sin(\alpha) a}{E A}$$

Aus Tabelle:

$$w_{B2} = -\frac{B \cos(\alpha) a^3}{3 E I_y}$$



Verträglichkeit

$$\sin(\alpha) u_B + \cos(\alpha) w_B = 0$$

Einsetzen der Verschiebungen ergibt:

$$-\frac{B \sin^2(\alpha) a}{E A} + \frac{q_0 a^4 \cos(\alpha)}{30 E I_y} - \frac{B \cos^2(\alpha) a^3}{3 E I_y} = 0$$

Mit

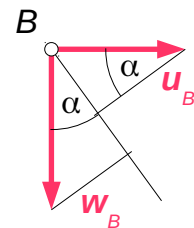
$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} = \frac{1}{1 + 9/16} = \frac{4}{5} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$$

folgt:

$$\frac{4}{5} \frac{q_0 a}{30} = \left(\frac{9}{25} \frac{I_y}{A a^2} + \frac{16}{75} \right) B$$

Mit $I_y / A = i_y^2$ gilt:

$$2 q_0 a = \left(27 \frac{i_y^2}{a^2} + 16 \right) B$$



Auflösen ergibt:

$$B = \frac{2q_0 a}{16 + 27i_y^2/a^2}$$

Mit $i_y/a = \sqrt{3}/9$ folgt: $B = \frac{2}{17} q_0 a$

Lagerreaktionen im Punkt A

$$\sum F_x = 0 : A_x - B \sin(\alpha) = 0$$

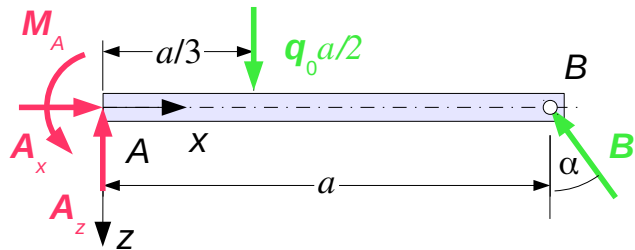
$$\rightarrow A_x = B \sin(\alpha) = \frac{6}{85} q_0 a$$

$$\sum F_z = 0 : -A_z + \frac{1}{2} q_0 a - B \cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow A_z = \frac{1}{2} q_0 a - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{17} q_0 a = \frac{69}{170} q_0 a$$

$$\sum M^A = 0 : M_A + B a \cos(\alpha) - \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2} q_0 a = 0$$

$$\rightarrow M_A = -\frac{2}{17} q_0 a^2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} q_0 a^2 = \frac{37}{510} q_0 a^2$$



Aufgabe 16

a) Schnittlasten und Biegelinie

Integrationen:

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

$$EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{2}{\pi} q_0 L \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + c_1 = -Q_z(x)$$

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{4}{\pi^2} q_0 L^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + c_1 x + c_2 = -M_y(x)$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = -\frac{8}{\pi^3} q_0 L^3 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$EI_y w = \frac{16}{\pi^4} q_0 L^4 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Randbedingungen:

$$M_y(L)=0 : c_1 L + c_2 = 0 \quad (1)$$

$$\phi(0)=0 : c_3=0$$

$$w(0)=0 : c_4 = -\frac{16}{\pi^4} q_0 L^4$$

$$w(L)=0 : \frac{1}{6} c_1 L^3 + \frac{1}{2} c_2 L^2 + c_4 = 0 \rightarrow c_1 L + 3 c_2 = \frac{96}{\pi^4} q_0 L^2 \quad (2)$$

$$(2) - (1) \rightarrow 2 c_2 = \frac{96}{\pi^4} q_0 L^2 \rightarrow c_2 = \frac{48}{\pi^4} q_0 L^2$$

$$(1) \rightarrow c_1 = -\frac{48}{\pi^4} q_0 L$$

Ergebnisse:

$$Q_z(x) = q_0 L \left[\frac{48}{\pi^4} - \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L}\right) \right]$$

$$M_y(x) = q_0 L^2 \left[\frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L}\right) + \frac{48}{\pi^4} \frac{x}{L} - \frac{48}{\pi^4} \right]$$

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 E I_y} \left[16 \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{L}\right) - 8 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + 24 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 16 \right]$$

b) Lagerreaktionen

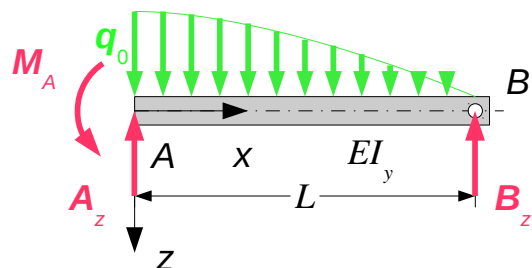
Punkt A: negatives Schnittufer

$$A_z = Q_z(0) = \frac{48}{\pi^4} q_0 L = 0,4928 q_0 L$$

$$M_A = -M_y(0) = \left(\frac{48}{\pi^4} - \frac{4}{\pi^2} \right) q_0 L^2 \\ = 0,08748 q_0 L^2$$

Punkt B: positives Schnittufer

$$B_z = -Q_z(L) = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{48}{\pi^4} \right) q_0 L = 0,1439 q_0 L$$



Aufgabe 17

a) Schnittlasten und Biegelinie

Integrationen:

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = -\frac{1}{\pi} q_0 L \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) + c_1 = -Q_z$$

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{1}{\pi^2} q_0 L^2 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + c_1 x + c_2 = -M_y$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{\pi^3} q_0 L^3 \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$EI_y w = \frac{1}{\pi^4} q_0 L^4 \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

Randbedingungen:

$$\frac{dw}{dx}(0) = 0 : \frac{1}{\pi^3} q_0 L^3 + c_3 = 0 \rightarrow c_3 = -\frac{1}{\pi^3} q_0 L^3$$

$$w(0) = 0 : c_4 = 0$$

$$M_y(L) = 0 : c_1 L + c_2 = 0 \quad (1)$$

$$w(L) = 0 : \frac{1}{6} c_1 L^3 + \frac{1}{2} c_2 L^2 + c_3 L = 0$$

$$\rightarrow c_1 L + 3 c_2 = \frac{6}{\pi^3} q_0 L^2 \quad (2)$$

$$(2) - (1) \rightarrow 2 c_2 = \frac{6}{\pi^3} q_0 L^2 \rightarrow c_2 = \frac{3}{\pi^3} q_0 L^2$$

$$(1) \rightarrow c_1 = -\frac{3}{\pi^3} q_0 L$$

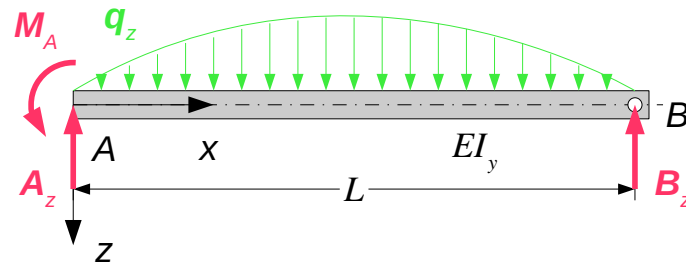
Schnittlasten:

$$Q_z(x) = \frac{q_0 L}{\pi} \left(\cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{3}{\pi^2} \right)$$

$$M_y(x) = \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \left(\sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + \frac{3}{\pi} \frac{x}{L} - \frac{3}{\pi} \right)$$

Biegelinie:

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI_y} \left(\sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) - \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{3}{2} \pi \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \pi \frac{x}{L} \right)$$

b) Lagerreaktionen

Punkt A: Negatives Schnittufer

$$A_z = Q_z(0) = \frac{q_0 L}{\pi} \left(1 + \frac{3}{\pi^2} \right)$$

$$M_A = -M_y(0) = \frac{3}{\pi^3} q_0 L^2$$

Punkt B: Positives Schnittufer

$$B_z = -Q_z(L) = -\frac{q_0 L}{\pi} \left(-1 + \frac{3}{\pi^2} \right) = \frac{q_0 L}{\pi} \left(1 - \frac{3}{\pi^2} \right)$$

Probe:

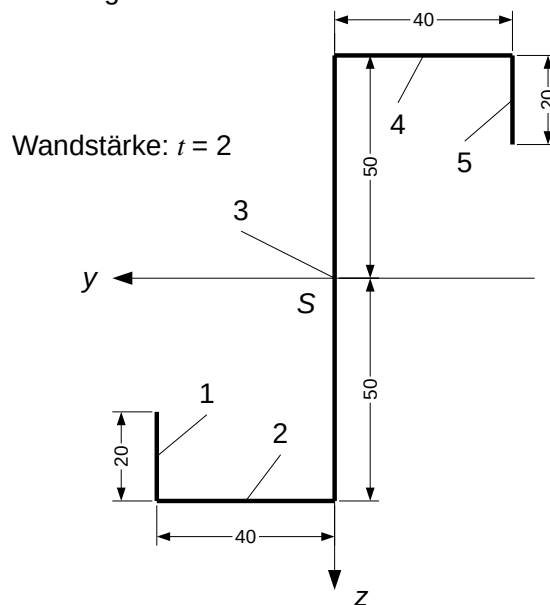
$$\begin{aligned} \sum F_z &= -A_z - B_z + q_0 \int_0^L \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{q_0 L}{\pi} \left(-2 - \left[\cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right]_{x=0}^{x=L} \right) \\ &= \frac{q_0 L}{\pi} (-2 + 1 + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M^A &= 0 : M_A + L B_z - q_0 \int_0^L x \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) dx \\ &= \frac{3 q_0 L^2}{\pi^3} + \frac{q_0 L^2}{\pi} \left(1 - \frac{3}{\pi^2} \right) - \frac{q_0 L}{\pi} \left[\frac{L}{\pi} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) - x \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \right]_{x=0}^{x=L} \\ &= \frac{q_0 L^2}{\pi} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 18

Flächenträgheitsmomente:

Unterteilung des Profils:



	Profil 1	Profil 2	Profil 3	Profil 4	Profil 5	Summe	
A_i	40	80	200	80	40	440	mm ²
y_{Si}	40	20	0	-20	-40		mm
z_{Si}	40	50	0	-50	-40		mm
I_{yi}	1333	0	166700	0	1333	169400	mm ⁴
I_{zi}	0	10670	0	10670	0	21340	mm ⁴
A_i	64000	200000	0	200000	64000	528000	mm ⁴
$y_{Si}^2 A_i$	64000	32000	0	32000	64000	192000	mm ⁴
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	-64000	-80000	0	-80000	-64000	-288000	mm ⁴

Ergebnis: $I_y = (169400 + 528000) \text{ mm}^4 = \underline{69,74 \text{ cm}^4}$

$I_z = (21340 + 192000) \text{ mm}^4 = \underline{21,33 \text{ cm}^4}$

$I_{yz} = \underline{-28,80 \text{ cm}^4}$

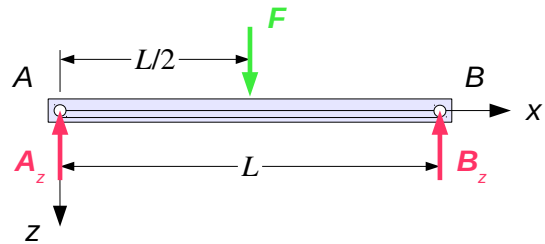
Lagerkräfte:

$$\sum M^B = 0 : -L A_z + \frac{L}{2} F = 0$$

$$\rightarrow A_z = \frac{F}{2}$$

$$\sum M^A = 0 : -\frac{L}{2} F + L B_z = 0$$

$$\rightarrow B_z = \frac{F}{2}$$



Schnittlasten:

$$Q_z(x) = -\left(-A_z + \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0 F\right) = F \left(\frac{1}{2} - \left\langle \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right\rangle^0 \right)$$

$$M_y(x) = F \left(\frac{x}{2} - L \left\langle \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right\rangle \right) = \frac{FL}{2} \left(\frac{x}{L} - \left\langle 2 \frac{x}{L} - 1 \right\rangle \right)$$

Ersatzmomente:

$$\bar{M}_y = \frac{1}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} M_y, \quad \bar{M}_z = -\frac{I_{yz} / I_y}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} M_y = -\frac{I_{yz}}{I_y} \bar{M}_y$$

Vertikalverschiebung:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\bar{M}_y = \frac{-FL}{2(1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z))} \left[\frac{x}{L} - \left\langle 2 \frac{x}{L} - 1 \right\rangle \right]$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = \frac{-FL^2}{2(1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z))} \left[\frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{4} \left\langle 2 \frac{x}{L} - 1 \right\rangle^2 + c_1 \right]$$

$$EI_y w = \frac{-FL^3}{2(1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z))} \left[\frac{1}{6} \frac{x^3}{L^3} - \frac{1}{24} \left\langle 2 \frac{x}{L} - 1 \right\rangle^3 + c_1 x + c_2 \right]$$

$$w(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$w(L) = 0 : \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + c_1 L = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{3}{24} \frac{1}{L} = -\frac{1}{8L}$$

$$w(x) = -\frac{1}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} \frac{FL^3}{48EI_y} \left[4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \left\langle 2 \frac{x}{L} - 1 \right\rangle^3 - 3 \frac{x}{L} \right]$$

$$w_F = w\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} \frac{FL^3}{48EI_y} \left(\frac{4}{2^3} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} \frac{FL^3}{48EI_y}$$

Horizontalverschiebung:

Da die Randbedingungen für die Verschiebung $v(x)$ mit denen für die Verschiebung $w(x)$ übereinstimmen, gilt:

$$E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = \bar{M}_z = -\frac{I_{yz}}{I_y} \bar{M}_y$$

$$E I_z v(x) = -\frac{I_{yz}}{I_y} \frac{F L^3}{2(1 - I_{yz}^2/(I_y I_z))} \left[\frac{1}{6} \frac{x^3}{L^3} - \frac{1}{24} \left\langle 2 \frac{x}{L} - 1 \right\rangle^3 - \frac{1}{8} \frac{x}{L} \right]$$

$$v(x) = -\frac{I_{yz}}{I_y} \frac{F L^3}{48 E I_z} \left[4 \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \left\langle x \frac{x}{L} - 1 \right\rangle^3 - 3 \frac{x}{L} \right] = \frac{I_{yz}}{I_z} w(x)$$

$$v_F = v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{I_{yz}}{I_z} w_F$$

Zahlenwerte:

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{28,80^2}{69,74 \cdot 21,33} = 0,4424$$

$$\frac{F L^3}{48 E I_y} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 1000^3 \text{ mm}^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 \cdot 69,74 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 0,7113 \text{ mm}$$

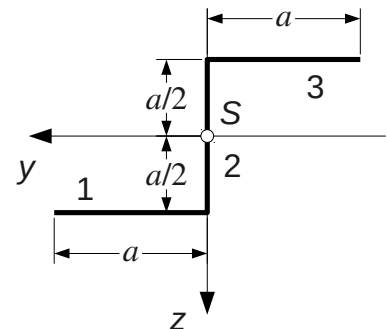
$$w_F = \frac{0,7113 \text{ mm}}{0,4424} = \underline{1,608 \text{ mm}}$$

$$v_F = \frac{-28,80}{21,33} \cdot 1,608 \text{ mm} = \underline{-2,171 \text{ mm}}$$

Aufgabe 19

a) Flächenträgheitsmomente

	Profil 1	Profil 2	Profil 3	Summe
A_i	at	at	at	$3at$
y_{Si}	$a/2$	0	$-a/2$	
z_{Si}	$a/2$	0	$-a/2$	
I_{Yi}	0	$a^3 t/12$	0	$a^3 t/12$
I_{Zi}	$a^3 t/12$	0	$a^3 t/12$	$a^3 t/6$
$z_{Si}^2 A_i$	$a^3 t/4$	0	$a^3 t/4$	$a^3 t/2$
$y_{Si}^2 A_i$	$a^3 t/4$	0	$a^3 t/4$	$a^3 t/2$
$-y_{Si} z_{Si} A_i$	$-a^3 t/4$	0	$-a^3 t/4$	$-a^3 t/2$



Ergebnis: $I_y = \frac{a^3 t}{12} + \frac{a^3 t}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{12} a^3 t}}, I_z = \frac{a^3 t}{6} + \frac{a^3 t}{2} = \underline{\underline{\frac{2}{3} a^3 t}}, I_{yz} = \underline{\underline{-\frac{a^3 t}{2}}}$

b) Verschiebungen

Die Verschiebungen können mithilfe von Superposition ermittelt werden.

Für beide Lastfälle benötigte Werte:

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{a^6 t^2 \cdot 12 \cdot 3}{4 \cdot 7 \cdot 2 a^6 t^2} = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{I_{yz}}{I_y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{12}{7} = -\frac{6}{7}, \quad \frac{I_{yz}}{I_z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$$

Lastfall 1: Kraft bei x_B

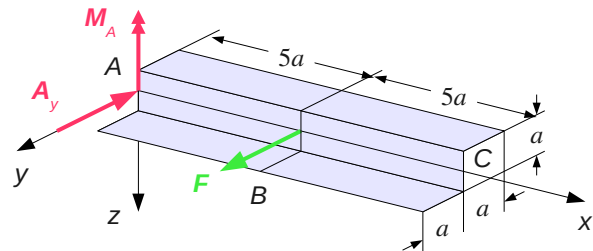
Lagerreaktionen:

$$\sum F_y = 0 : -A_y + F = 0$$

$$\rightarrow A_y = F$$

$$\sum M_z^A = 0 : -M_A + 5a F = 0$$

$$\rightarrow M_A = 5a F$$



Schnittlasten:

$$Q_{1y} = -(-A_y + \langle x - 5a \rangle^0 F) = F(1 - \langle x - 5a \rangle^0)$$

$$M_{1z} = -(-M_A + A_y x - \langle x - 5a \rangle F) = F(5a - x + \langle x - 5a \rangle)$$

Ersatzmomente:

$$\bar{M}_{1y} = \frac{-M_{1z} I_{yz} / I_z}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{5} M_{1z} = \frac{21}{10} M_{1z} = \frac{21}{10} F a \left(5 - \frac{x}{a} + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle \right)$$

$$\bar{M}_{1z} = \frac{M_{1z}}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} = \frac{14}{5} M_{1z} = \frac{14}{5} F a \left(5 - \frac{x}{a} + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle \right)$$

Horizontalverschiebung:

$$E I_z \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \bar{M}_{1z} = \frac{14}{5} F a \left(5 - \frac{x}{a} + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle \right)$$

$$E I_z \frac{dv_1}{dx} = \frac{14}{5} F a^2 \left(5 \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^2 + c_1 \right)$$

$$E I_z v_1 = \frac{14}{5} F a^3 \left(\frac{5}{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1}{6} \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^3 + c_1 x + c_2 \right)$$

$$v_1(0)=0 \rightarrow c_2=0, \quad \frac{dv_1}{dx}(0)=0 \rightarrow c_1=0$$

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \frac{14}{30} \frac{F a^3}{E I_z} \left[15 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^3 \right] \\ &= \frac{14}{30} \cdot \frac{3}{2} \frac{F}{E t} \left[15 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^3 \right] = \frac{7}{10} \frac{F}{E t} \left[15 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^3 \right] \end{aligned}$$

$$v_{1B} = v_1(5a) = \frac{7}{10} \frac{F}{E t} (15 \cdot 5^2 - 5^3) = \frac{7 \cdot 25 F}{10 E t} (15 - 5) = 175 \frac{F}{E t}$$

$$v_{1C} = v_1(10a) = \frac{7}{10} \frac{F}{E t} (15 \cdot 10^2 - 10^3 + 5^3) = \frac{875 F}{2 E t}$$

Vertikalverschiebung:

Die Randbedingungen für die Vertikalverschiebung $w(x)$ stimmen mit den Randbedingungen für die Horizontalverschiebung $v(x)$ überein. Daher gilt:

$$E I_y \frac{d^2 w_1}{dx^2} = -\bar{M}_{1y} = -\frac{21}{10} F a \left(5 - \frac{x}{a} + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle \right)$$

$$E I_y w_1 = -\frac{21}{10} F a^3 \left(\frac{5}{2} \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1}{6} \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^3 \right)$$

$$\begin{aligned} w_1(x) &= -\frac{21}{60} \frac{F a^3}{E I_y} \left[15 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^3 \right] \\ &= -\frac{21}{60} \cdot \frac{12}{7} \frac{F}{E t} \left[15 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^3 \right] \\ &= -\frac{3}{5} \frac{F}{E t} \left[15 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left\langle \frac{x}{a} - 5 \right\rangle^3 \right] \end{aligned}$$

$$w_{1B} = -\frac{3}{5} \frac{F}{E t} (15 \cdot 5^2 - 5^3) = -150 \frac{F}{E t}$$

$$w_{1C} = -\frac{3}{5} \frac{F}{E t} (15 \cdot 10^2 - 10^3 + 5^3) = -375 \frac{F}{E t}$$

Lastfall 2: Kraft bei x_C

Lagerreaktionen:

$$\sum F_z = 0 : -A_z + F = 0$$

$$\rightarrow A_z = F$$

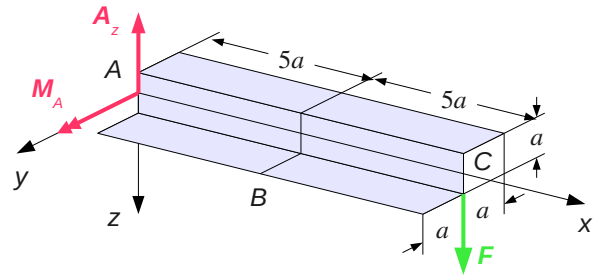
$$\sum M_y^A = 0 : M_A - 10 a F = 0$$

$$\rightarrow M_A = 10 a F$$

Schnittlasten:

$$Q_{2z} = -(-A_z) = A_z = F$$

$$M_{2y} = -(M_A - A_z x) = -F(10a - x)$$



Ersatzmomente:

$$\bar{M}_{2y} = \frac{M_{1y}}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} = -\frac{14}{5} F a \left(10 - \frac{x}{a}\right)$$

$$\bar{M}_{2z} = \frac{-M_{1y} I_{yz} / I_y}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} = \frac{14}{5} \left(\frac{-6}{7}\right) F a \left(10 - \frac{x}{a}\right) = -\frac{12}{5} F a \left(10 - \frac{x}{a}\right)$$

Horizontalverschiebung:

$$E I_z \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \bar{M}_{2z} = -\frac{12}{5} F a \left(10 - \frac{x}{a}\right)$$

$$E I_z \frac{dv_2}{dx} = -\frac{12}{5} F a^2 \left(10 \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} + d_1\right)$$

$$E I_z v_2 = -\frac{12}{5} F a^3 \left(5 \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{a^3} + d_1 x + d_2\right)$$

$$v_2(0) = 0 \rightarrow d_2 = 0, \quad \frac{dv_2}{dx}(0) = 0 \rightarrow d_1 = 0$$

$$v_2(x) = -\frac{2}{5} \frac{F a^3}{E I_z} \left[30 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3\right] = -\frac{3}{5} \frac{F}{E t} \left[30 \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$$

$$v_{2B} = v_2(5a) = -\frac{3}{5} \frac{F}{E t} (30 \cdot 5^2 - 5^3) = -\frac{3 \cdot 625 F}{5 E t} = -375 \frac{F}{E t}$$

$$v_{2C} = v_2(10a) = -\frac{3}{5} \frac{F}{E t} (30 \cdot 10^2 - 10^3) = -\frac{3 \cdot 2000 F}{5 E t} = -1200 \frac{F}{E t}$$

Vertikalverschiebung:

$$E I_y \frac{d^2 w_2}{dx^2} = -\bar{M}_{2y} = \frac{14}{5} F a \left(10 - \frac{x}{a}\right)$$

$$E I_y w_2 = \frac{14}{5} F a^3 \left(5 \frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{6} \frac{x^3}{a^3}\right)$$

$$w_2 = \frac{14}{30} \frac{F a^3}{E I_y} \left[30 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right] = \frac{4}{5} \frac{F}{E t} \left[30 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right]$$

$$w_{2B} = w_2(5a) = \frac{4 \cdot 625}{5} \frac{F}{E t} = 500 \frac{F}{E t}$$

$$w_{2C} = w_2(10a) = \frac{4 \cdot 2000}{5} \frac{F}{E t} = 1600 \frac{F}{E t}$$

Gesamtverschiebungen

$$v_B = v_{1B} + v_{2B} = (175 - 375) \frac{F}{E t} = -200 \frac{F}{E t}$$

$$w_B = w_{1B} + w_{2B} = (-150 + 500) \frac{F}{E t} = 350 \frac{F}{E t}$$

$$v_C = v_{1C} + v_{2C} = \left(\frac{875}{2} - 1200 \right) \frac{F}{E t} = -\frac{1525}{2} \frac{F}{E t}$$

$$w_C = w_{1C} + w_{2C} = (-375 + 1600) \frac{F}{E t} = 1225 \frac{F}{E t}$$

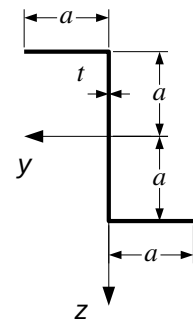
Aufgabe 20

a) Querschnittskennwerte

$$I_y = 2 a^2 \cdot a t + \frac{(2a)^3 t}{12} = \frac{8}{3} a^3 t$$

$$I_z = 2 \left(\frac{a^3 t}{12} + \frac{a^2}{4} \cdot a t \right) = \frac{2}{3} a^3 t$$

$$I_{yz} = 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot a t = a^3 t$$



b) Verschiebungen

Schnittlasten:

$$E I_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_z(x) = q_0 \sin \left(\pi \frac{x}{L} \right)$$

$$E I_y \frac{d^3 w}{dx^3} = -Q_z(x) = -\frac{q_0 L}{\pi} \cos \left(\pi \frac{x}{L} \right) + c_1$$

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y(x) = -\frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + c_1 x + c_2$$

$$M_y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$M_y(L) = 0 : c_1 L = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$\rightarrow M_y(x) = \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Ersatzmomente:

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}, \quad \frac{I_{yz}}{I_y} = \frac{3}{8}$$

$$\bar{M}_y = \frac{M_y}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} = \frac{16}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$\bar{M}_z = \frac{-M_y I_{yz} / I_y}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} = -\frac{3}{8} \frac{16}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = -\frac{6}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Horizontalverschiebung:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = \bar{M}_z = -\frac{6}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$EI_z \frac{dv}{dx} = \frac{6}{7} \frac{q_0 L^3}{\pi^3} \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) + c_3$$

$$EI_z v = \frac{6}{7} \frac{q_0 L^4}{\pi^4} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) + c_3 x + c_4$$

$$v(0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

$$v(L) = 0 : c_3 L = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$v(x) = \frac{6}{7\pi^4} \frac{q_0 L^4}{EI_z} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = \frac{6}{7\pi^4} \frac{3}{2} \frac{q_0 L^4}{E a^3 t} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = \frac{9}{7\pi^4} \frac{q_0 L^4}{E a^3 t} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Vertikalverschiebung:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\bar{M}_y = -\frac{16}{7} \frac{q_0 L^2}{\pi^2} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

Mit $w(0) = 0$ und $w(L) = 0$ folgt wie im Fall der Horizontalverschiebung:

$$EI_y w = \frac{16}{7} \frac{q_0 L^4}{\pi^4} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

$$w(x) = \frac{16}{7\pi^4} \frac{q_0 L^4}{E I_y} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = \frac{16}{7\pi^4} \frac{3}{8} \frac{q_0 L^4}{E a^3 t} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) = \frac{6}{7\pi^4} \frac{q_0 L^4}{E a^3 t} \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right)$$

