# 1. Zug und Druck

- Betrachtet werden Balken, bei denen als einzige Schnitt-last eine Normalkraft auftritt.
- Balken, in denen nur eine Normalkraft auftritt, werden auch als Stäbe bezeichnet.
- Beispiele:
  - Stangen
  - Fachwerkstäbe
  - Türme unter Eigengewicht
- Eine positive Normalkraft tritt auch in Seilen auf.

# 1. Zug und Druck

# 1.1 Spannung

- Zugfestigkeit und Normalspannung:
  - Im Zugversuch wird ein Stab mit konstanter Querschnittsfläche $A$ so belastet, dass eine über seine Länge konstante Normalkraft $N$ auftritt.
  - Die Normalkraft $N_B$, bei der der Stab bricht, ist proportional zu seiner Querschnittsfläche.
  - Der Quotient

    $$R_m = \frac{N_B}{A}$$

    ist daher nur vom Werkstoff abhängig.
  - Er wird als *Zugfestigkeit* bezeichnet.

# 1.1 Spannung

- Die Zugfestigkeit ist ein Materialkennwert, der die Beanspruchbarkeit des Werkstoffs beschreibt.
- Zur Beschreibung der Beanspruchung bei Zug- oder Druckbelastung wird die *Normalspannung* $\sigma$ definiert:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

- Das Vorzeichen der Normalspannung stimmt mit dem Vorzeichen der Normalkraft überein.
- Die Normalspannung ist positiv bei Zugbelastung und negativ bei Druckbelastung.

# 1.1 Spannung

- Die Normalspannung ist eine Flächenkraft. Sie hat die Einheit Kraft pro Fläche.
- Eine gebräuchliche Einheit ist:

$$1\,\mathrm{N/mm^2} = 10^6\,\mathrm{N/m^2} = 10^6\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{MPa}$$

- Bruch tritt auf für $\sigma = R_m$ .

• Verallgemeinerung:

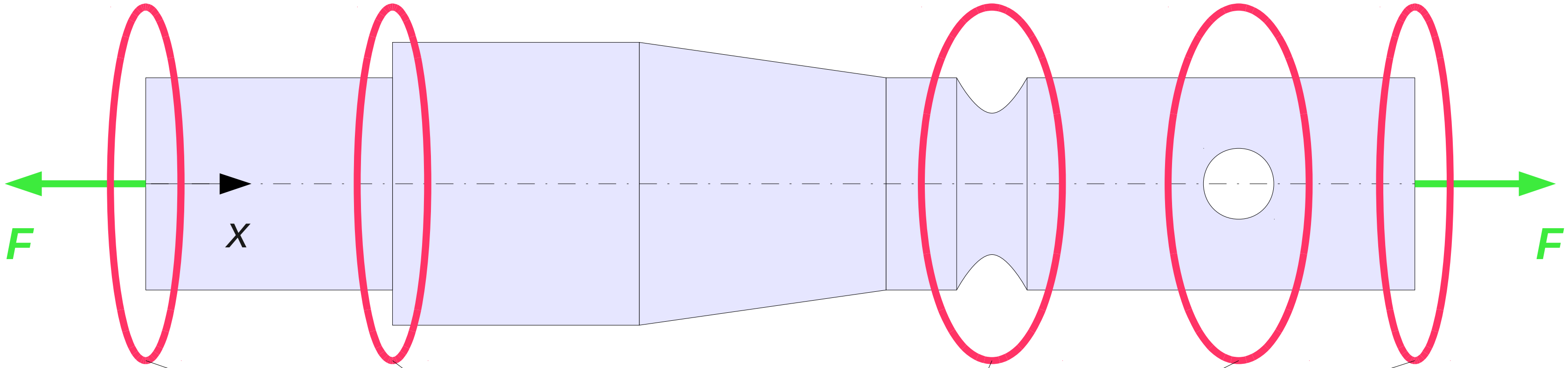
- Die Normalkraft in einem Querschnitt des Stabs resultiert aus einer über den Querschnitt verteilten Flächenkraft, die als Normalspannung bezeichnet wird.

# 1.1 Spannung

- Bei einem Stab mit konstantem Querschnitt kann davon ausgegangen werden, dass die Normalspannung in hinreichendem Abstand von der Krafteinleitung über den Querschnitt konstant ist.
- Das gilt näherungsweise auch für Stäbe mit schwach veränderlichem Querschnitt.
- Die Normalspannung ist nicht konstant über den Querschnitt
  - in der Nähe der Krafteinleitung
  - bei Querschnittssprüngen
  - bei Kerben

# 1.1 Spannung

$$N(x) = F$$



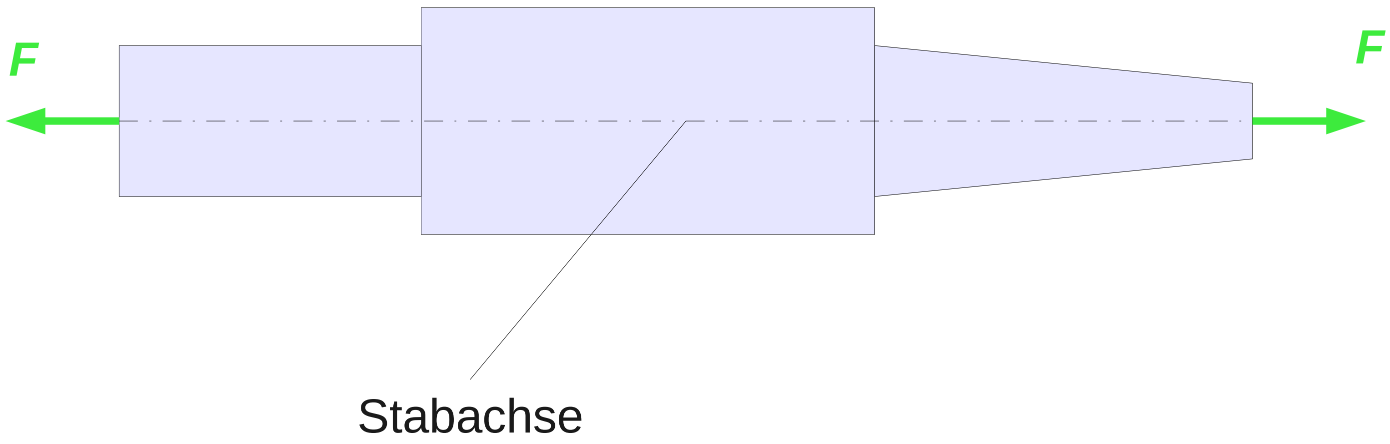

$$\sigma \neq \frac{N}{A(x)}$$

# 1.1 Spannung

- Angriffspunkt der Normalkraft:
  - Die Normalkraft greift im Kräftemittelpunkt der Normalspannung an.
  - Bei einer über den Querschnitt konstanten Normalspannung ist der Kräftemittelpunkt gleich dem Flächenschwerpunkt.
  - Damit ein Balken nur durch eine Normalkraft belastet wird, muss die Verbindungslinie aller Flächenschwerpunkte gerade sein und die Wirkungslinie der äußeren Kräfte mit der Verbindungslinie der Flächenschwerpunkte übereinstimmen.

# 1.1 Spannung

- Die Verbindungslinie der Flächenschwerpunkte der Quer-schnitte heißt *Stabachse*.

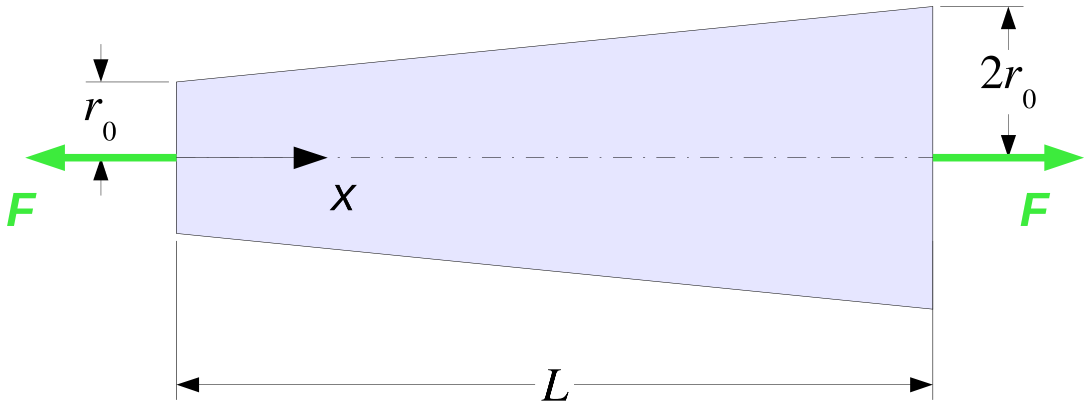


# 1.1 Spannung

- Beispiel: Stahlstange
  - Aufgabenstellung:
    - Eine Stahlstange wird mit einer Zugkraft von $300\ \mathrm{kN}$ beansprucht. Die Stange hat einen Kreisquerschnitt mit einem Durchmesser von $50\ \mathrm{mm}$. Gesucht ist die Normalspannung.
  - Lösung:
    - Normalkraft: $N = F = 300\ \mathrm{kN}$
    - Querschnittsfläche: $A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi \cdot 50^2\ \mathrm{mm}^2}{4} = 1963\ \mathrm{mm}^2$
    - Normalspannung: $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{300 \cdot 10^3\ \mathrm{N}}{1963\ \mathrm{mm}^2} = \underline{152{,}8\ \mathrm{N/mm}^2}$

# 1.1 Spannung

- Beispiel: Konischer Stab
  - Ein konischer Stab mit kreisförmigen Querschnitt wird durch eine Zugkraft $F$ beansprucht.
  - Wie groß ist die Normalspannung $\sigma(x)$ in einem beliebigen Schnitt senkrecht zur Stabachse?



# 1.1 Spannung

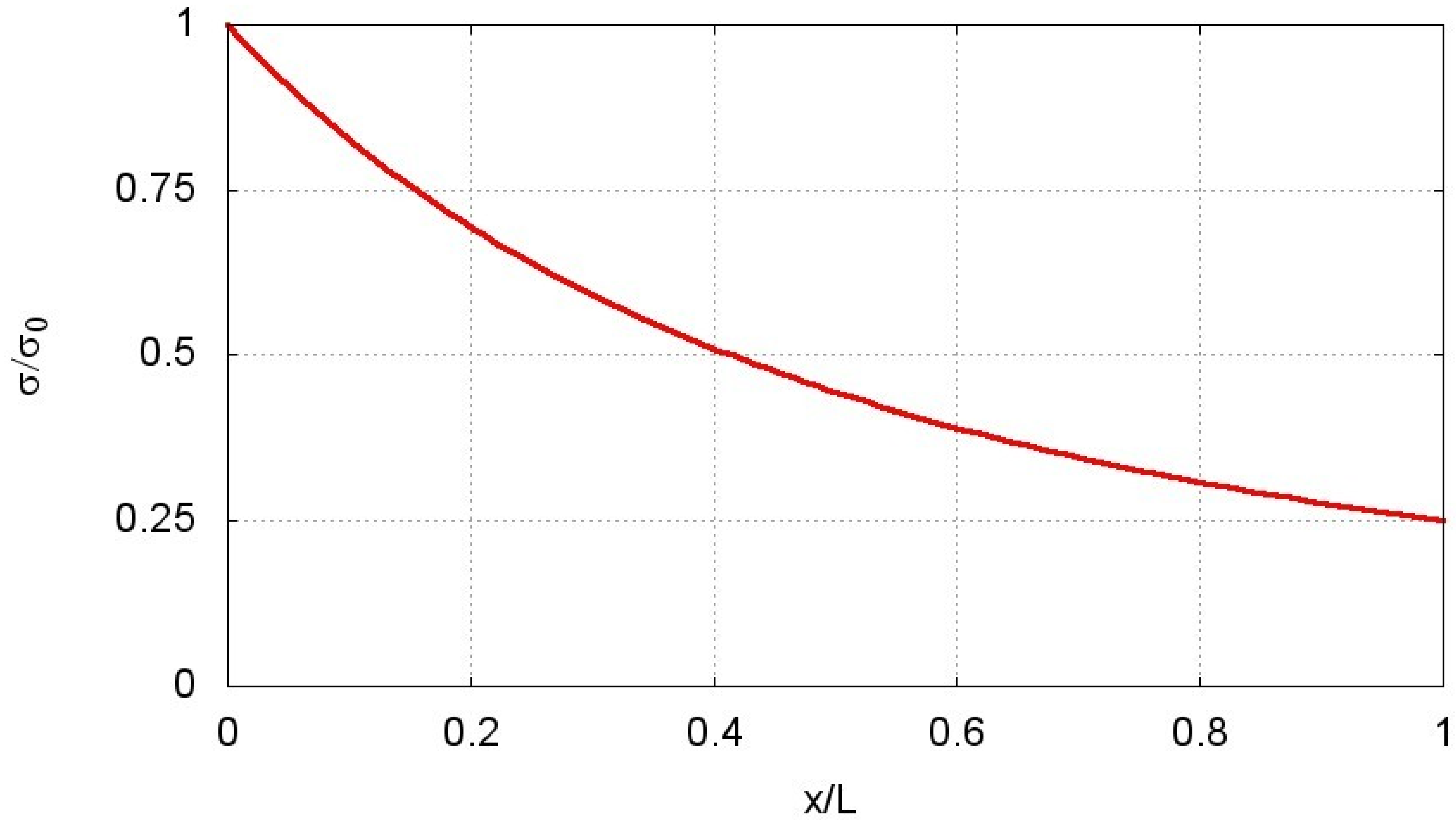
- Radius: $r(x) = r_0 + \left(\frac{2r_0 - r_0}{L}\right)x = r_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)$

- Querschnittsfläche: $A(x) = \pi r^2(x) = \pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$

- Normalkraft: $N = F$
- Normalspannung:

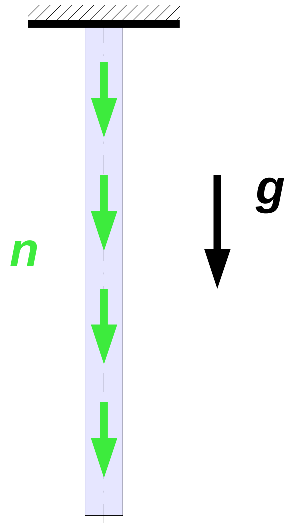
$$\sigma(x) = \frac{N}{A(x)} = \frac{F}{\pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2} = \frac{\sigma_0}{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_0 = \frac{F}{\pi r_0^2}$$

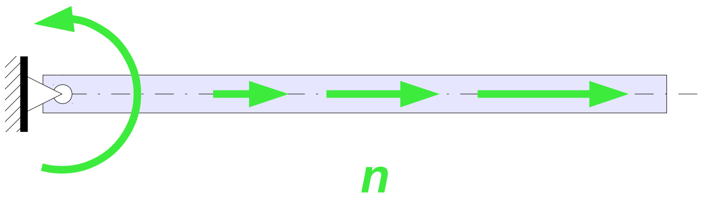
# 1.1 Spannung



# 1.1 Spannung

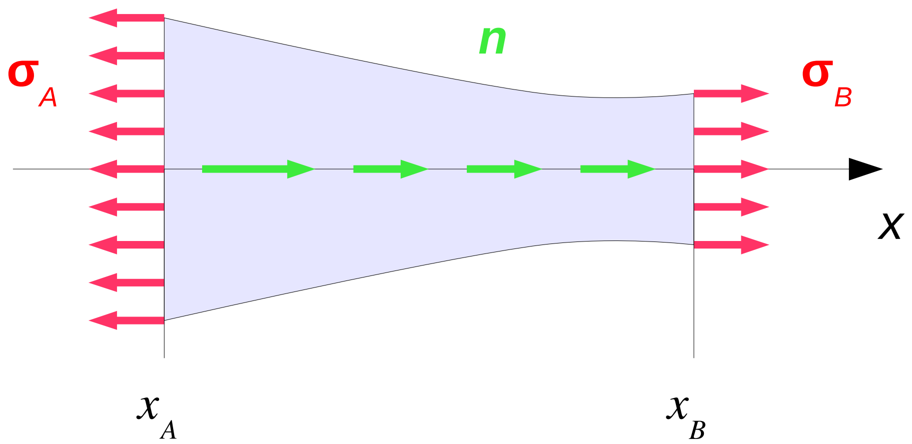
- Stab unter Streckenlast:
  - Eine parallel zur Stabachse gerichtete Streckenlast führt zu einer veränderlichen Normalkraft.
  - Beispiele:
    - Stab unter Eigengewicht
    - Stab unter Fliehkraft



# 1.1 Spannung

- Spannungsverlauf im Stab mit Streckenlast:
  - Betrachtet wird ein beliebiger Stababschnitt:




  - Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum F_x = 0 \;:\; A_B \sigma_B - A_A \sigma_A + \int_{x_A}^{x_B} n \, dx = 0$$

# 1.1 Spannung

- Mit $$A_B \sigma_B - A_A \sigma_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx}(A\sigma)\,dx$$

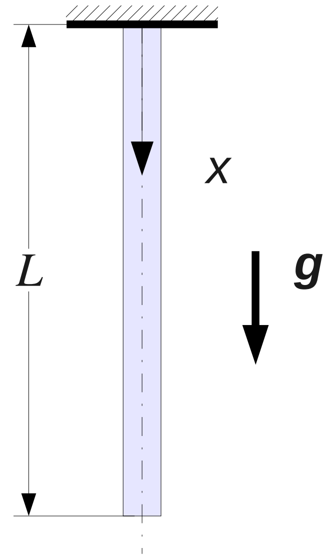
  folgt: $$\int_{x_A}^{x_B} \left( \frac{d}{dx}(A\sigma) + n \right) dx = 0$$

- Damit das Integral für jedes beliebige Intervall null ist, muss der Integrand null sein:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(A\sigma) + n = 0}$$

# 1.1 Spannung

- Beispiel: Stab unter Eigengewicht
  - Ein Stab ist am oberen Ende fest eingespannt und wird durch sein Gewicht belastet.
  - Gegeben:
    - Querschnittsfläche $A$
    - Massendichte $\rho$
    - Zugfestigkeit $R_m$
  - Gesucht:
    - Verlauf der Spannung im Stab
    - Länge $L_R$, bei der der Stab infolge des Eigengewichts reißt



# 1.1 Spannung

- Streckenlast:
  - Am Volumenelement $dV = A\,dx$ greift die Gewichtskraft

    $$dG = \rho\, g\, dV = \rho\, g\, A\, dx$$

    an.
  - Damit gilt für die Streckenlast: $n = \dfrac{dG}{dx} = \rho\, g\, A$

- Spannungsverlauf:
  - Da die Querschnittsfläche konstant ist, gilt:

$$A \frac{d\sigma}{dx} = -\rho\, g\, A \;\rightarrow\; \frac{d\sigma}{dx} = -\rho\, g \;\rightarrow\; \sigma(x) = -\rho\, g\, x + c$$

# 1.1 Spannung

- Randbedingung: $\sigma(L)=0$

$$0=-\rho g L+c \rightarrow c=\rho g L$$

$$\sigma(x)=\rho g L\left(1-\frac{x}{L}\right)=\frac{G}{A}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

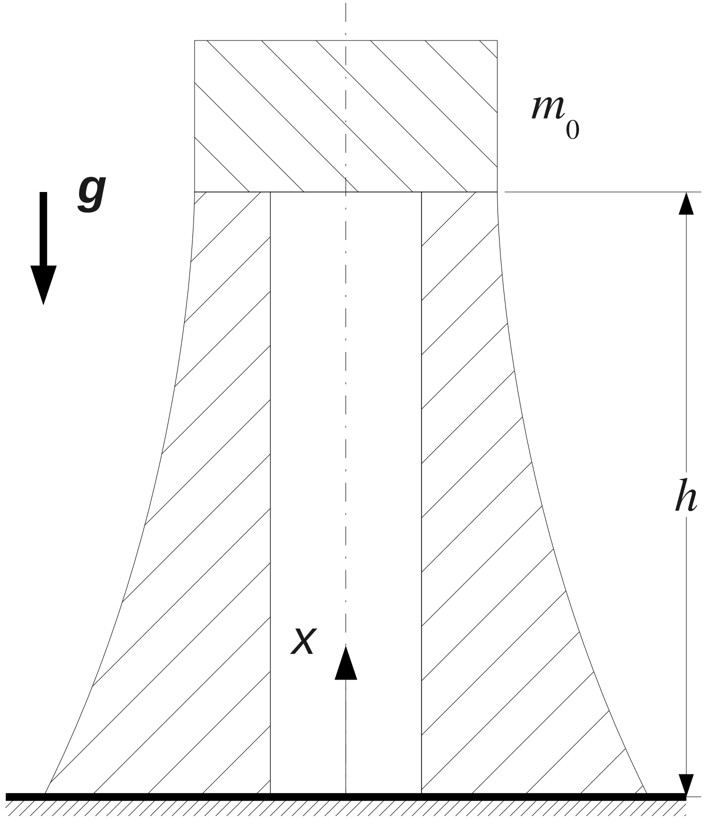
- Reißlänge:
  - Die größte Spannung tritt an der Einspannung auf:

$$R_m=\sigma(0)=\rho g L_R \rightarrow L_R=\frac{R_m}{\rho g}$$

  - Die Länge $L_R$ wird als *Reißlänge* bezeichnet.

# 1.1 Spannung

- Beispiel: Turm
  - Der Turm der Höhe $h$ trägt die Masse $m_0$ .
  - Als einzige Belastung wirkt die Schwerkraft.
  - Wie muss der Verlauf des Querschnitts gewählt werden, damit in jedem Querschnitt die gleiche Normalspannung $\sigma_0$ auftritt?



# 1.1 Spannung

- Streckenlast: $n(x) = -\rho\, g\, A(x)$

- Wenn die Spannung konstant ist, gilt:

$$\frac{dA}{dx}\sigma_0 = -n(x) = \rho\, g\, A(x)$$

$$\rightarrow \quad \frac{dA}{A} = \frac{\rho\, g}{\sigma_0}\, dx \quad \rightarrow \quad \int_{A_0}^{A(x)} \frac{dA}{A} = \frac{\rho\, g}{\sigma_0} \int_0^x d\bar{x} = \frac{\rho\, g}{\sigma_0}\, x$$

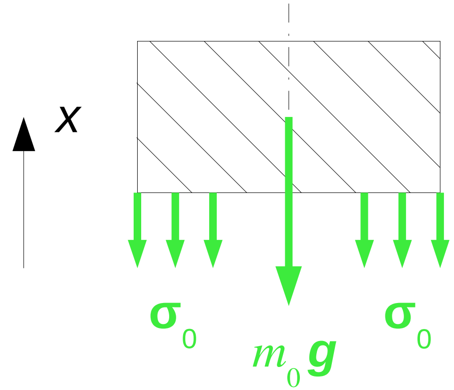
$$\rightarrow \quad \ln\left(\frac{A(x)}{A_0}\right) = \frac{\rho\, g}{\sigma_0}\, x \quad \rightarrow \quad A(x) = A_0 \exp\left(\frac{\rho\, g}{\sigma_0}\, x\right)$$

# 1.1 Spannung

- Die Querschnittsfläche $A_0$ folgt aus dem Gleichgewicht an der Masse $m_0$:

$$\sum F_x = 0 \; : \; -m_0 g - \sigma_0 A(h) = 0$$

$$\rightarrow \quad A(h) = -\frac{m_0 g}{\sigma_0}$$



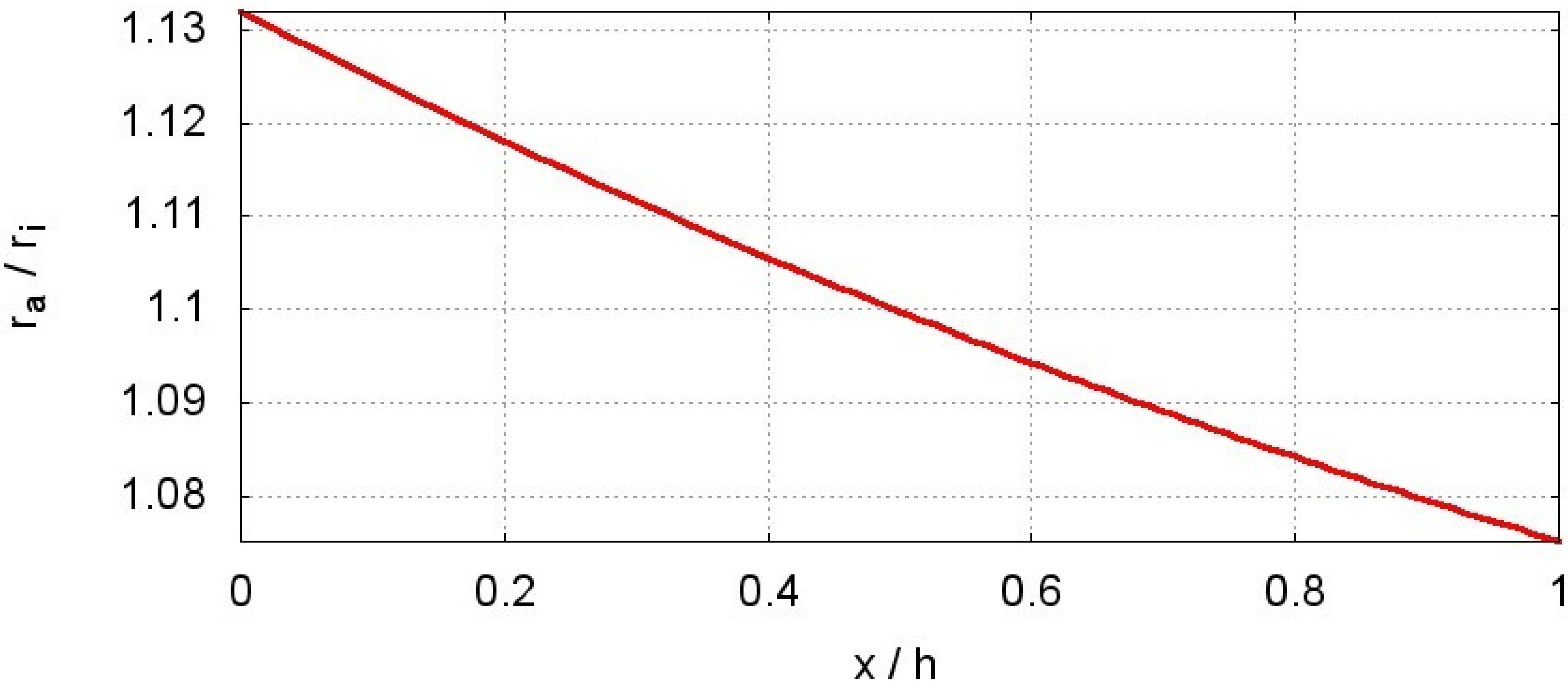

$$-\frac{m_0 g}{\sigma_0} = A_0 \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_0} h\right) \quad \rightarrow \quad A_0 = -\frac{m_0 g}{\sigma_0} \exp\left(-\frac{\rho g h}{\sigma_0}\right)$$

- Ergebnis: $$A(x) = -\frac{m_0 g}{\sigma_0} \exp\left(\frac{\rho g h}{\sigma_0}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\right)$$

# 1.1 Spannung

- Kreisring:

$$A(x) = \pi\left(r_a^2(x) - r_i^2\right) \quad \rightarrow \quad r_a(x) = \sqrt{r_i^2 - \frac{m_0 g}{\pi\sigma_0}\exp\left(\frac{\rho g h}{\sigma_0}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\right)}$$

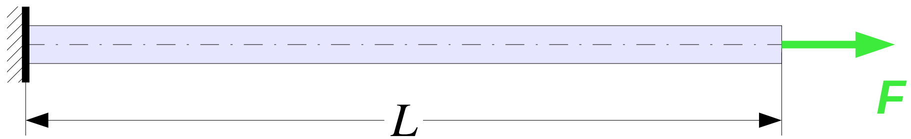


# 1.2 Dehnung

- Wird ein Stab durch eine Zug- oder Druckkraft belastet, dann ändert sich seine Länge.
- Die Längenänderung hängt von der Belastung, der Länge und dem Material ab.
- Als ein Maß für die Formänderung, das nicht von der Länge abhängt, wird die Dehnung eingeführt.

# 1.2 Dehnung

- Konstante Dehnung:
  - Betrachtet wird ein homogener Stab mit konstanter Querschnittsfläche $A$, der am linken Ende fest eingespannt ist und am rechten Ende durch die Kraft $F$ belastet wird.

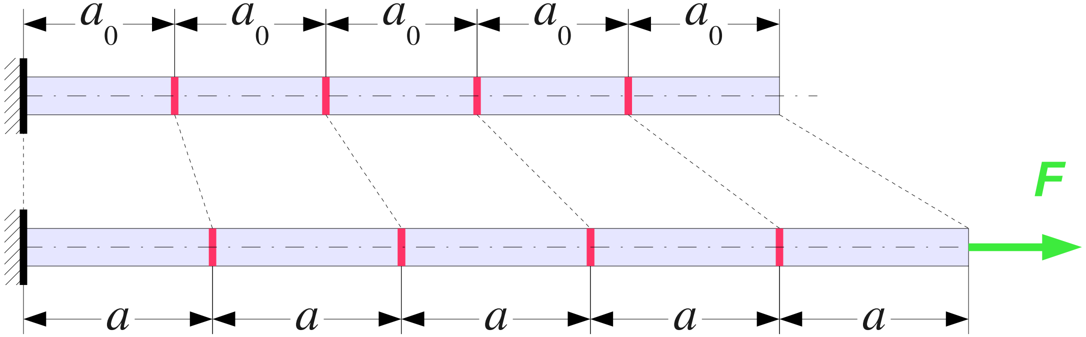



  - Normalkraft und Spannung in diesem Stab sind konstant:

$$N = F\ ,\quad \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$$

# 1.2 Dehnung

- Am unbelasteten Stab werden im konstanten Abstand $a_0$ Markierungen aufgebracht.
- Es zeigt sich, dass die Markierungen am belasteten Stab ebenfalls einen konstanten Abstand haben, der mit $a$ bezeichnet wird.



# 1.2 Dehnung

- Für die Änderung der Länge zwischen zwei Markierungen gilt:

$$\Delta a = a - a_0$$

- Für die Änderung der Länge zwischen $m$ aufeinanderfolgenden Markierungen folgt:

$$(m-1)a - (m-1)a_0 = (m-1)(a - a_0) = (m-1)\Delta a$$

- Für das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge gilt:

$$\frac{(m-1)\Delta a}{(m-1)a_0} = \frac{\Delta a}{a_0}$$

# 1.2 Dehnung

- Wird $a_0$ hinreichend klein gewählt, so lässt sich jede Strecke auf dem Stab beliebig genau als ein Vielfaches von $a_0$ ausdrücken.
- Daraus folgt, dass das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge für jede beliebige Strecke den gleichen Wert hat.
- Dieses Verhältnis wird als *Dehnung* bezeichnet:

$$\boxed{\epsilon = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a - a_0}{a_0}}$$

# 1.2 Dehnung

- Die Dehnung ist eine dimensionslose Größe.
- Eine positive Dehnung beschreibt eine Verlängerung, eine negative Dehnung eine Verkürzung.
- Ist $a_0 = L_0$ die gesamte Länge des Stabs, dann gilt für seine Längenänderung:

$$\Delta L = L - L_0 = a_0 \epsilon = L_0 \epsilon$$

- Bei <u>konstanter</u> Dehnung kann die Dehnung aus der Längenänderung des Stabs berechnet werden:

$$\boxed{\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}}$$

# 1.2 Dehnung

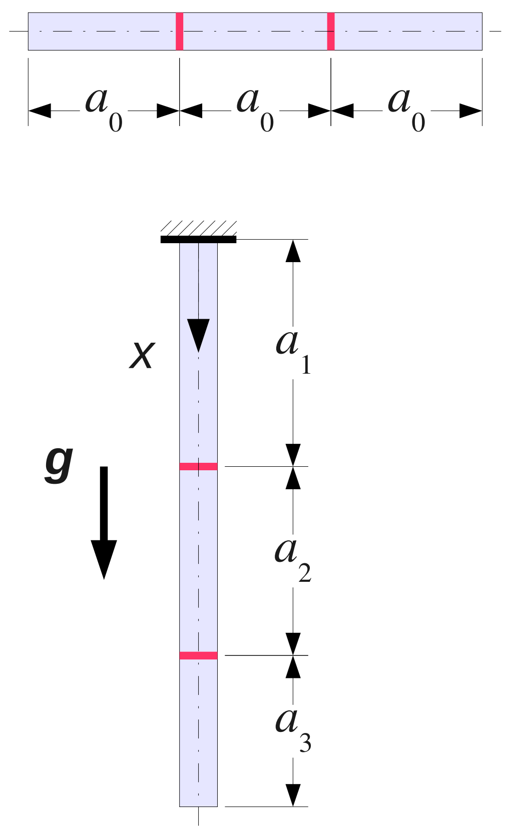
- Zahlenbeispiel:
  - Wird ein Stab der Länge $L_0 = 1\ \mathrm{m}$ um $\Delta L = 1\ \mathrm{mm}$ verlängert, so berechnet sich die Dehnung zu

$$\epsilon = \frac{1\,\mathrm{mm}}{1000\,\mathrm{mm}} = 10^{-3} = 0{,}1\,\%$$

  - In vielen technischen Fällen ist die Dehnung klein.
  - Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass gilt: $|\epsilon| \ll 1$

# 1.2 Dehnung

- Veränderliche Dehnung:
  - Betrachtet wird ein homogener Stab mit konstanter Querschnittsfläche unter Eigengewicht.
  - Auf den unbelasteten Stab werden wieder Markierungen im konstanten Abstand $a_0$ aufgebracht.
  - Am belasteten Stab haben diese Markierungen unterschiedliche Abstände $a_k$ .



# 1.2 Dehnung

- Durch

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{a_k - a_0}{a_0}$$

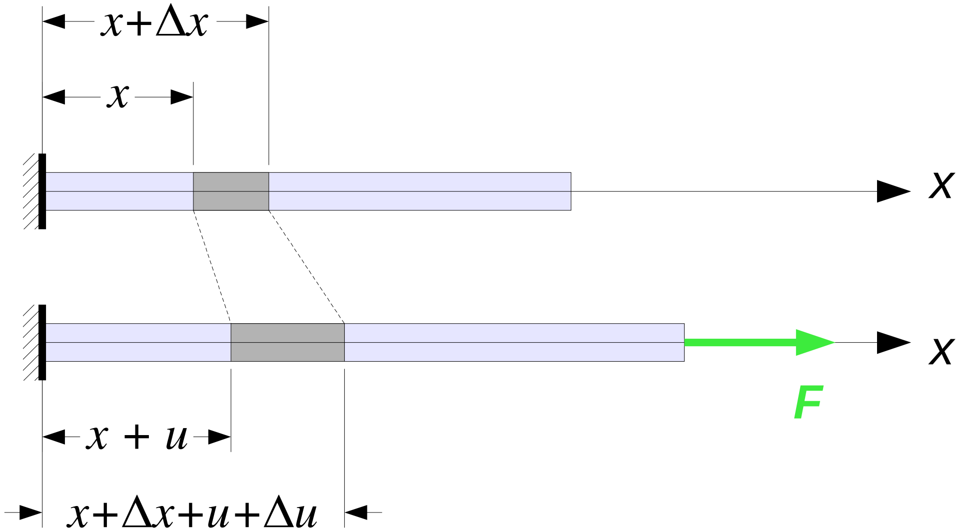
wird eine mittlere Dehnung definiert, die von der gewählten Länge $a_0$ abhängt.

- Die *örtliche Dehnung* ist der Grenzwert der mittleren Dehnung, wenn $a_0$ gegen null geht:

$$\epsilon(x) = \lim_{a_0 \to 0} \frac{a - a_0}{a_0}$$

# 1.2 Dehnung

- Dehnung und Verschiebung
  - Die örtliche Dehnung kann aus der Verschiebung $u(x)$ berechnet werden. Dazu wird ein Element der Länge $a_0 = \Delta x$ auf dem Stab markiert:



# 1.2 Dehnung

- Unverformtes Element:
  - Die Enden liegen an den Stellen $x$ und $x + \Delta x$.
  - Das Element hat die Länge $\Delta x$.
- Verformtes Element:
  - Das linke Ende verschiebt sich um $u$ an die Stelle $x + u$.
  - Das rechte Ende verschiebt sich um $u + \Delta u$ an die Stelle $x + \Delta x + u + \Delta u$.
  - Das verformte Element hat die Länge

$$x+\Delta x+u+\Delta u-(x+u)=\Delta x+\Delta u$$

# 1.2 Dehnung

- Die Längenänderung des Elements berechnet sich zu

$$\Delta x + \Delta u - \Delta x = \Delta u$$

- Die mittlere Dehnung ist das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge des Elements:

$$\bar{\epsilon}(x) = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

- Die örtliche Dehnung ist der Grenzwert der mittleren Dehnung für unendlich kleine Elemente:

$$\boxed{\epsilon(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}}$$

# 1.2 Dehnung

- Für die Längenänderung des Stabs gilt:

$$\Delta L = u(L_0) - u(0) = \int_{u(0)}^{u(L_0)} du = \int_0^{L_0} \frac{du}{dx}\, dx = \int_0^{L_0} \epsilon(x)\, dx$$

- Beispiel: Konstante Dehnung $\epsilon(x) = \epsilon_0 = const.$

$$\Delta L = \int_0^{L_0} \epsilon_0\, dx = \epsilon_0 \int_0^{L_0} dx = \epsilon_0 L_0$$

- Beispiel: Veränderliche Dehnung $\epsilon(x) = \epsilon_0\, x / L_0$

$$\Delta L = \int_0^{L_0} \epsilon_0 \frac{x}{L_0}\, dx = \frac{\epsilon_0}{L_0} \int_0^{L_0} x\, dx = \frac{\epsilon_0}{L_0} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=L_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 L_0$$

# 1.3 Materialgesetz

- Ursachen für die Längenänderung eines Stabs:
  - Normalkraft
  - Temperaturänderung
- Die Längenänderung wird durch die Dehnung $\varepsilon$ beschrieben.
- Die Längenänderung infolge einer Normalkraft hängt von der Normalspannung $\sigma$ ab.

# 1.3 Materialgesetz

- Das Materialgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung, Dehnung und Temperaturänderung:

$$\sigma = f(\epsilon, \Delta T)$$

- Das Materialgesetz ist werkstoffabhängig und wird durch Experimente ermittelt.

# 1.3 Materialgesetz

## 1.3.1 Spannung und Dehnung

## 1.3.2 Wärmedehnung

# 1.3.1 Spannung und Dehnung

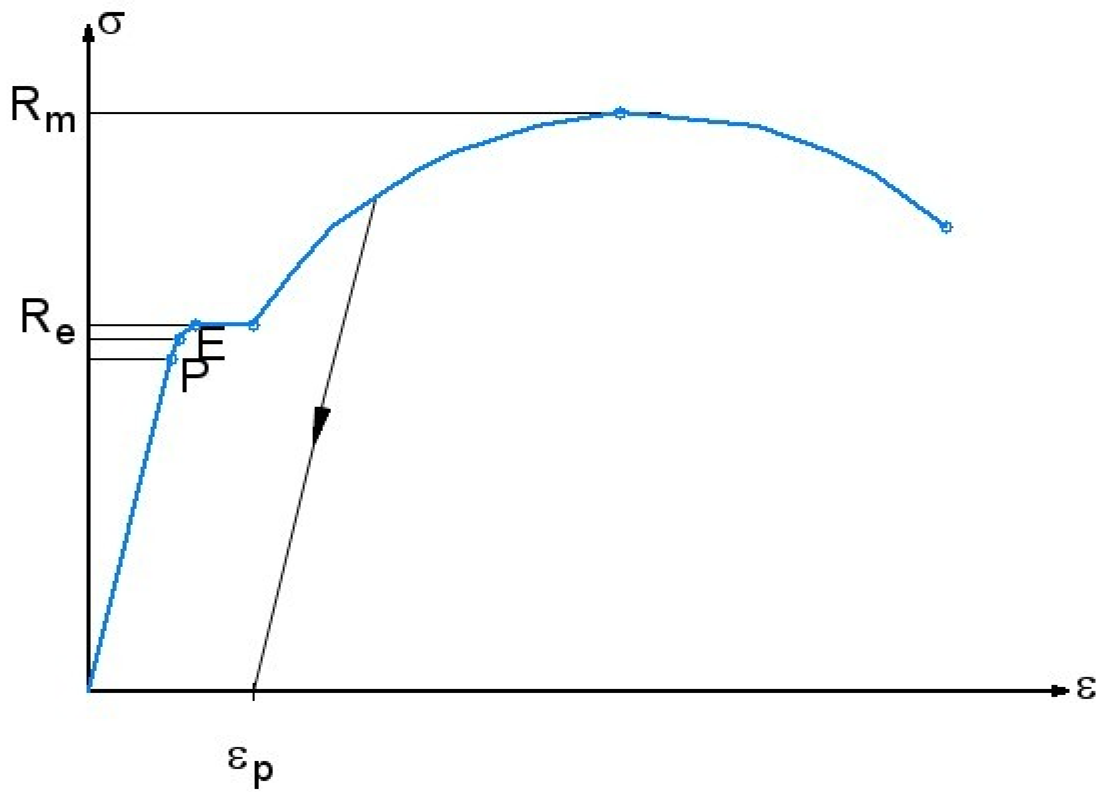
- Zugversuch:
  - Der Zusammenhang $\sigma = f(\epsilon)$

    zwischen Spannung $\sigma$ und Dehnung $\varepsilon$ bei konstanter Temperatur wird im Zugversuch ermittelt.
  - Dabei wird die Probe mit konstanter Geschwindigkeit gedehnt und die erforderliche Kraft $F$ gemessen.
  - Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm wird die auf die Anfangsquerschnittsfläche $A_0$ bezogene Spannung über der auf die Anfangslänge $L_0$ bezogenen Dehnung aufgetragen:

$$\sigma = F / A_0, \quad \epsilon = \Delta L / L_0$$

# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Duktile Metalle mit ausgeprägtem Fließbereich:
  - unlegierter Baustahl



# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Linear elastischer Bereich: $\sigma < \sigma_P$
  - Bis zur *Proportionalitätsgrenze* $\sigma_P$ ist die Spannung proportional zur Dehnung:

$$\boxed{\sigma = E\,\epsilon}$$

  - Dieses Gesetz wird als *Hookesches Gesetz* bezeichnet.
  - Der Proportionalitätsfaktor $E$ heißt *Elastizitätsmodul*. Er hat die Einheit $\mathrm{N/mm^2} = \mathrm{MPa}$.

# 1.3.1 Spannung und Dehnung

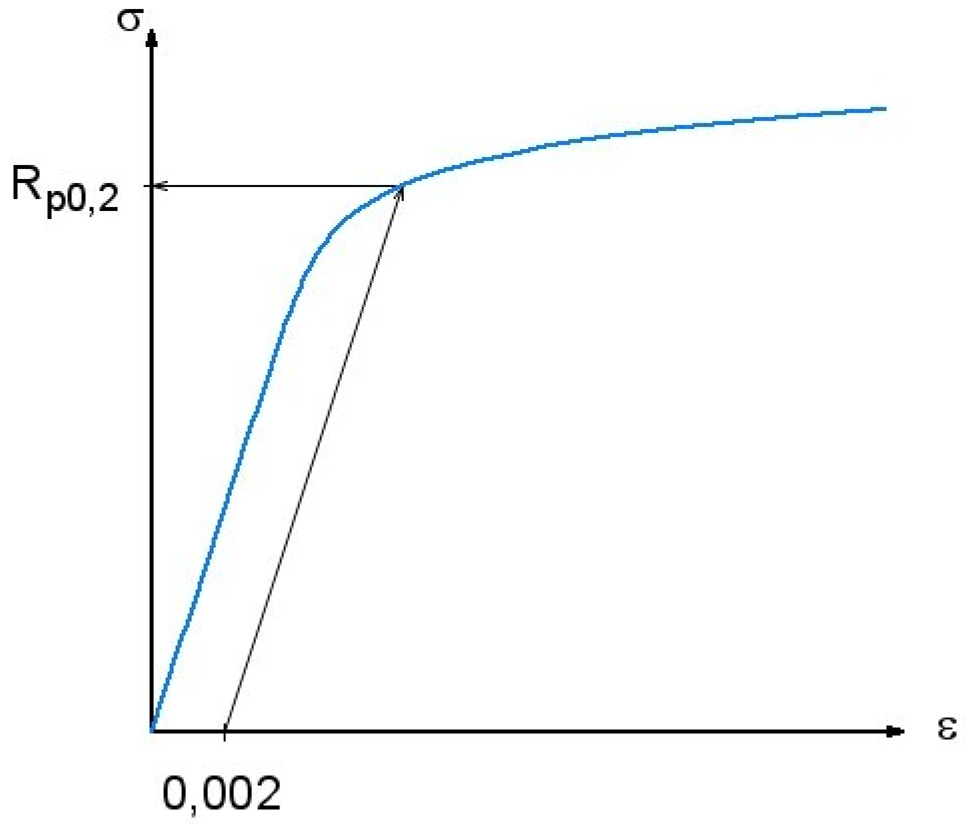
- Nichtlinear elastischer Bereich: $\sigma < \sigma_E$
  - Bis zur *Elastizitätsgrenze* $\sigma_E$ geht die Dehnung bei Entlastung wieder vollständig zurück.
  - Die Elastizitätsgrenze liegt meist sehr nahe bei der Proportionalitätsgrenze.
- Fließen: $\sigma > R_e$
  - Bei Überschreiten der *Streckgrenze* $R_e$ beginnt das Material zu fließen.
  - Die Dehnung nimmt auch bei gleichbleibender oder abnehmender Spannung zu.
  - Die Streckgrenze liegt meist sehr nahe bei der Elastizitätsgrenze.

# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Verfestigung:
  - Nach dem Fließen ermöglicht die so genannte Kaltverfestigung einen weiteren Anstieg der Spannung bis zur *Zugfestigkeit* $R_m$.
  - Bei Erreichen der Zugfestigkeit setzt eine Einschnürung des Querschnitts ein. Die auf den aktuellen Querschnitt bezogene Spannung steigt weiter an, während die auf den Ausgangsquerschnitt bezogene Spannung sinkt.
- Plastischer Bereich: $\sigma > \sigma_E$
  - Nach der Entlastung bleibt eine plastische Dehnung $\varepsilon_p$ zurück.
  - Die Entlastungskurve verläuft parallel zur Geraden im linear elastischen Bereich.

# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Metalle ohne ausgeprägte Fließgrenze:
  - Aluminiumlegierungen
  - vergütete Stähle

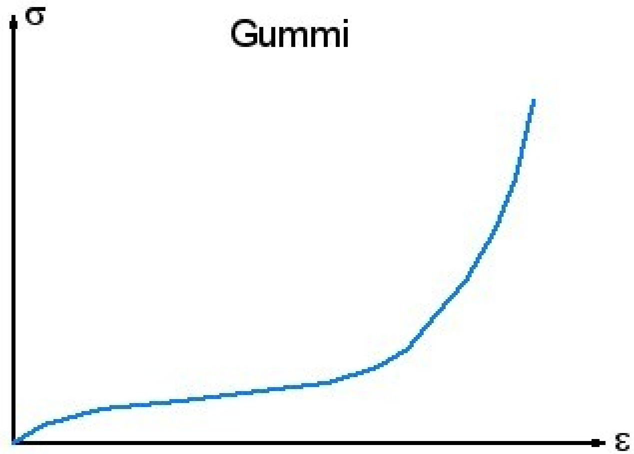


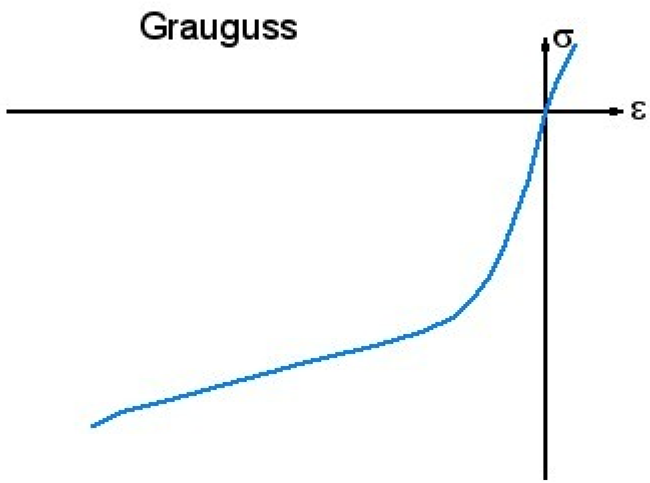
# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Bei den meisten Metallen tritt kein ausgeprägtes Fließen auf.
- Anstelle einer Streckgrenze wird die 0,2 %-*Dehngrenze* $R_{p0,2}$ definiert.
- Die Spannung $R_{p0,2}$ führt nach Entlasten zu einer bleibenden Dehnung $\varepsilon_p$ von 0,2 %.

# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Nichtlineare Elastizität:
  - Bei Grauguss und vielen nichtmetallischen Werkstoffen gibt es keinen Bereich, in dem die Spannungen proportional zu den Dehnungen sind.



# 1.3.1 Spannung und Dehnung

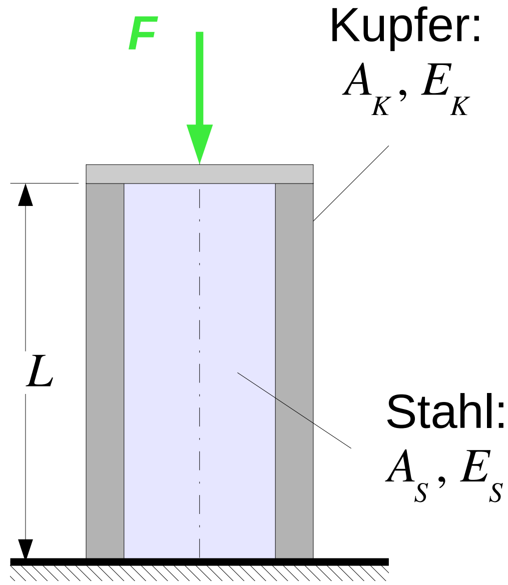
- Duktile Werkstoffe:
  - Ein Werkstoff, der vor dem Bruch stark gedehnt werden kann, heißt *duktil* oder *zäh*.
  - Duktile Werkstoffe
    - können Stöße und Energie absorbieren
    - zeigen die Gefahr von Versagen durch Überlastung durch eine große Verformung an
    - sind für spanloses Umformen geeignet
  - Zu den duktilen Werkstoffen gehören z. B. unlegierte Stähle und Aluminium.

# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Spröde Werkstoffe:
  - Bei *spröden* Werkstoffen tritt kein oder nur geringes Fließen vor dem Bruch auf.
  - Spröde Werkstoffe sind sehr stoßempfindlich und können wenig Energie aufnehmen.
  - Zu den spröden Werkstoffen gehören gehärtete Stähle und Grauguss.

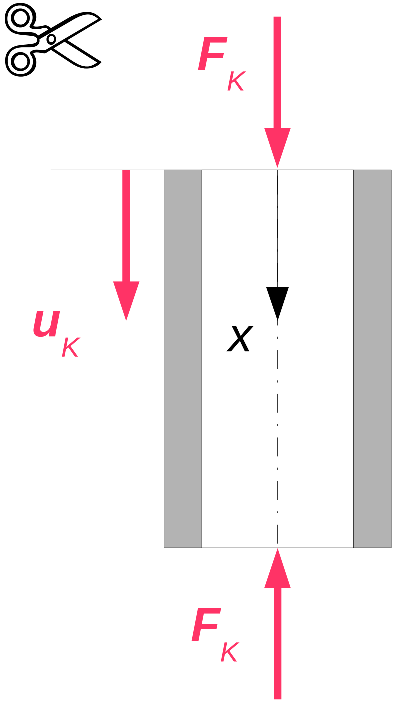
# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Beispiel: Stahlstift in Kupferbuchse
  - In einer Buchse aus Kupfer befindet sich ein Stahlstift.
  - Buchse und Stift tragen eine starre Platte, auf die die Kraft $F$ wirkt.
  - Gesucht:
    - Spannungen in Buchse und Stift
    - Verschiebung der Platte



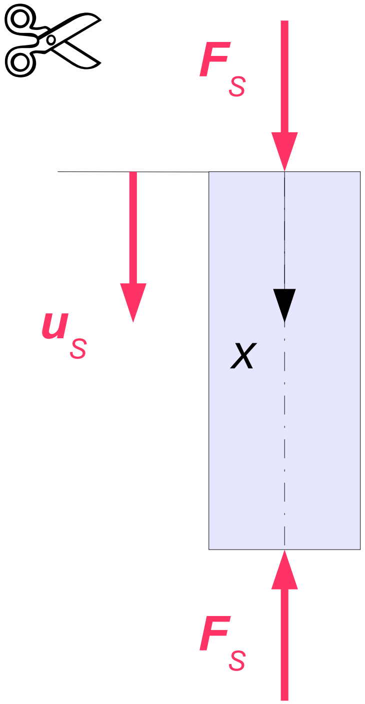
# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Kupferbuchse:
  - Spannung: $\sigma_K = -\frac{F_K}{A_K}$
  - Dehnung: $\epsilon_K = -\frac{F_K}{E_K A_K}$
  - Verschiebung: $u_K = -\Delta L_K = \frac{F_K L}{E_K A_K}$



# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Stahlstift:
  - Spannung: $\sigma_S = -\frac{F_S}{A_S}$
  - Dehnung: $\epsilon_S = -\frac{F_S}{E_S A_S}$
  - Verschiebung: $u_S = -\Delta L_S = \frac{F_S L}{E_S A_S}$

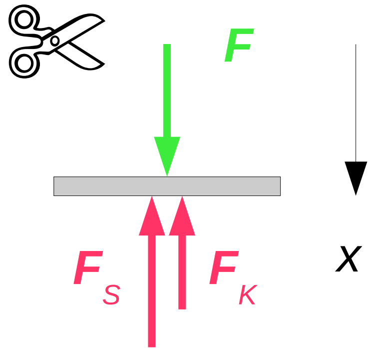


# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Platte: $\sum F_x = 0 \;:\; F - F_S - F_K = 0 \rightarrow F = F_S + F_K$

- Verträglichkeitsbedingung: $u_K = u_S$

$$\frac{F_K L}{E_K A_K} = \frac{F_S L}{E_S A_S} \rightarrow F_K = \frac{E_K A_K}{E_S A_S} F_S$$




- Einsetzen in Kräftegleichgewicht:

$$F = \left(1 + \frac{E_K A_K}{E_S A_S}\right) F_S = \frac{E_S A_S + E_K A_K}{E_S A_S} F_S$$

$$\rightarrow F_S = \frac{E_S A_S}{E_S A_S + E_K A_K} F, \quad F_K = \frac{E_K A_K}{E_S A_S + E_K A_K} F$$

# 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Ergebnisse:
  - Spannungen: $\sigma_S = \frac{-E_S}{E_S A_S + E_K A_K} F$, $\sigma_K = \frac{-E_K}{E_S A_S + E_K A_K} F$
  - Verschiebung der Platte: $u = u_S = \frac{F L}{E_S A_S + E_K A_K}$
- Anmerkungen:
  - Die Gleichgewichtsbedingungen alleine reichen nicht aus, um die Kräfte zu bestimmen. Das System ist statisch unbestimmt.
  - Zur Berechnung von statisch unbestimmten Systemen müssen auch die Verformungen betrachtet werden.
  - Bei statisch unbestimmten Systemen tragen die steiferen Bauteile eine höhere Last.

# 1.3.2 Wärmedehnung

- Die durch eine Temperaturänderung verursachte Dehnung heißt *Wärmedehnung*.
- Materialgesetz:
  - Für viele Werkstoffe ist die Wärmedehnung $\varepsilon_T$ proportional zur Temperaturänderung $\Delta T$ :

$$\boxed{\epsilon_T = \alpha_T \Delta T}$$

  - Der Proportionalitätsfaktor $\alpha_T$ heißt *Wärmeausdehnungskoeffizient*.
  - Er hat die Einheit $1/\mathrm{K}$.

# 1.3.2 Wärmedehnung

- Wirkt sowohl eine Spannung $\sigma$ als auch eine Temperaturänderung $\Delta T$, so ergibt sich die Gesamtdehnung durch Überlagerung.

- Im linear elastischen Bereich gilt:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T$$

- Auflösen nach der Spannung ergibt:

$$\sigma = E \left( \epsilon - \alpha_T \Delta T \right)$$

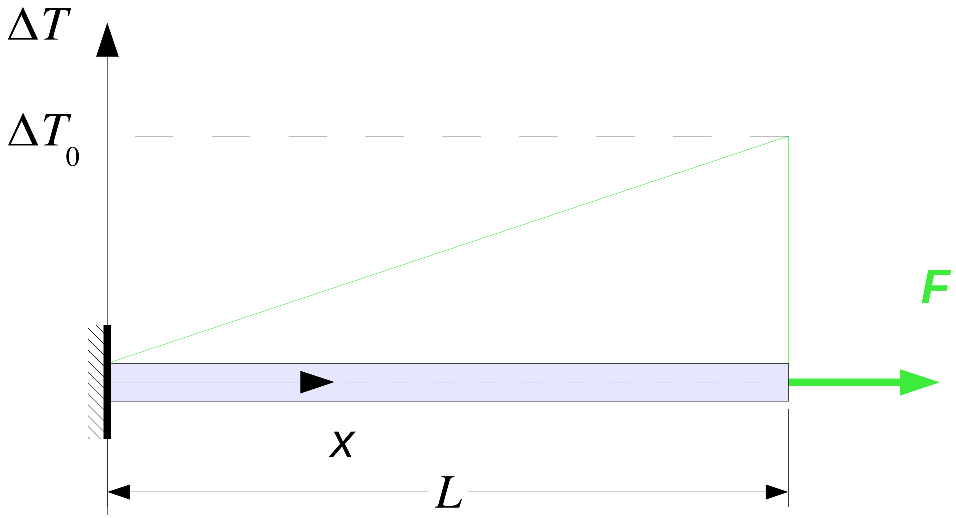
# 1.3.2 Wärmedehnung

- Typische Werkstoffkennwerte:

| Material | $E$ in N/mm$^2$ | $\alpha_T$ in 1/K |
|---|---|---|
| Stahl | $2{,}1 \cdot 10^5$ | $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ |
| Aluminium | $0{,}7 \cdot 10^5$ | $2{,}3 \cdot 10^{-5}$ |
| Kupfer | $1{,}2 \cdot 10^5$ | $1{,}6 \cdot 10^{-5}$ |
| Messing | $1{,}0 \cdot 10^5$ | $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ |

# 1.3.2 Wärmedehnung

- Beispiel:
  - Der abgebildete Stab wird durch die Kraft $F$ und die Temperaturänderung $\Delta T(x)$ belastet.

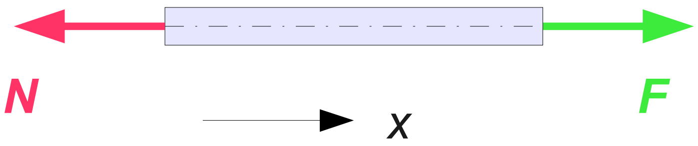


# 1.3.2 Wärmedehnung

- Gegeben:
  - Länge $L = 1\ \mathrm{m}$, Querschnittsfläche $A = 5\ \mathrm{cm}^2$
  - Elastizitätsmodul $E = 70000\ \mathrm{MPa}$, Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha_T = 2{,}3 \cdot 10^{-5}\ 1/\mathrm{K}$
  - Kraft $F = 10\ \mathrm{kN}$
  - Temperaturänderung: $\Delta T(x) = \Delta T_0 \dfrac{x}{L}$ mit $\Delta T_0 = 20\,\mathrm{K}$
- Gesucht:
  - Längenänderung $\Delta L$

# 1.3.2 Wärmedehnung

- Normalkraft:




$$\sum F_x = 0 \; : \; -N + F = 0 \;\rightarrow\; N = F$$

- Spannung: $\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{F}{A} = const.$

- Dehnung: $\epsilon(x) = \dfrac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T(x) = \dfrac{F}{EA} + \alpha_T \Delta T_0 \dfrac{x}{L}$

# 1.3.2 Wärmedehnung

- Längenänderung:

$$\Delta L = \int_0^L \epsilon(x)\,dx = \frac{F}{EA}\int_0^L dx + \alpha_T \frac{\Delta T_0}{L}\int_0^L x\,dx$$

$$= \frac{F}{EA}\left[x\right]_{x=0}^{x=L} + \alpha_T \frac{\Delta T}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=L} = \frac{F\,L}{E\,A} + \frac{1}{2}\alpha_T\,\Delta T_0\,L$$

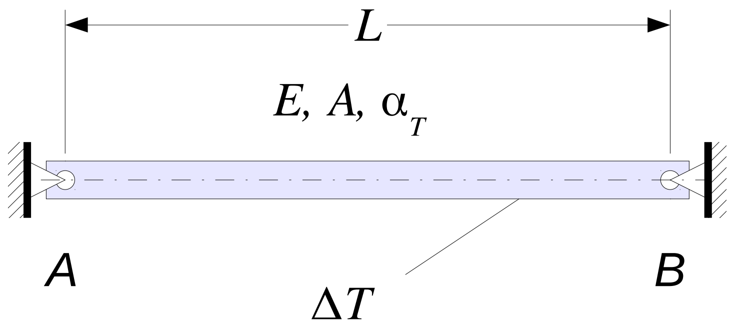
- Zahlenwert:

$$\Delta L = \frac{10\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 10^3\,\mathrm{mm}}{7\cdot 10^4\,\mathrm{N/mm}^2\cdot 5\cdot 10^2\,\mathrm{mm}^2} + \frac{1}{2}\cdot 2{,}3\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{K}}\cdot 20\,\mathrm{K}\cdot 10^3\,\mathrm{mm}$$

$$= 0{,}2857\,\mathrm{mm} + 2{,}3\cdot 10^{-1}\,\mathrm{mm} = \underline{0{,}5157\,\mathrm{mm}}$$

# 1.3.2 Wärmedehnung

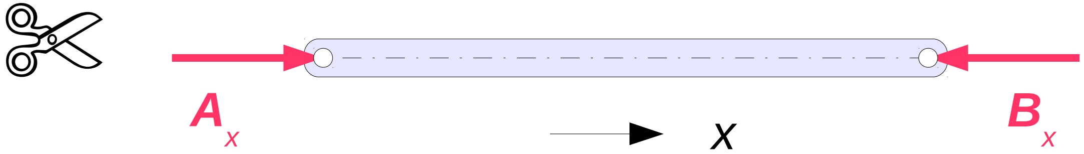
- Beispiel: Beidseitig eingespannter Stab




- Der homogene Stab mit konstantem Querschnitt $A$ ist an beiden Enden gelenkig gelagert.
- Er wird durch eine konstante Temperaturänderung $\Delta T$ belastet.
- Gesucht sind die Kräfte in den Lagern *A* und *B*.

# 1.3.2 Wärmedehnung

– Gleichgewicht:




$$\sum F_x = 0 \;:\; A_x - B_x = 0 \rightarrow A_x = B_x$$

- Es steht nur eine Gleichgewichtsbedingung zur Ermittlung der zwei unbekannten Kräfte zur Verfügung.
- Das System ist statisch unbestimmt: Die Gleichgewichtsbedingungen reichen zur Bestimmung der Kräfte nicht aus.
- Eine weitere Gleichung liefert die Verträglichkeitsbedingung.

# 1.3.2 Wärmedehnung

- Verträglichkeitsbedingung:
  - Verträglichkeitsbedingungen sind kinematische Bedingungen, die zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein müssen.
  - Da sich der Abstand der beiden Lager nicht ändert, kann der Stab seine Länge nicht ändern.
  - Damit lautet die Verträglichkeitsbedingung:

$$\Delta L = 0 \;:\; 0 = L\epsilon = L\left(\frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T\right) = L\left(\frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T\right)$$

  - Mit $N = -B_x$ folgt: $0 = \frac{-B_x}{EA} + \alpha_T \Delta T \;\rightarrow\; B_x = EA\alpha_T \Delta T$

# 1.4 Zulässige Spannung

- Die tatsächlich auftretende Spannung weicht in der Regel von der berechneten Spannung ab.
- Ursachen dafür sind:
  - vereinfachende Annahmen bei der Berechnung
  - Fertigungsungenauigkeiten
  - ungenaue Kenntnis der Lasten
  - ungleichmäßige Spannungsverteilung
- Diese Abweichungen können durch Sicherheiten und zulässige Spannungen berücksichtigt werden.

# 1.4 Zulässige Spannung

- Grenzspannung:
  - Die Grenzspannung $\sigma_G$ ist die im Versuch ermittelte Spannung, bei der Versagen eintritt.
- Sicherheit:
  - Die Sicherheit $S$ ist das Verhältnis der Grenzspannung $\sigma_G$ zur berechneten Spannung $\sigma$ :

$$S = \frac{\sigma_G}{\sigma} > 1$$

- Zulässige Spannung:
  - Die zulässige Spannung $\sigma_{zul}$ ist das Verhältnis der Grenzspannung $\sigma_G$ zur Sicherheit $S$ :

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_G}{S} < \sigma_G$$

# 1.4 Zulässige Spannung

- Die Grenzspannung hängt von der Art der Beanspruchung und der Art des Versagens ab.
- Die geforderte Sicherheit hängt außerdem von den Folgen des Versagens ab.
- Zugbeanspruchung:
  - Bei Zugbeanspruchung kann Versagen durch Fließen oder Versagen durch Bruch erfolgen.
  - Versagen durch Fließen tritt bei duktilen Werkstoffen auf.
  - Versagen durch Bruch kann bei duktilen und spröden Werkstoffen auftreten.

# 1.4 Zulässige Spannung

- Versagen durch Fließen:
  - Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Streckgrenze $R_e$ oder der 0,2 %-Dehngrenze $R_{p0,2}$ definiert:

$$S_F = \frac{\sigma_F}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{S_F} \quad \text{mit} \quad \sigma_F = R_e \quad \text{oder} \quad \sigma_F = R_{p0,2}$$

- Versagen durch Bruch:
  - Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Zugfestigkeit $R_m$ definiert:

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$$

# 1.4 Zulässige Spannung

- Anhaltswerte für die Sicherheit bei Zugbeanspruchung:

| Werkstoffart | Versagensart | Sicherheit |
|---|---|---|
| duktil | Fließen | 1,2 - 2,0 |
| | Bruch | 2,0 - 4,0 |
| spröde | Bruch | 4,0 - 9,0 |

- Bei einem spröden Werkstoff ist eine große Sicherheit erforderlich, da sich ein Bruch nicht durch eine vorhergehende große Verformung ankündigt.

# 1.4 Zulässige Spannung

- Druckbeanspruchung:
  - Bei Druckbeanspruchung kann Versagen durch Fließen, Bruch oder Knicken auftreten.
  - Versagen durch Bruch:
    - Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Druckfestigkeit $\sigma_{dB}$ definiert:

$$S_B = \frac{\sigma_{dB}}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B}$$

  - Versagen durch Fließen:
    - Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Druckfließgrenze $\sigma_{dF}$ oder der Stauchgrenze $\sigma_{dp}$ definiert:

$$S_F = \frac{\sigma_F}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{S_F}$$

mit $\sigma_F = \sigma_{dF}$
oder $\sigma_F = \sigma_{dp}$

# 1.4 Zulässige Spannung

- Versagen durch Knicken:
  - Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Knickspannung $\sigma_K$ definiert:

$$S_K = \frac{\sigma_K}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$$

  - Die Knickspannung ist kein Werkstoffkennwert. Sie hängt von der Länge des Stabs, seinem Querschnitt und dem Elastizitätsmodul ab.

# 1.4 Zulässige Spannung

- Anhaltswerte für die Sicherheit bei Druckbeanspruchung:

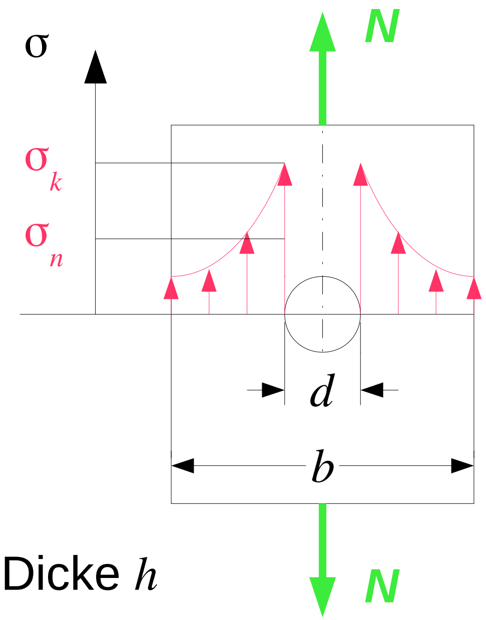
| Werkstoffart | Versagensart | Sicherheit |
|---|---|---|
| duktil | Fließen | 1,2 - 2,0 |
| | Knicken | 2,5 - 5,0 |
| spröde | Bruch | 4,0 - 9,0 |
| | Knicken | 2,5 - 5,0 |

# 1.5 Kerbwirkung

- Definition:
  - Als Kerbwirkung werden alle Einflüsse bezeichnet, die zu einer ungleichmäßigen Spannungsverteilung führen.
  - Dazu gehören
    - Bohrungen
    - Rillen
    - Nuten
    - Querschnittsübergänge

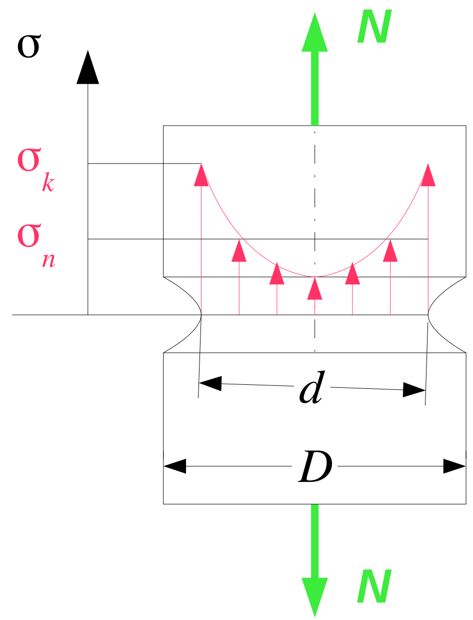
# 1.5 Kerbwirkung

- Flachstab mit Bohrung:




$$A_{min} = (b-d)\,h$$

- Rundstab mit Rille:




$$A_{min} = \frac{1}{4}\pi d^2$$

# 1.5 Kerbwirkung

- Nennspannung und Kerbspannung:
  - Die auf den kleinsten Querschnitt $A_{min}$ bezogene Spannung

$$\sigma_n = \frac{N}{A_{min}}$$

    heißt *Nennspannung*.
  - Die maximale Spannung $\sigma_k$ wird als *Kerbspannung* bezeichnet.

# 1.5 Kerbwirkung

- Formzahl:
  - Die Formzahl $\alpha_k$ ist das Verhältnis von Kerbspannung zu Nennspannung:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_n}$$

  - Sie ist abhängig von Form, Abmessungen und Beanspruchungsart.
  - Mithilfe der Formzahl kann die Kerbspannung aus der Nennspannung berechnet werden:

$$\sigma_k = \alpha_k \sigma_n$$

# 1.5 Kerbwirkung

- Zur Berechnung der Sicherheit wird die Kerbspannung verwendet:

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_k} = \frac{R_m}{\alpha_k \sigma_n}, \quad S_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_k} = \frac{\sigma_F}{\alpha_k \sigma_n}$$

- Für die Nennspannung muss gelten:

$$\sigma_n \leq \sigma_{zul} = \frac{R_m}{\alpha_k S_B} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{\alpha_k S_F}$$

# 1.5 Kerbwirkung

- Stützwirkung:
  - Bei spröden Werkstoffen wird die Bruchgefahr durch die Kerbwirkung immer erhöht.
  - Bei duktilen Werkstoffen werden die Spannungsspitzen durch Fließen abgebaut, bevor die Nennspannung die Streckgrenze überschreitet.
  - Dieser Effekt kann durch die *Stützziffer* $n_{0,2}$ berücksichtigt werden, mit der die Werkstofffließgrenze multipliziert werden darf.

# 1.5 Kerbwirkung

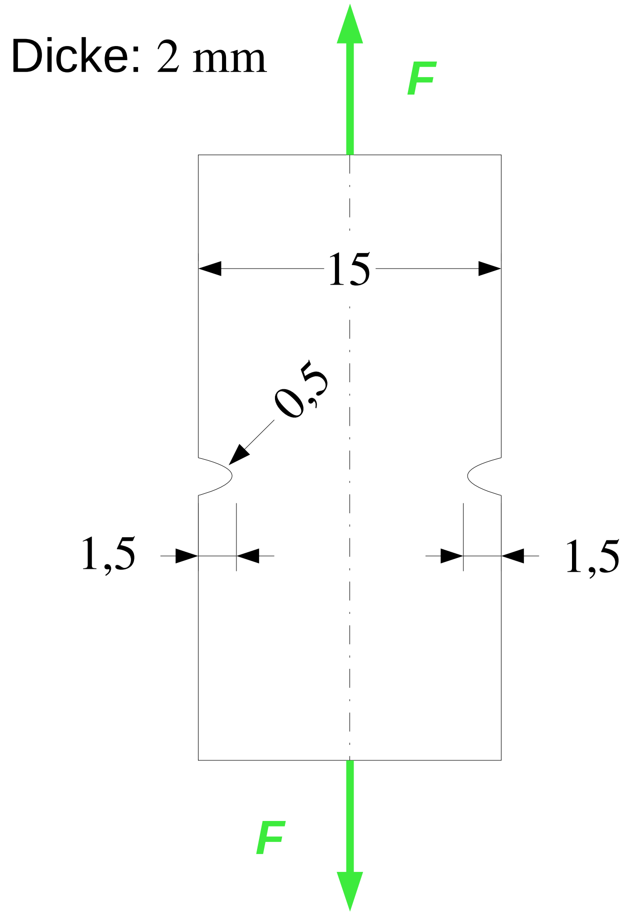
- Für die Sicherheit $S_F$ gegenüber Fließen und die zulässige Spannung gilt dann:

$$S_F = \frac{n_{0,2}\,\sigma_F}{\alpha_k\,\sigma_n} \quad \text{und} \quad \sigma_{zul} = \frac{n_{0,2}\,\sigma_F}{\alpha_k\,S_F}$$

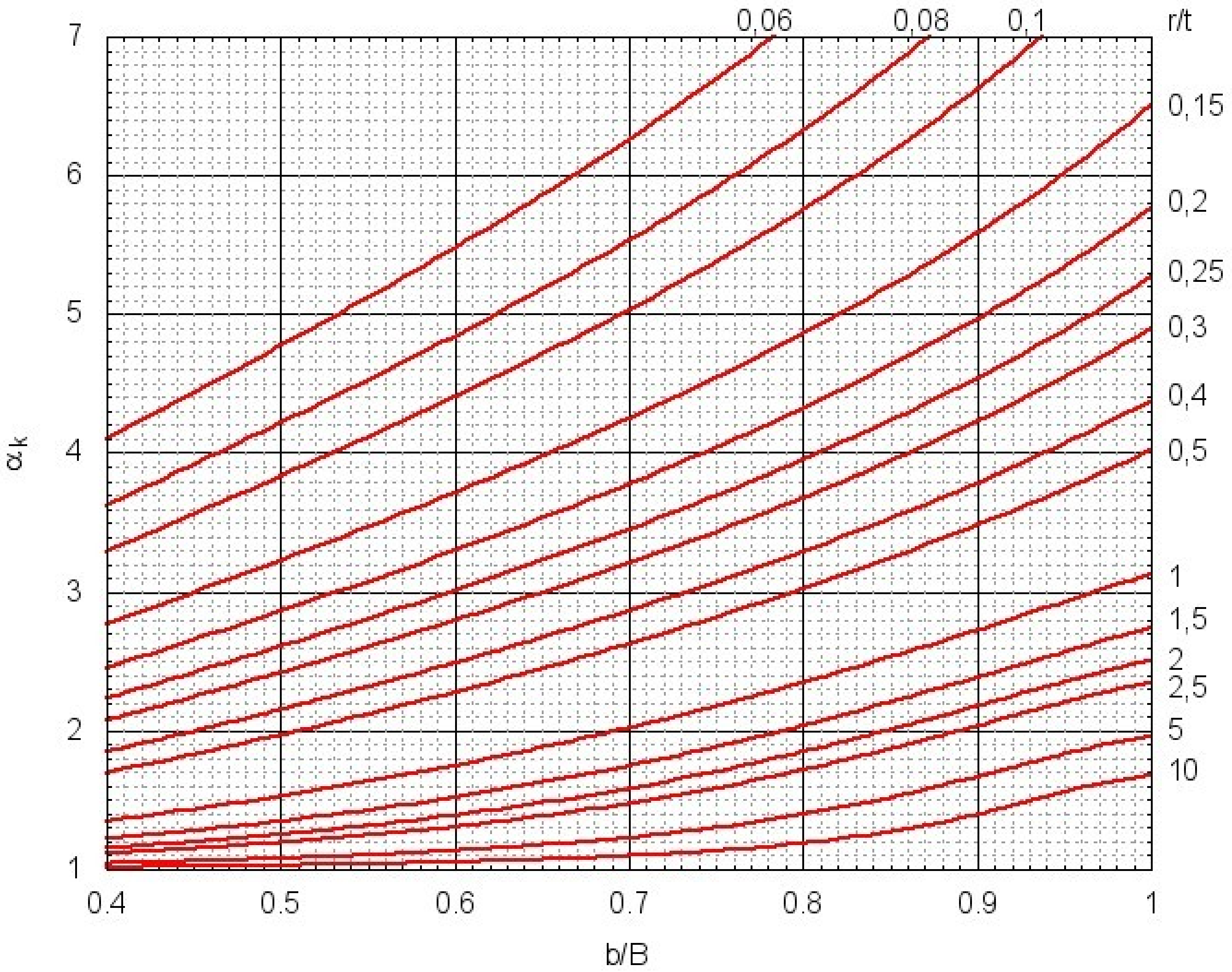
- Für den Wertebereich der Stützziffer gilt: $1 \leq n_{0,2} \leq \alpha_k$
- Für spröde Werkstoffe gilt $n_{0,2} = 1$. Es gibt keine Stützwirkung.
- Für Werkstoffe mit ausgeprägtem Fließen gilt $n_{0,2} = \alpha_k$. Die Kerbe hat bei statischer Belastung keine Wirkung.

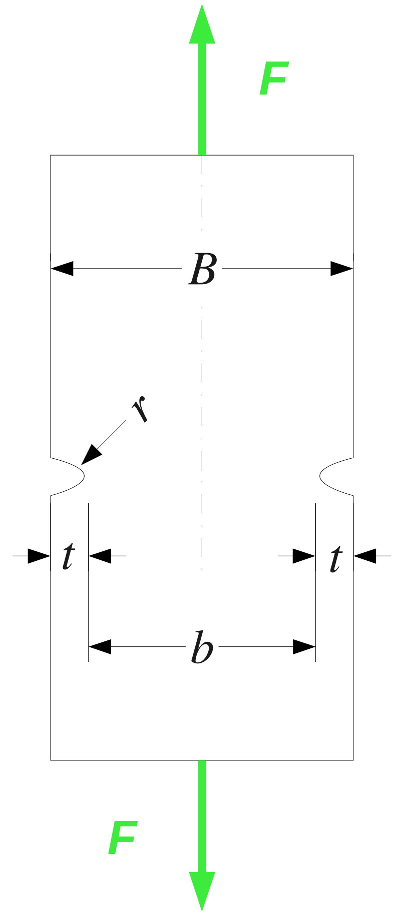
# 1.5 Kerbwirkung

- Beispiel:
  - Ein $2\ \mathrm{mm}$ dicker gekerbter Flachstab aus dem Werkstoff 18CrNi8 wird ruhend mit der Zugkraft $F = 3\ \mathrm{kN}$ belastet.
  - Gesucht ist die Sicherheit gegen Erreichen der Streckgrenze.
  - Werkstoffdaten:
    - $R_{p0,2} = 800\ \mathrm{N/mm^2}$
    - $n_{0,2} = 1$



# 1.5 Kerbwirkung



# 1.5 Kerbwirkung

- Nennspannung: $\sigma_n = \frac{N}{A_{min}} = \frac{3000\,\mathrm{N}}{12\,\mathrm{mm} \cdot 2\,\mathrm{mm}} = 125\,\mathrm{N/mm^2}$

- Formzahl: $\frac{r}{t} = \frac{0{,}5\,\mathrm{mm}}{1{,}5\,\mathrm{mm}} = 0{,}3333, \quad \frac{b}{B} = \frac{12\,\mathrm{mm}}{15\,\mathrm{mm}} = 0{,}8$

  ➔ $\alpha_k = 3{,}7$

- Kerbspannung: $\sigma_k = \alpha_k \sigma_n = 3{,}7 \cdot 125\,\mathrm{N/mm^2} = 462{,}5\,\mathrm{N/mm^2}$

- Sicherheit: $S_F = \frac{R_{p0{,}2}}{\sigma_k} = \frac{800\,\mathrm{N/mm^2}}{462{,}5\,\mathrm{N/mm^2}} = 1{,}7$

# 1.5 Kerbwirkung