

# 1. Zug und Druck

---

- Betrachtet werden Balken, bei denen als einzige Schnittlast eine Normalkraft auftritt.
- Balken, in denen nur eine Normalkraft auftritt, werden auch als Stäbe bezeichnet.
- Beispiele:
  - Stangen
  - Fachwerkstäbe
  - Türme unter Eigengewicht
- Eine positive Normalkraft tritt auch in Seilen auf.

# 1. Zug und Druck

---

1.1 Spannung

1.2 Dehnung

1.3 Materialgesetz

1.4 Zulässige Spannung

1.5 Kerbwirkung

# 1.1 Spannung

---

- Zugfestigkeit und Normalspannung:
  - Im Zugversuch wird ein Stab mit konstanter Querschnittsfläche  $A$  so belastet, dass eine über seine Länge konstante Normalkraft  $N$  auftritt.
  - Die Normalkraft  $N_B$ , bei der der Stab bricht, ist proportional zu seiner Querschnittsfläche.
  - Der Quotient
$$R_m = \frac{N_B}{A}$$
ist daher nur vom Werkstoff abhängig.
  - Er wird als *Zugfestigkeit* bezeichnet.

# 1.1 Spannung

---

- Die Zugfestigkeit ist ein Materialkennwert, der die Beanspruchbarkeit des Werkstoffs beschreibt.
- Zur Beschreibung der Beanspruchung bei Zug- oder Druckbelastung wird die *Normalspannung*  $\sigma$  definiert:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

- Das Vorzeichen der Normalspannung stimmt mit dem Vorzeichen der Normalkraft überein.
- Die Normalspannung ist positiv bei Zugbelastung und negativ bei Druckbelastung.

# 1.1 Spannung

---

- Die Normalspannung ist eine Flächenkraft. Sie hat die Einheit Kraft pro Fläche.
- Eine gebräuchliche Einheit ist:

$$1 \text{ N/mm}^2 = 10^6 \text{ N/m}^2 = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ MPa}$$

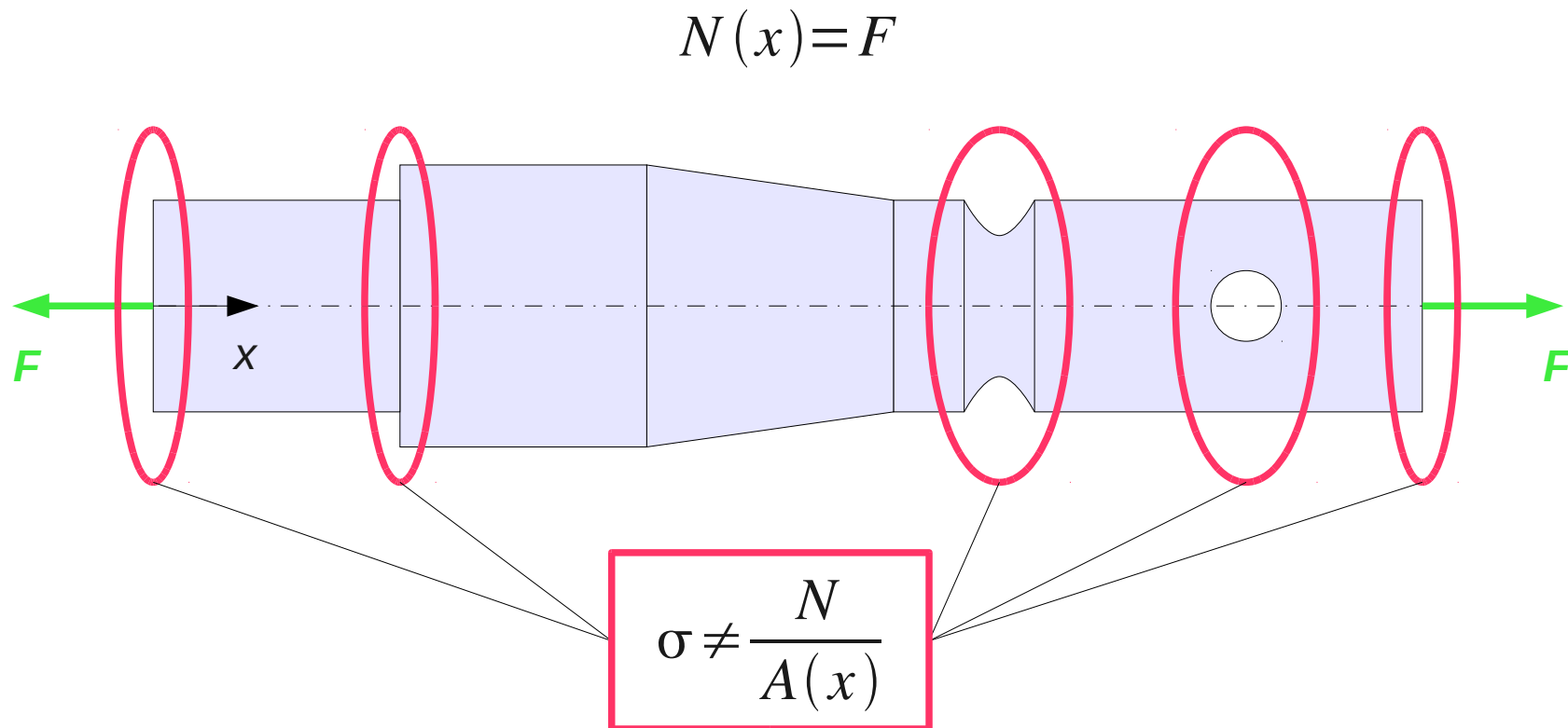
- Bruch tritt auf für  $\sigma = R_m$ .
- Verallgemeinerung:
  - Die Normalkraft in einem Querschnitt des Stabs resultiert aus einer über den Querschnitt verteilten Flächenkraft, die als Normalspannung bezeichnet wird.

# 1.1 Spannung

---

- Bei einem Stab mit konstantem Querschnitt kann davon ausgegangen werden, dass die Normalspannung in hinreichendem Abstand von der Krafteinleitung über den Querschnitt konstant ist.
- Das gilt näherungsweise auch für Stäbe mit schwach veränderlichem Querschnitt.
- Die Normalspannung ist nicht konstant über den Querschnitt
  - in der Nähe der Krafteinleitung
  - bei Querschnittssprüngen
  - bei Kerben

# 1.1 Spannung



# 1.1 Spannung

---

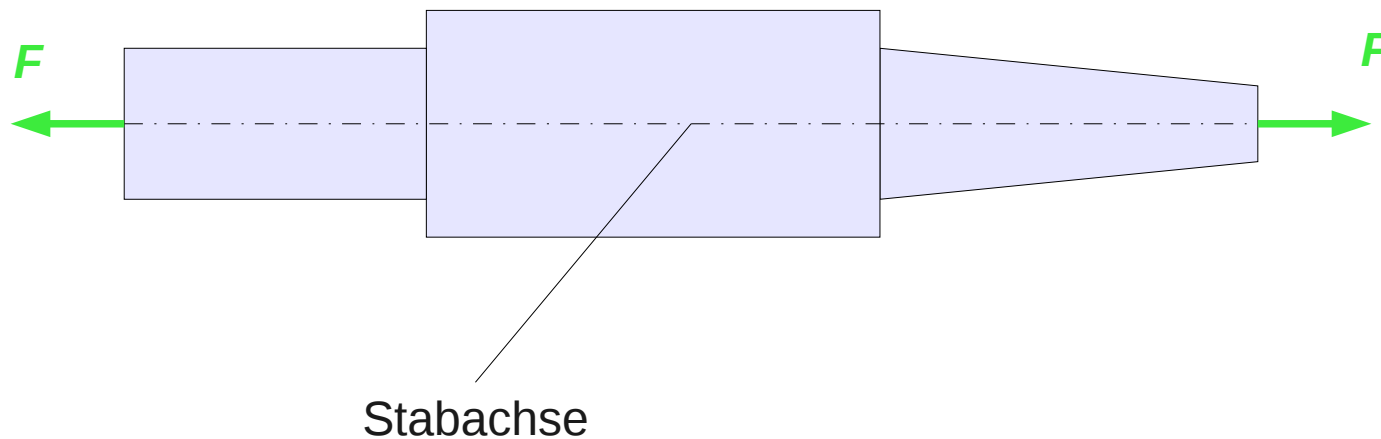
- Angriffspunkt der Normalkraft:
  - Die Normalkraft greift im Kräfte­mittelpunkt der Normalspannung an.
  - Bei einer über den Querschnitt konstanten Normalspannung ist der Kräfte­mittelpunkt gleich dem Flächenschwerpunkt.
  - Damit ein Balken nur durch eine Normalkraft belastet wird, muss die Verbindungslinie aller Flächenschwerpunkte gerade sein und die Wirkungslinie der äußeren Kräfte mit der Verbindungslinie der Flächenschwerpunkte übereinstimmen.



# 1.1 Spannung

---

- Die Verbindungslinie der Flächenschwerpunkte der Querschnitte heißt *Stabachse*.



# 1.1 Spannung

---

- Beispiel: Stahlstange

- Aufgabenstellung:

- Eine Stahlstange wird mit einer Zugkraft von 300 kN beansprucht. Die Stange hat einen Kreisquerschnitt mit einem Durchmesser von 50 mm. Gesucht ist die Normalspannung.

- Lösung:

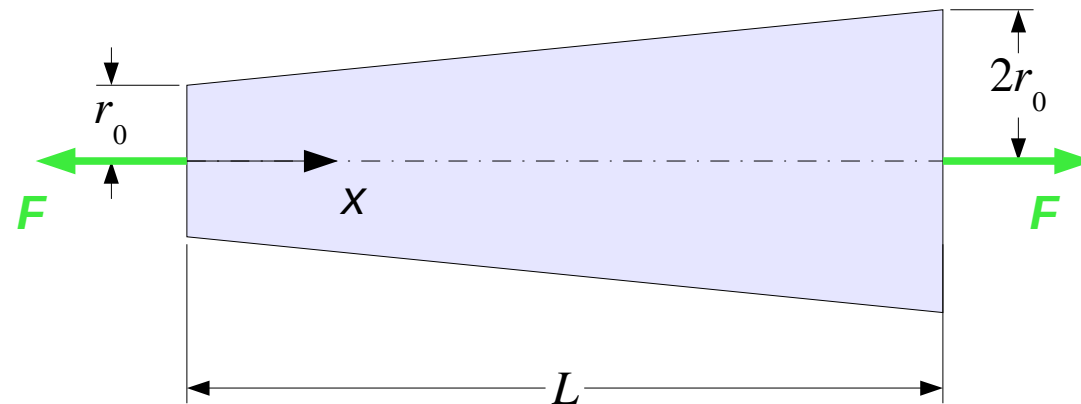
- Normalkraft:  $N = F = 300 \text{ kN}$

- Querschnittsfläche:  $A = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi \cdot 50^2 \text{ mm}^2}{4} = 1963 \text{ mm}^2$

- Normalspannung:  $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{300 \cdot 10^3 \text{ N}}{1963 \text{ mm}^2} = \underline{152,8 \text{ N/mm}^2}$

# 1.1 Spannung

- Beispiel: Konischer Stab
  - Ein konischer Stab mit kreisförmigen Querschnitt wird durch eine Zugkraft  $F$  beansprucht.
  - Wie groß ist die Normalspannung  $\sigma(x)$  in einem beliebigen Schnitt senkrecht zur Stabachse?



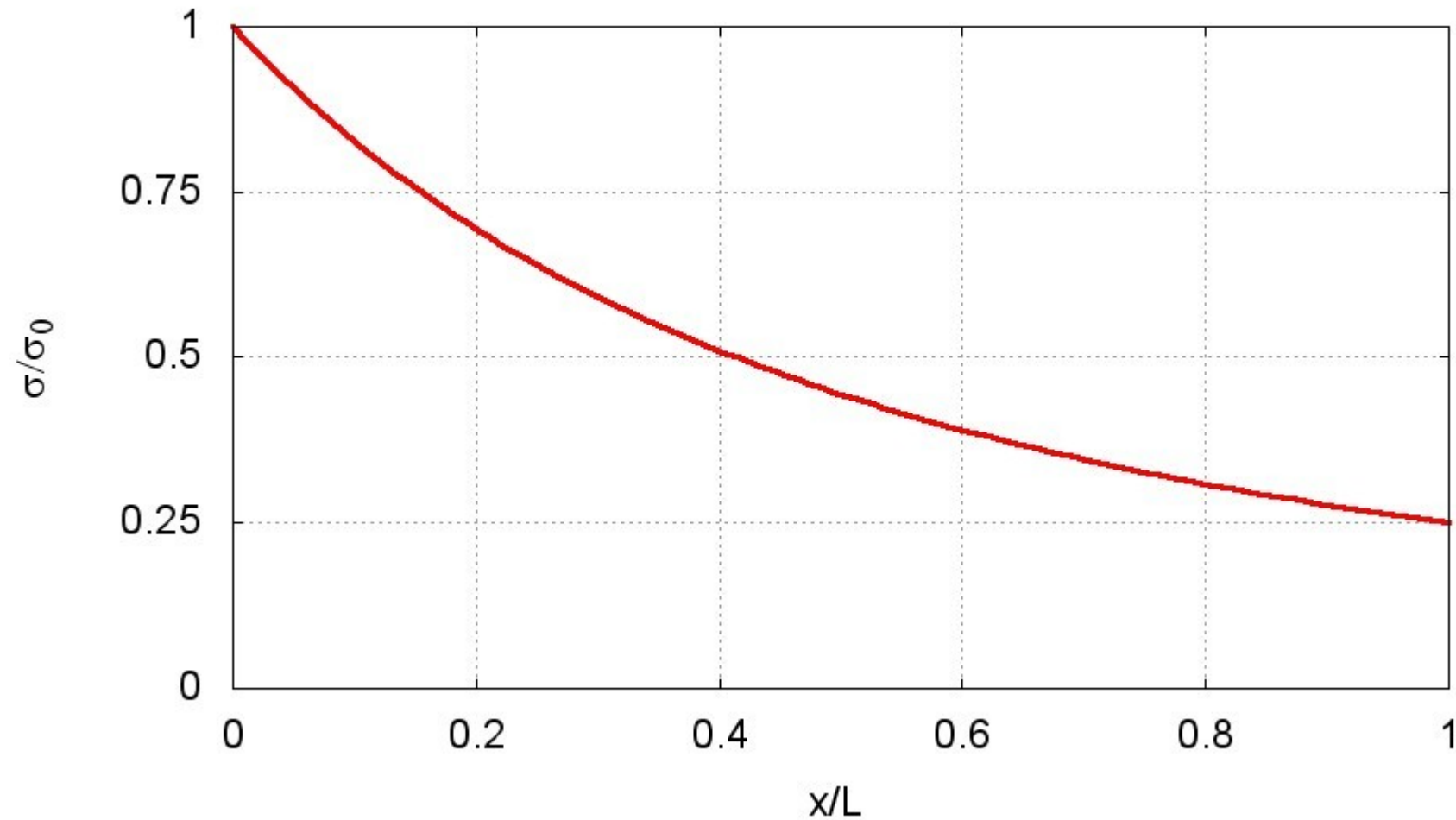
# 1.1 Spannung

---

- Radius:  $r(x) = r_0 + \left(\frac{2r_0 - r_0}{L}\right)x = r_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$
- Querschnittsfläche:  $A(x) = \pi r^2(x) = \pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$
- Normalkraft:  $N = F$
- Normalspannung:

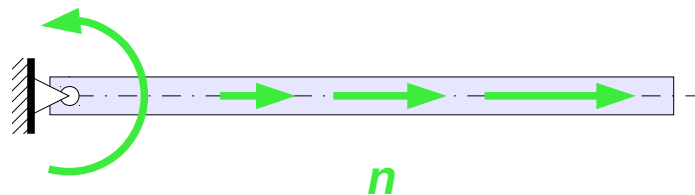
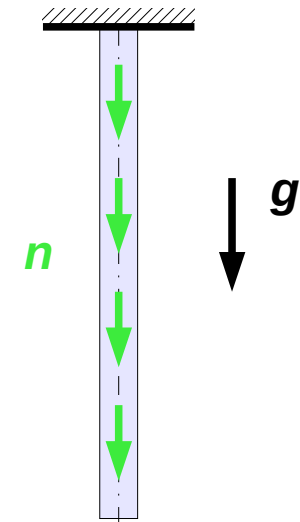
$$\sigma(x) = \frac{N}{A(x)} = \frac{F}{\pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2} = \frac{\sigma_0}{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2} \quad \text{mit} \quad \sigma_0 = \frac{F}{\pi r_0^2}$$

# 1.1 Spannung



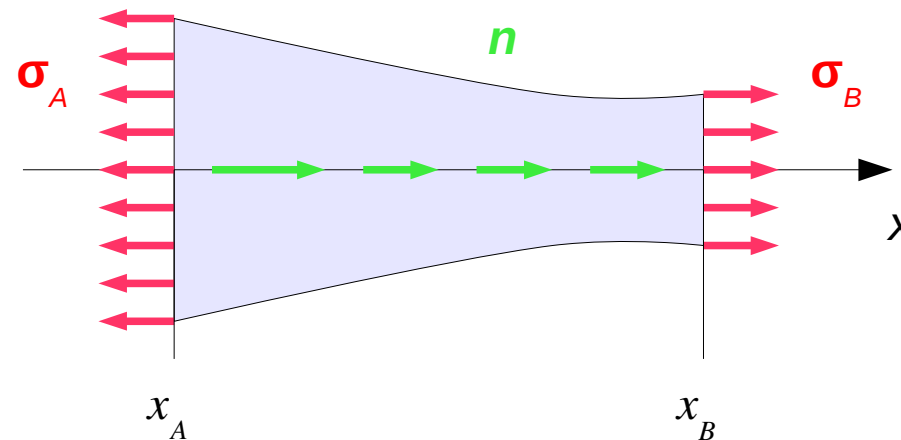
# 1.1 Spannung

- Stab unter Streckenlast:
  - Eine parallel zur Stabachse gerichtete Streckenlast führt zu einer veränderlichen Normalkraft.
  - Beispiele:
    - Stab unter Eigengewicht
    - Stab unter Fliehkraft



# 1.1 Spannung

- Spannungsverlauf im Stab mit Streckenlast:
  - Betrachtet wird ein beliebiger Stababschnitt:



- Gleichgewichtsbedingung:

$$\sum F_x = 0 : A_B \sigma_B - A_A \sigma_A + \int_{x_A}^{x_B} n dx = 0$$

# 1.1 Spannung

---

- Mit  $A_B \sigma_B - A_A \sigma_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx} (A \sigma) dx$

folgt:  $\int_{x_A}^{x_B} \left( \frac{d}{dx} (A \sigma) + n \right) dx = 0$

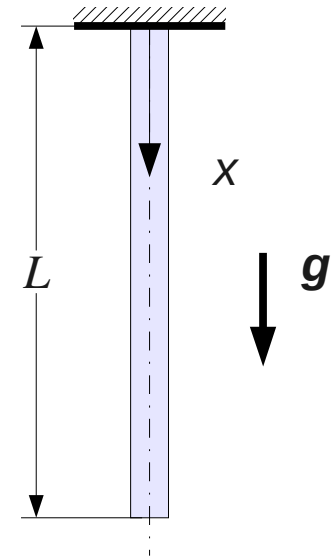
- Damit das Integral für jedes beliebige Intervall null ist, muss der Integrand null sein:

$$\frac{d}{dx} (A \sigma) + n = 0$$



# 1.1 Spannung

- Beispiel: Stab unter Eigengewicht
  - Ein Stab ist am oberen Ende fest eingespannt und wird durch sein Gewicht belastet.
  - Gegeben:
    - Querschnittsfläche  $A$
    - Massendichte  $\rho$
    - Zugfestigkeit  $R_m$
  - Gesucht:
    - Verlauf der Spannung im Stab
    - Länge  $L_R$ , bei der der Stab infolge des Eigengewichts reißt



# 1.1 Spannung

---

## - Streckenlast:

- Am Volumenelement  $dV = A dx$  greift die Gewichtskraft

$$dG = \rho g dV = \rho g A dx$$

an.

- Damit gilt für die Streckenlast:  $n = \frac{dG}{dx} = \rho g A$

## - Spannungsverlauf:

- Da die Querschnittsfläche konstant ist, gilt:

$$A \frac{d\sigma}{dx} = -\rho g A \rightarrow \frac{d\sigma}{dx} = -\rho g \rightarrow \sigma(x) = -\rho g x + c$$

# 1.1 Spannung

---

- Randbedingung:  $\sigma(L)=0$

$$0 = -\rho g L + c \rightarrow c = \rho g L$$

$$\sigma(x) = \rho g L \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{G}{A} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

- Reißlänge:

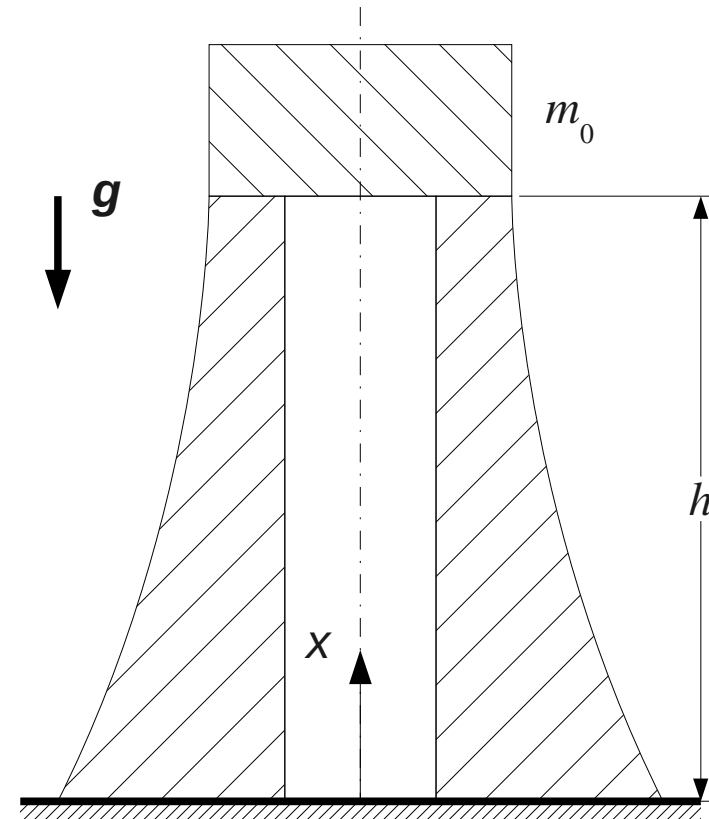
- Die größte Spannung tritt an der Einspannung auf:

$$R_m = \sigma(0) = \rho g L_R \rightarrow L_R = \frac{R_m}{\rho g}$$

- Die Länge  $L_R$  wird als *Reißlänge* bezeichnet.

# 1.1 Spannung

- Beispiel: Turm
  - Der Turm der Höhe  $h$  trägt die Masse  $m_0$ .
  - Als einzige Belastung wirkt die Schwerkraft.
  - Wie muss der Verlauf des Querschnitts gewählt werden, damit in jedem Querschnitt die gleiche Normalspannung  $\sigma_0$  auftritt?



# 1.1 Spannung

---

- Streckenlast:  $n(x) = -\rho g A(x)$
- Wenn die Spannung konstant ist, gilt:

$$\frac{dA}{dx} \sigma_0 = -n(x) = \rho g A(x)$$

$$\rightarrow \frac{dA}{A} = \frac{\rho g}{\sigma_0} dx \rightarrow \int_{A_0}^{A(x)} \frac{dA}{A} = \frac{\rho g}{\sigma_0} \int_0^x d\bar{x} = \frac{\rho g}{\sigma_0} x$$

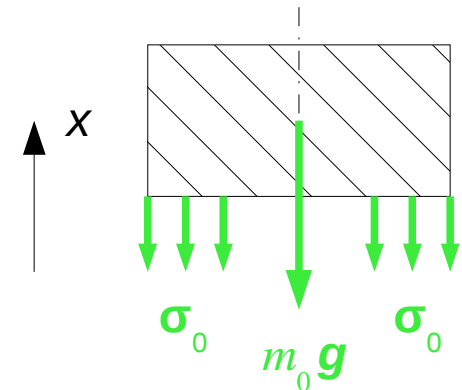
$$\rightarrow \ln\left(\frac{A(x)}{A_0}\right) = \frac{\rho g}{\sigma_0} x \rightarrow A(x) = A_0 \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_0} x\right)$$

# 1.1 Spannung

- Die Querschnittsfläche  $A_0$  folgt aus dem Gleichgewicht an der Masse  $m_0$ :

$$\sum F_x = 0 : -m_0 g - \sigma_0 A(h) = 0$$

$$\rightarrow A(h) = -\frac{m_0 g}{\sigma_0}$$



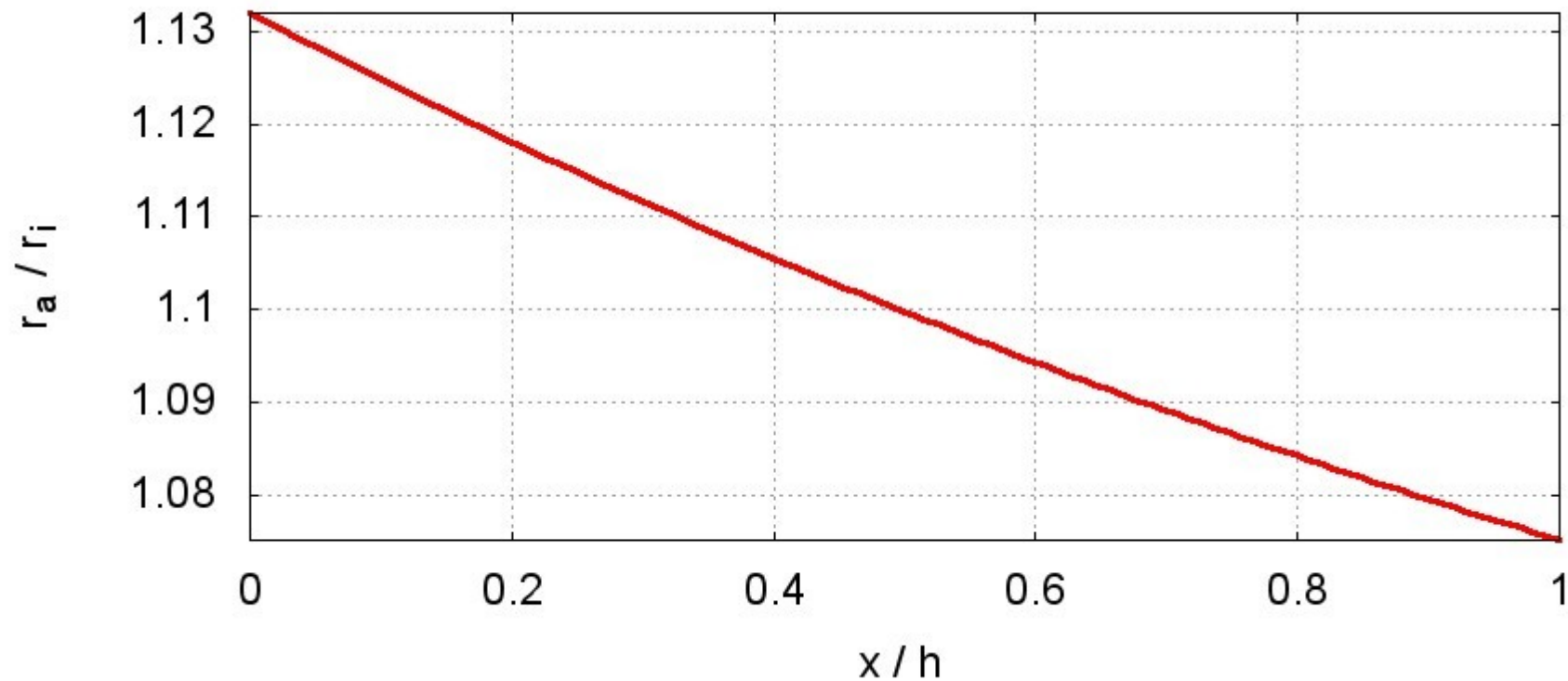
$$-\frac{m_0 g}{\sigma_0} = A_0 \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_0} h\right) \rightarrow A_0 = -\frac{m_0 g}{\sigma_0} \exp\left(-\frac{\rho g h}{\sigma_0}\right)$$

- Ergebnis: 
$$A(x) = -\frac{m_0 g}{\sigma_0} \exp\left(\frac{\rho g h}{\sigma_0} \left(\frac{x}{h} - 1\right)\right)$$

# 1.1 Spannung

- Kreisring:

$$A(x) = \pi (r_a^2(x) - r_i^2) \rightarrow r_a(x) = \sqrt{r_i^2 - \frac{m_0 g}{\pi \sigma_0} \exp\left(\frac{\rho g h}{\sigma_0} \left(\frac{x}{h} - 1\right)\right)}$$



## 1.2 Dehnung

---

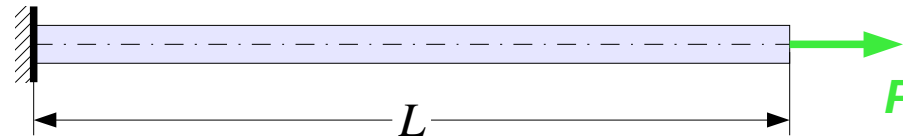
- Wird ein Stab durch eine Zug- oder Druckkraft belastet, dann ändert sich seine Länge.
- Die Längenänderung hängt von der Belastung, der Länge und dem Material ab.
- Als ein Maß für die Formänderung, das nicht von der Länge abhängt, wird die Dehnung eingeführt.



## 1.2 Dehnung

---

- Konstante Dehnung:
  - Betrachtet wird ein homogener Stab mit konstanter Querschnittsfläche  $A$ , der am linken Ende fest eingespannt ist und am rechten Ende durch die Kraft  $F$  belastet wird.

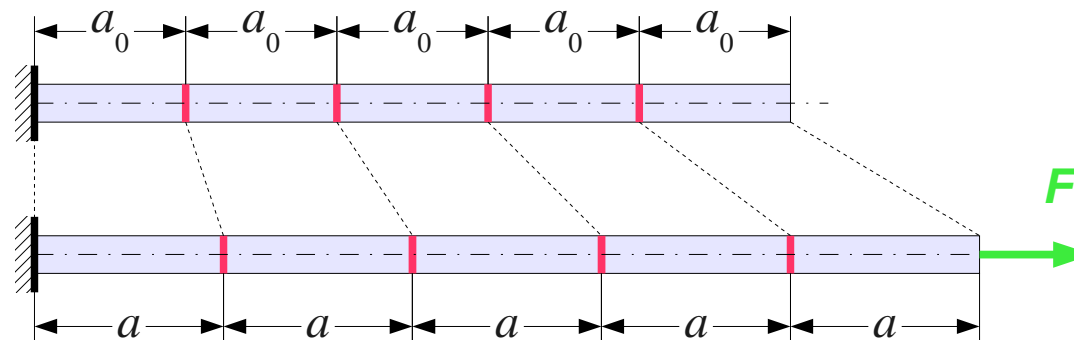


- Normalkraft und Spannung in diesem Stab sind konstant:

$$N = F, \quad \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}$$

## 1.2 Dehnung

- Am unbelasteten Stab werden im konstanten Abstand  $a_0$  Markierungen aufgebracht.
- Es zeigt sich, dass die Markierungen am belasteten Stab ebenfalls einen konstanten Abstand haben, der mit  $a$  bezeichnet wird.



## 1.2 Dehnung

---

- Für die Änderung der Länge zwischen zwei Markierungen gilt:

$$\Delta a = a - a_0$$

- Für die Änderung der Länge zwischen  $m$  aufeinanderfolgenden Markierungen folgt:

$$(m-1)a - (m-1)a_0 = (m-1)(a - a_0) = (m-1)\Delta a$$

- Für das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge gilt:

$$\frac{(m-1)\Delta a}{(m-1)a_0} = \frac{\Delta a}{a_0}$$

## 1.2 Dehnung

---

- Wird  $a_0$  hinreichend klein gewählt, so lässt sich jede Strecke auf dem Stab beliebig genau als ein Vielfaches von  $a_0$  ausdrücken.
- Daraus folgt, dass das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge für jede beliebige Strecke den gleichen Wert hat.
- Dieses Verhältnis wird als *Dehnung* bezeichnet:

$$\epsilon = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a - a_0}{a_0}$$

## 1.2 Dehnung

---

- Die Dehnung ist eine dimensionslose Größe.
- Eine positive Dehnung beschreibt eine Verlängerung, eine negative Dehnung eine Verkürzung.
- Ist  $a_0 = L_0$  die gesamte Länge des Stabs, dann gilt für seine Längenänderung:

$$\Delta L = L - L_0 = a_0 \epsilon = L_0 \epsilon$$

- Bei konstanter Dehnung kann die Dehnung aus der Längenänderung des Stabs berechnet werden:

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

## 1.2 Dehnung

---

- Zahlenbeispiel:

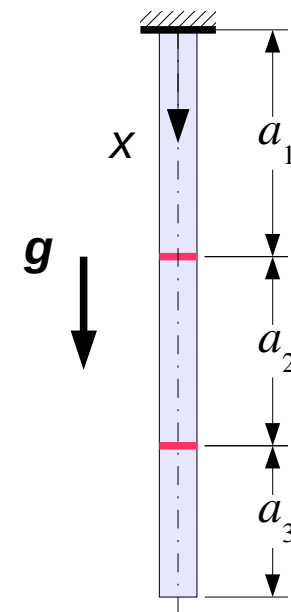
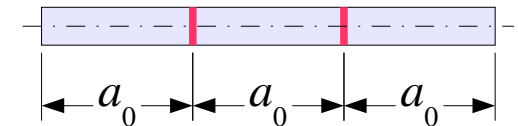
- Wird ein Stab der Länge  $L_0 = 1 \text{ m}$  um  $\Delta L = 1 \text{ mm}$  verlängert, so berechnet sich die Dehnung zu

$$\epsilon = \frac{1 \text{ mm}}{1000 \text{ mm}} = 10^{-3} = 0,1 \%$$

- In vielen technischen Fällen ist die Dehnung klein.
- Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass gilt:  $|\epsilon| \ll 1$

## 1.2 Dehnung

- Veränderliche Dehnung:
  - Betrachtet wird ein homogener Stab mit konstanter Querschnittsfläche unter Eigengewicht.
  - Auf den unbelasteten Stab werden wieder Markierungen im konstanten Abstand  $a_0$  aufgebracht.
  - Am belasteten Stab haben diese Markierungen unterschiedliche Abstände  $a_k$ .



## 1.2 Dehnung

---

- Durch

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{a_k - a_0}{a_0}$$

wird eine mittlere Dehnung definiert, die von der gewählten Länge  $a_0$  abhängt.

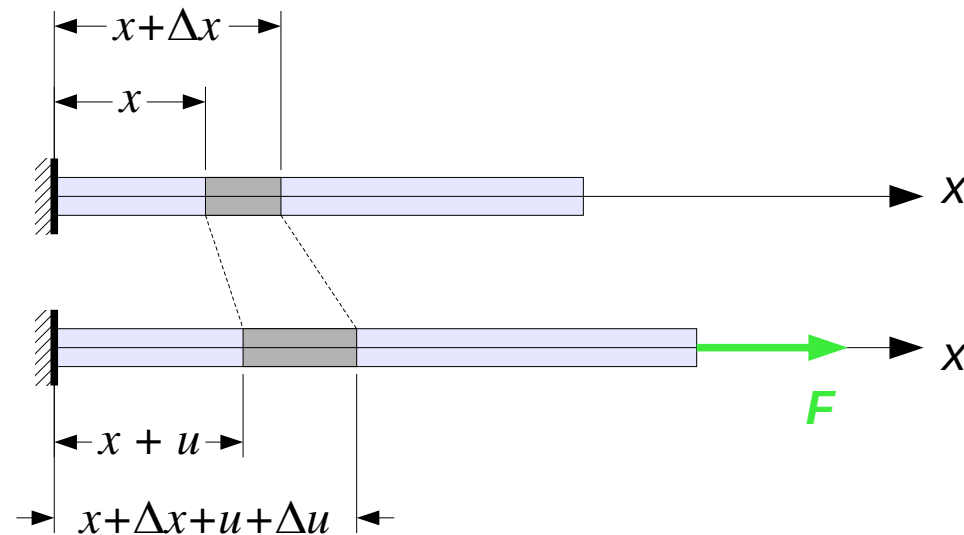
- Die *örtliche Dehnung* ist der Grenzwert der mittleren Dehnung, wenn  $a_0$  gegen null geht:

$$\epsilon(x) = \lim_{a_0 \rightarrow 0} \frac{a - a_0}{a_0}$$



## 1.2 Dehnung

- Dehnung und Verschiebung
  - Die örtliche Dehnung kann aus der Verschiebung  $u(x)$  berechnet werden. Dazu wird ein Element der Länge  $a_0 = \Delta x$  auf dem Stab markiert:



## 1.2 Dehnung

---

- Unverformtes Element:
  - Die Enden liegen an den Stellen  $x$  und  $x + \Delta x$ .
  - Das Element hat die Länge  $\Delta x$ .
- Verformtes Element:
  - Das linke Ende verschiebt sich um  $u$  an die Stelle  $x + u$ .
  - Das rechte Ende verschiebt sich um  $u + \Delta u$  an die Stelle  $x + \Delta x + u + \Delta u$ .
  - Das verformte Element hat die Länge

$$x + \Delta x + u + \Delta u - (x + u) = \Delta x + \Delta u$$

## 1.2 Dehnung

---

- Die Längenänderung des Elements berechnet sich zu

$$\Delta x + \Delta u - \Delta x = \Delta u$$

- Die mittlere Dehnung ist das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge des Elements:

$$\bar{\epsilon}(x) = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

- Die örtliche Dehnung ist der Grenzwert der mittleren Dehnung für unendlich kleine Elemente:

$$\epsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

## 1.2 Dehnung

---

- Für die Längenänderung des Stabs gilt:

$$\Delta L = u(L_0) - u(0) = \int_{u(0)}^{u(L_0)} du = \int_0^{L_0} \frac{du}{dx} dx = \int_0^{L_0} \epsilon(x) dx$$

- Beispiel: Konstante Dehnung  $\epsilon(x) = \epsilon_0 = \text{const.}$

$$\Delta L = \int_0^{L_0} \epsilon_0 dx = \epsilon_0 \int_0^{L_0} dx = \epsilon_0 L_0$$

- Beispiel: Veränderliche Dehnung  $\epsilon(x) = \epsilon_0 x / L_0$

$$\Delta L = \int_0^{L_0} \epsilon_0 \frac{x}{L_0} dx = \frac{\epsilon_0}{L_0} \int_0^{L_0} x dx = \frac{\epsilon_0}{L_0} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=L_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 L_0$$

## 1.3 Materialgesetz

---

- Ursachen für die Längenänderung eines Stabs:
  - Normalkraft
  - Temperaturänderung
- Die Längenänderung wird durch die Dehnung  $\varepsilon$  beschrieben.
- Die Längenänderung infolge einer Normalkraft hängt von der Normalspannung  $\sigma$  ab.

## 1.3 Materialgesetz

---

- Das Materialgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannung, Dehnung und Temperaturänderung:

$$\sigma = f(\epsilon, \Delta T)$$

- Das Materialgesetz ist werkstoffabhängig und wird durch Experimente ermittelt.

## 1.3 Materialgesetz

---

1.3.1 Spannung und Dehnung

1.3.2 Wärmedehnung

## 1.3.1 Spannung und Dehnung

---

- Zugversuch:

- Der Zusammenhang  $\sigma = f(\epsilon)$

zwischen Spannung  $\sigma$  und Dehnung  $\epsilon$  bei konstanter Temperatur wird im Zugversuch ermittelt.

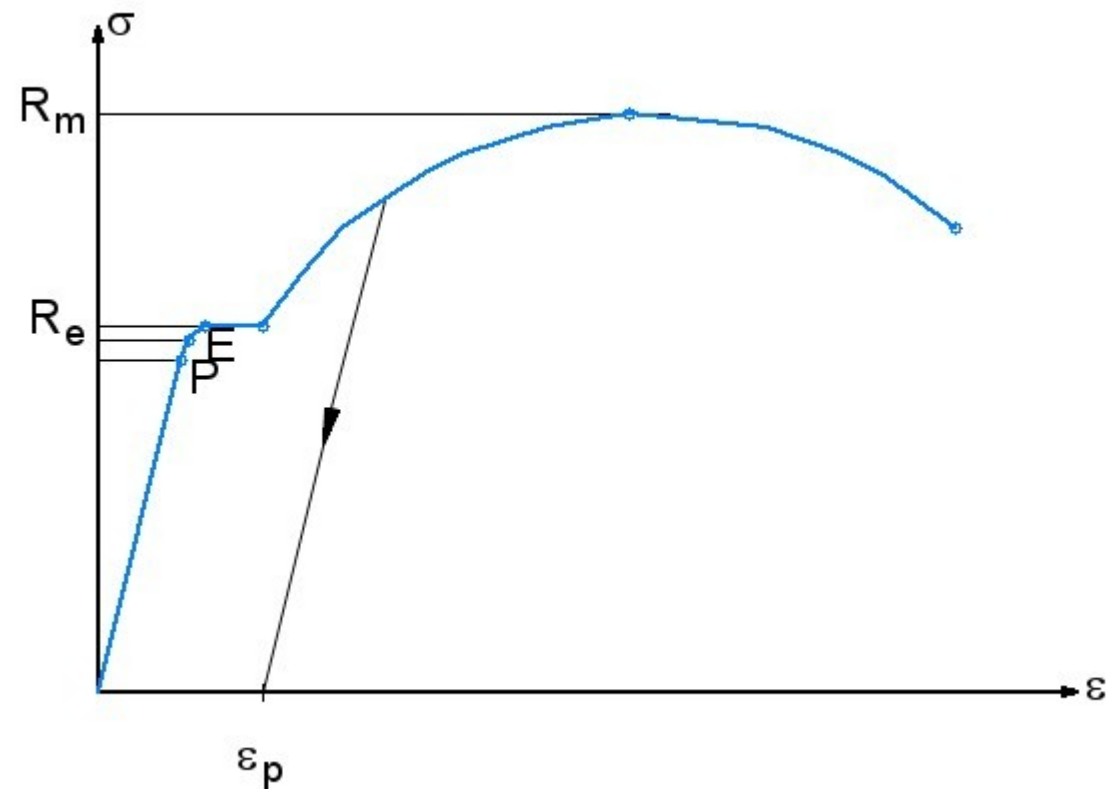
- Dabei wird die Probe mit konstanter Geschwindigkeit gedehnt und die erforderliche Kraft  $F$  gemessen.
- Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm wird die auf die Anfangsquerschnittsfläche  $A_0$  bezogene Spannung über der auf die Anfangslänge  $L_0$  bezogenen Dehnung aufgetragen:

$$\sigma = F / A_0, \quad \epsilon = \Delta L / L_0$$



## 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Duktile Metalle mit ausgeprägtem Fließbereich:
  - unlegierter Baustahl



## 1.3.1 Spannung und Dehnung

---

- Linear elastischer Bereich:  $\sigma < \sigma_p$ 
  - Bis zur *Proportionalitätsgrenze*  $\sigma_p$  ist die Spannung proportional zur Dehnung:

$$\sigma = E \epsilon$$

- Dieses Gesetz wird als *Hookesches Gesetz* bezeichnet.
- Der Proportionalitätsfaktor  $E$  heißt *Elastizitätsmodul*. Er hat die Einheit  $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$ .

## 1.3.1 Spannung und Dehnung

---

- Nichtlinear elastischer Bereich:  $\sigma < \sigma_E$ 
  - Bis zur *Elastizitätsgrenze*  $\sigma_E$  geht die Dehnung bei Entlastung wieder vollständig zurück.
  - Die Elastizitätsgrenze liegt meist sehr nahe bei der Proportionalitätsgrenze.
- Fließen:  $\sigma > R_e$ 
  - Bei Überschreiten der *Streckgrenze*  $R_e$  beginnt das Material zu fließen.
  - Die Dehnung nimmt auch bei gleichbleibender oder abnehmender Spannung zu.
  - Die Streckgrenze liegt meist sehr nahe bei der Elastizitätsgrenze.

## 1.3.1 Spannung und Dehnung

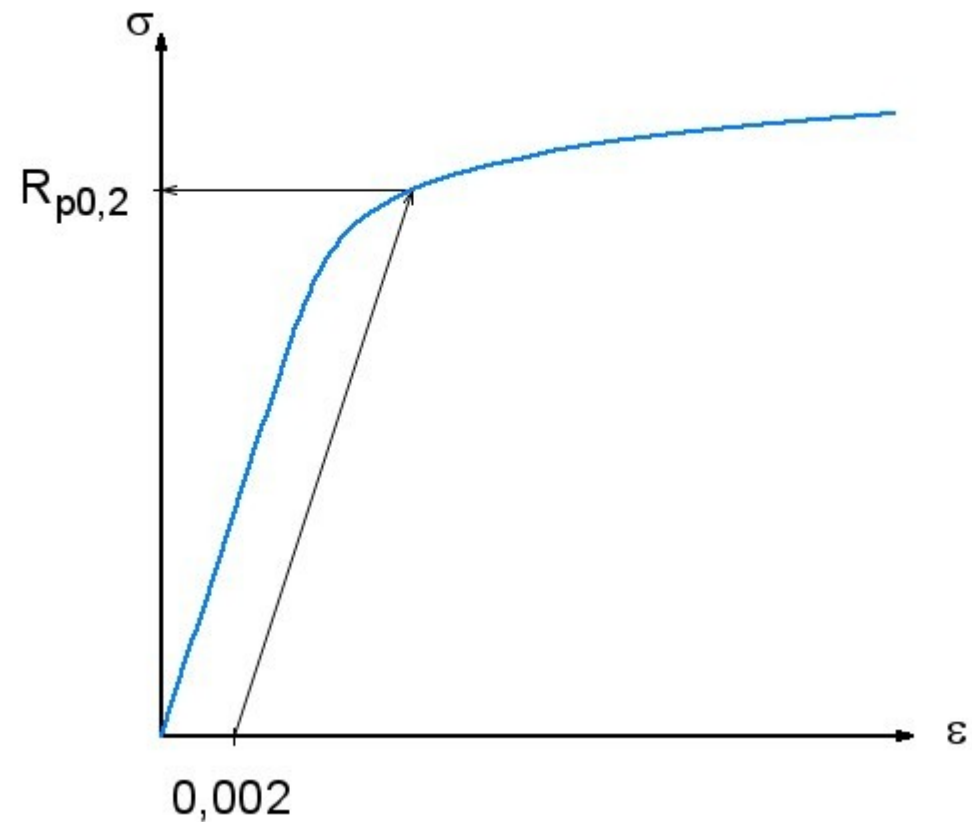
---

- Verfestigung:
  - Nach dem Fließen ermöglicht die so genannte Kaltverfestigung einen weiteren Anstieg der Spannung bis zur *Zugfestigkeit*  $R_m$ .
  - Bei Erreichen der Zugfestigkeit setzt eine Einschnürung des Querschnitts ein. Die auf den aktuellen Querschnitt bezogene Spannung steigt weiter an, während die auf den Ausgangsquerschnitt bezogene Spannung sinkt.
- Plastischer Bereich:  $\sigma > \sigma_E$ 
  - Nach der Entlastung bleibt eine plastische Dehnung  $\varepsilon_p$  zurück.
  - Die Entlastungskurve verläuft parallel zur Geraden im linear elastischen Bereich.

## 1.3.1 Spannung und Dehnung

---

- Metalle ohne ausgeprägte Fließgrenze:
  - Aluminiumlegierungen
  - vergütete Stähle



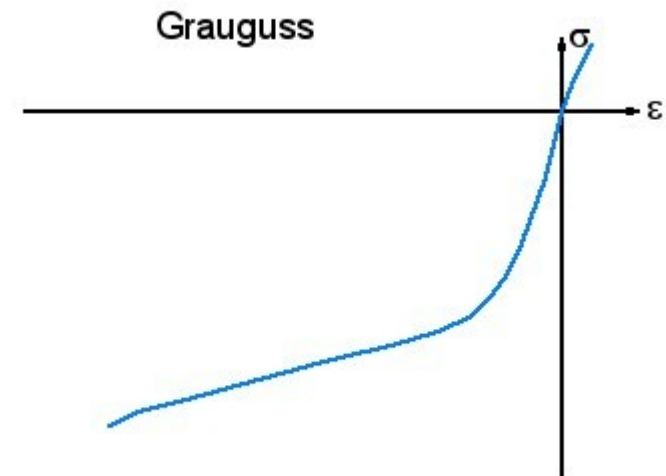
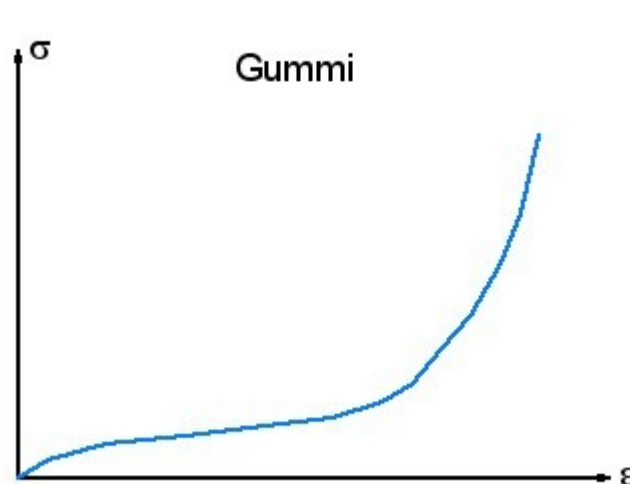
## 1.3.1 Spannung und Dehnung

---

- Bei den meisten Metallen tritt kein ausgeprägtes Fließen auf.
- Anstelle einer Streckgrenze wird die 0,2 %-Dehngrenze  $R_{p0,2}$  definiert.
- Die Spannung  $R_{p0,2}$  führt nach Entlasten zu einer bleibenden Dehnung  $\varepsilon_p$  von 0,2 %.

## 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Nichtlineare Elastizität:
  - Bei Grauguss und vielen nichtmetallischen Werkstoffen gibt es keinen Bereich, in dem die Spannungen proportional zu den Dehnungen sind.



## 1.3.1 Spannung und Dehnung

---

- Duktile Werkstoffe:
  - Ein Werkstoff, der vor dem Bruch stark gedehnt werden kann, heißt *duktil* oder *zäh*.
  - Duktile Werkstoffe
    - können Stöße und Energie absorbieren
    - zeigen die Gefahr von Versagen durch Überlastung durch eine große Verformung an
    - sind für spanloses Umformen geeignet
  - Zu den duktilen Werkstoffen gehören z. B. unlegierte Stähle und Aluminium.



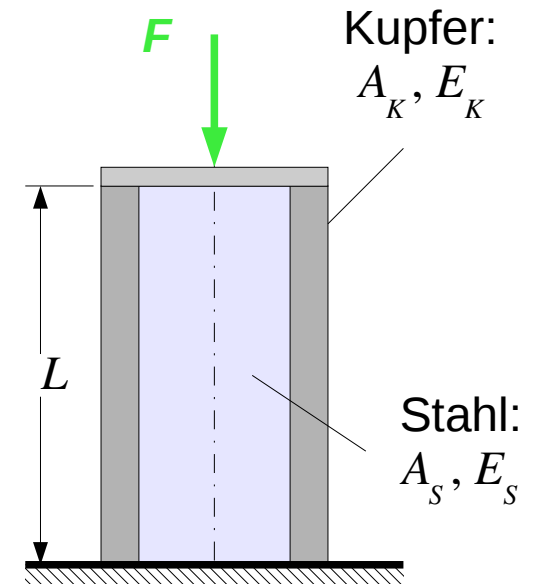
## 1.3.1 Spannung und Dehnung

---

- Spröde Werkstoffe:
  - Bei *spröden* Werkstoffen tritt kein oder nur geringes Fließen vor dem Bruch auf.
  - Spröde Werkstoffe sind sehr stoßempfindlich und können wenig Energie aufnehmen.
  - Zu den spröden Werkstoffen gehören gehärtete Stähle und Grauguss.

## 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Beispiel: Stahlstift in Kupferbuchse
  - In einer Buchse aus Kupfer befindet sich ein Stahlstift.
  - Buchse und Stift tragen eine starre Platte, auf die die Kraft  $F$  wirkt.
  - Gesucht:
    - Spannungen in Buchse und Stift
    - Verschiebung der Platte



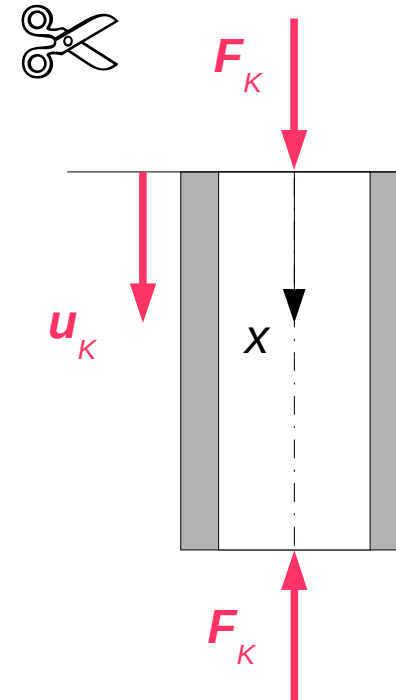
## 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Kupferbuchse:

- Spannung: 
$$\sigma_K = -\frac{F_K}{A_K}$$

- Dehnung: 
$$\epsilon_K = -\frac{F_K}{E_K A_K}$$

- Verschiebung: 
$$u_K = -\Delta L_K = \frac{F_K L}{E_K A_K}$$



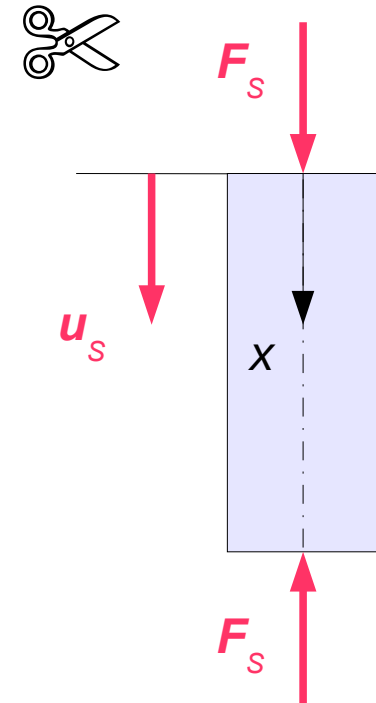
## 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Stahlstift:

- Spannung: 
$$\sigma_S = -\frac{F_S}{A_S}$$

- Dehnung: 
$$\epsilon_S = -\frac{F_S}{E_S A_S}$$

- Verschiebung: 
$$u_S = -\Delta L_S = \frac{F_S L}{E_S A_S}$$

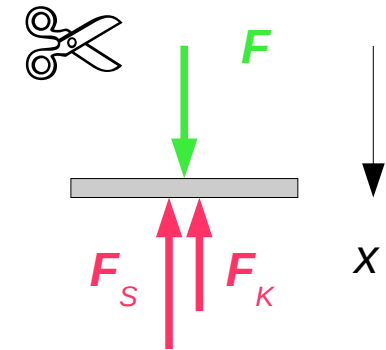


## 1.3.1 Spannung und Dehnung

- Platte:  $\sum F_x = 0 : F - F_S - F_K = 0 \rightarrow F = F_S + F_K$

- Verträglichkeitsbedingung:  $u_K = u_S$

$$\frac{F_K L}{E_K A_K} = \frac{F_S L}{E_S A_S} \rightarrow F_K = \frac{E_K A_K}{E_S A_S} F_S$$



- Einsetzen in Kräftegleichgewicht:

$$F = \left( 1 + \frac{E_K A_K}{E_S A_S} \right) F_S = \frac{E_S A_S + E_K A_K}{E_S A_S} F_S$$

$$\rightarrow F_S = \frac{E_S A_S}{E_S A_S + E_K A_K} F, \quad F_K = \frac{E_K A_K}{E_S A_S + E_K A_K} F$$

## 1.3.1 Spannung und Dehnung

---

- Ergebnisse:

- Spannungen: 
$$\sigma_S = \frac{-E_S}{E_S A_S + E_K A_K} F, \quad \sigma_K = \frac{-E_K}{E_S A_S + E_K A_K} F$$

- Verschiebung der Platte: 
$$u = u_S = \frac{F L}{E_S A_S + E_K A_K}$$

- Anmerkungen:

- Die Gleichgewichtsbedingungen alleine reichen nicht aus, um die Kräfte zu bestimmen. Das System ist statisch unbestimmt.
- Zur Berechnung von statisch unbestimmten Systemen müssen auch die Verformungen betrachtet werden.
- Bei statisch unbestimmten Systemen tragen die steiferen Bauteile eine höhere Last.

## 1.3.2 Wärmedehnung

---

- Die durch eine Temperaturänderung verursachte Dehnung heißt *Wärmedehnung*.
- Materialgesetz:
  - Für viele Werkstoffe ist die Wärmedehnung  $\epsilon_T$  proportional zur Temperaturänderung  $\Delta T$  :

$$\epsilon_T = \alpha_T \Delta T$$

- Der Proportionalitätsfaktor  $\alpha_T$  heißt *Wärmeausdehnungskoeffizient*.
- Er hat die Einheit 1/K.

## 1.3.2 Wärmedehnung

---

- Wirkt sowohl eine Spannung  $\sigma$  als auch eine Temperaturänderung  $\Delta T$ , so ergibt sich die Gesamtdehnung durch Überlagerung.

- Im linear elastischen Bereich gilt:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T$$

- Auflösen nach der Spannung ergibt:

$$\sigma = E (\epsilon - \alpha_T \Delta T)$$



## 1.3.2 Wärmedehnung

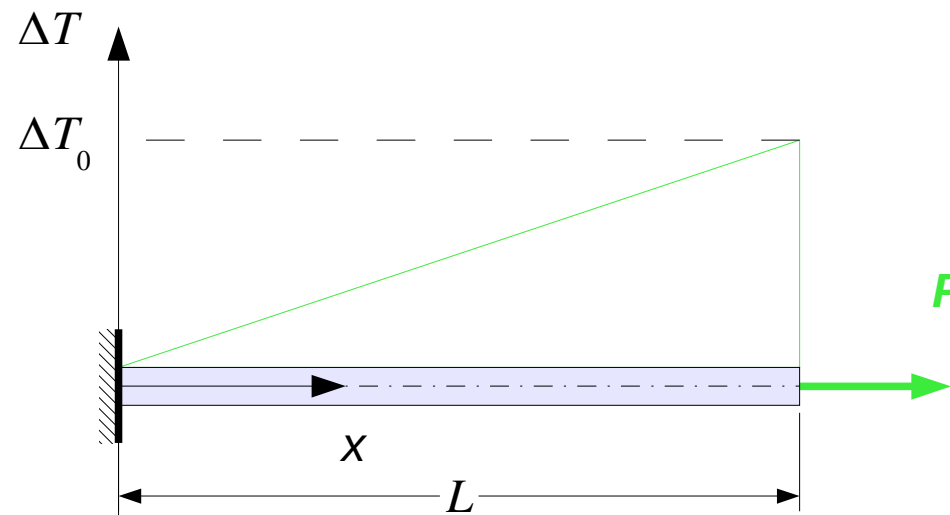
---

- Typische Werkstoffkennwerte:

Material	$E$ in $\text{N/mm}^2$	$\alpha_T$ in $1/\text{K}$
Stahl	$2,1 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	$0,7 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	$1,2 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
Messing	$1,0 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^{-5}$

## 1.3.2 Wärmedehnung

- Beispiel:
  - Der abgebildete Stab wird durch die Kraft  $F$  und die Temperaturänderung  $\Delta T(x)$  belastet.



## 1.3.2 Wärmedehnung

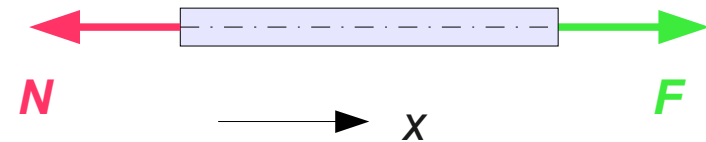
---

- Gegeben:
  - Länge  $L = 1$  m, Querschnittsfläche  $A = 5$  cm<sup>2</sup>
  - Elastizitätsmodul  $E = 70000$  MPa, Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_T = 2,3 \cdot 10^{-5}$  1/K
  - Kraft  $F = 10$  kN
  - Temperaturänderung:  $\Delta T(x) = \Delta T_0 \frac{x}{L}$  mit  $\Delta T_0 = 20$  K
- Gesucht:
  - Längenänderung  $\Delta L$

## 1.3.2 Wärmedehnung

- Normalkraft (rechter Teilbalken):

$$N(x) = \sum F_x = F$$



- Spannung:  $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \text{const.}$

- Dehnung:  $\epsilon(x) = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T(x) = \frac{F}{EA} + \alpha_T \Delta T_0 \frac{x}{L}$

## 1.3.2 Wärmedehnung

- Längenänderung:

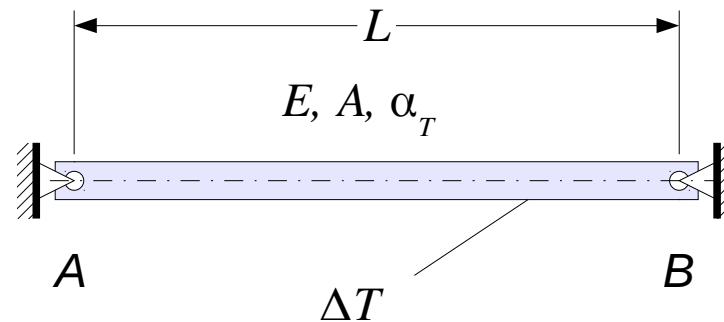
$$\begin{aligned}\Delta L &= \int_0^L \epsilon(x) dx = \frac{F}{EA} \int_0^L dx + \alpha_T \frac{\Delta T_0}{L} \int_0^L x dx \\ &= \frac{F}{EA} [x]_{x=0}^{x=L} + \alpha_T \frac{\Delta T}{L} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=L} = \frac{FL}{EA} + \frac{1}{2} \alpha_T \Delta T_0 L\end{aligned}$$

- Zahlenwert:

$$\begin{aligned}\Delta L &= \frac{10 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot 10^3 \text{ mm}}{7 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2 \cdot 5 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} + \frac{1}{2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \cdot 20 \text{ K} \cdot 10^3 \text{ mm} \\ &= 0,2857 \text{ mm} + 2,3 \cdot 10^{-1} \text{ mm} = \underline{\underline{0,5157 \text{ mm}}}\end{aligned}$$

## 1.3.2 Wärmedehnung

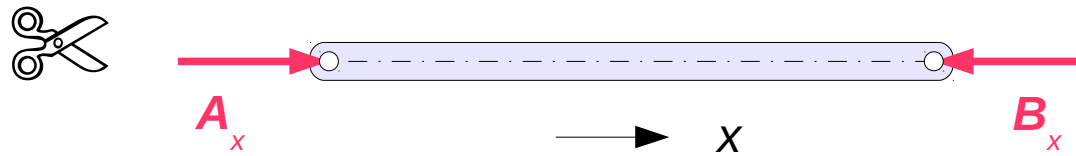
- Beispiel: Beidseitig eingespannter Stab



- Der homogene Stab mit konstantem Querschnitt  $A$  ist an beiden Enden gelenkig gelagert.
- Er wird durch eine konstante Temperaturänderung  $\Delta T$  belastet.
- Gesucht sind die Kräfte in den Lagern  $A$  und  $B$ .

## 1.3.2 Wärmedehnung

- Gleichgewicht:



$$\sum F_x = 0 : A_x - B_x = 0 \rightarrow A_x = B_x$$

- Es steht nur eine Gleichgewichtsbedingung zur Ermittlung der zwei unbekannt Kräfte zur Verfügung.
- Das System ist statisch unbestimmt: Die Gleichgewichtsbedingungen reichen zur Bestimmung der Kräfte nicht aus.
- Eine weitere Gleichung liefert die Verträglichkeitsbedingung.

## 1.3.2 Wärmedehnung

---

- Verträglichkeitsbedingung:
  - Verträglichkeitsbedingungen sind kinematische Bedingungen, die zusätzlich zu den Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein müssen.
  - Da sich der Abstand der beiden Lager nicht ändert, kann der Stab seine Länge nicht ändern.
  - Damit lautet die Verträglichkeitsbedingung:

$$\Delta L = 0 \quad : \quad 0 = L \epsilon = L \left( \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T \right) = L \left( \frac{N}{E A} + \alpha_T \Delta T \right)$$

- Mit  $N = -B_x$  folgt:  $0 = \frac{-B_x}{E A} + \alpha_T \Delta T \rightarrow B_x = E A \alpha_T \Delta T$



## 1.4 Zulässige Spannung

---

- Die tatsächlich auftretende Spannung weicht in der Regel von der berechneten Spannung ab.
- Ursachen dafür sind:
  - vereinfachende Annahmen bei der Berechnung
  - Fertigungsungenauigkeiten
  - ungenaue Kenntnis der Lasten
  - ungleichmäßige Spannungsverteilung
- Diese Abweichungen können durch Sicherheiten und zulässige Spannungen berücksichtigt werden.

## 1.4 Zulässige Spannung

---

- Grenzspannung:

- Die Grenzspannung  $\sigma_G$  ist die im Versuch ermittelte Spannung, bei der Versagen eintritt.

- Sicherheit:

- Die Sicherheit  $S$  ist das Verhältnis der Grenzspannung  $\sigma_G$  zur berechneten Spannung  $\sigma$  :

$$S = \frac{\sigma_G}{\sigma} > 1$$

- Zulässige Spannung:

- Die zulässige Spannung  $\sigma_{zul}$  ist das Verhältnis der Grenzspannung  $\sigma_G$  zur Sicherheit  $S$  :

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_G}{S} < \sigma_G$$

## 1.4 Zulässige Spannung

---

- Die Grenzspannung hängt von der Art der Beanspruchung und der Art des Versagens ab.
- Die geforderte Sicherheit hängt außerdem von den Folgen des Versagens ab.
- Zugbeanspruchung:
  - Bei Zugbeanspruchung kann Versagen durch Fließen oder Versagen durch Bruch erfolgen.
  - Versagen durch Fließen tritt bei duktilen Werkstoffen auf.
  - Versagen durch Bruch kann bei duktilen und spröden Werkstoffen auftreten.

## 1.4 Zulässige Spannung

---

### - Versagen durch Fließen:

- Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Streckgrenze  $R_e$  oder der 0,2 %-Dehngrenze  $R_{p0,2}$  definiert:

$$S_F = \frac{\sigma_F}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{S_F} \quad \text{mit} \quad \sigma_F = R_e \quad \text{oder} \quad \sigma_F = R_{p0,2}$$

### - Versagen durch Bruch:

- Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Zugfestigkeit  $R_m$  definiert:

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$$

## 1.4 Zulässige Spannung

---

- Anhaltswerte für die Sicherheit bei Zugbeanspruchung:

Werkstoffart	Versagensart	Sicherheit
duktil	Fließen	1,2 - 2,0
	Bruch	2,0 - 4,0
spröde	Bruch	4,0 - 9,0

- Bei einem spröden Werkstoff ist eine große Sicherheit erforderlich, da sich ein Bruch nicht durch eine vorhergehende große Verformung ankündigt.

## 1.4 Zulässige Spannung

---

- Druckbeanspruchung:

- Bei Druckbeanspruchung kann Versagen durch Fließen, Bruch oder Knicken auftreten.

- Versagen durch Bruch:

- Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Druckfestigkeit  $\sigma_{dB}$  definiert:

$$S_B = \frac{\sigma_{dB}}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{dB}}{S_B}$$

- Versagen durch Fließen:

- Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Druckfließgrenze  $\sigma_{dF}$  oder der Stauchgrenze  $\sigma_{dp}$  definiert:

$$S_F = \frac{\sigma_F}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{S_F}$$

mit  $\sigma_F = \sigma_{dF}$

oder  $\sigma_F = \sigma_{dp}$

## 1.4 Zulässige Spannung

---

- Versagen durch Knicken:

- Sicherheit und zulässige Spannung werden mithilfe der Knickspannung  $\sigma_K$  definiert:

$$S_K = \frac{\sigma_K}{\sigma}, \quad \sigma_{zul} = \frac{\sigma_K}{S_K}$$

- Die Knickspannung ist kein Werkstoffkennwert. Sie hängt von der Länge des Stabs, seinem Querschnitt und dem Elastizitätsmodul ab.

## 1.4 Zulässige Spannung

---

- Anhaltswerte für die Sicherheit bei Druckbeanspruchung:

Werkstoffart	Versagensart	Sicherheit
duktil	Fließen	1,2 - 2,0
	Knicken	2,5 - 5,0
spröde	Bruch	4,0 - 9,0
	Knicken	2,5 - 5,0



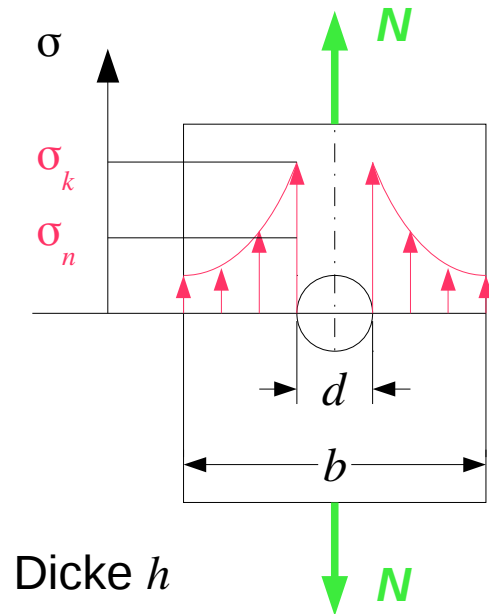
## 1.5 Kerbwirkung

---

- Definition:
  - Als Kerbwirkung werden alle Einflüsse bezeichnet, die zu einer ungleichmäßigen Spannungsverteilung führen.
  - Dazu gehören
    - Bohrungen
    - Rillen
    - Nuten
    - Querschnittsübergänge

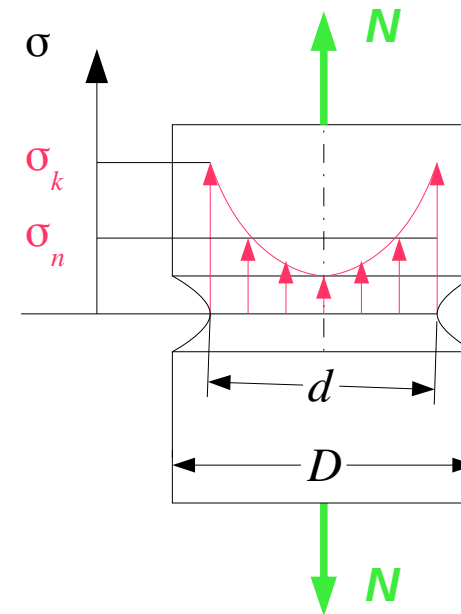
# 1.5 Kerbwirkung

- Flachstab mit Bohrung:



$$A_{min} = (b - d) h$$

- Rundstab mit Rille:



$$A_{min} = \frac{1}{4} \pi d^2$$

## 1.5 Kerbwirkung

---

- Nennspannung und Kerbspannung:
  - Die auf den kleinsten Querschnitt  $A_{min}$  bezogene Spannung

$$\sigma_n = \frac{N}{A_{min}}$$

heißt *Nennspannung*.

- Die maximale Spannung  $\sigma_k$  wird als *Kerbspannung* bezeichnet.

## 1.5 Kerbwirkung

---

- Formzahl:

- Die Formzahl  $\alpha_k$  ist das Verhältnis von Kerbspannung zu Nennspannung:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_n}$$

- Sie ist abhängig von Form, Abmessungen und Beanspruchungsart.
- Mithilfe der Formzahl kann die Kerbspannung aus der Nennspannung berechnet werden:

$$\sigma_k = \alpha_k \sigma_n$$

## 1.5 Kerbwirkung

---

- Zur Berechnung der Sicherheit wird die Kerbspannung verwendet:

$$S_B = \frac{R_m}{\sigma_k} = \frac{R_m}{\alpha_k \sigma_n}, \quad S_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_k} = \frac{\sigma_F}{\alpha_k \sigma_n}$$

- Für die Nennspannung muss gelten:

$$\sigma_n \leq \sigma_{zul} = \frac{R_m}{\alpha_k S_B} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{\alpha_k S_F}$$

## 1.5 Kerbwirkung

---

- Stützwirkung:
  - Bei spröden Werkstoffen wird die Bruchgefahr durch die Kerbwirkung immer erhöht.
  - Bei duktilen Werkstoffen werden die Spannungsspitzen durch Fließen abgebaut, bevor die Nennspannung die Streckgrenze überschreitet.
  - Dieser Effekt kann durch die *Stützziffer*  $n_{0,2}$  berücksichtigt werden, mit der die Werkstofffließgrenze multipliziert werden darf.

## 1.5 Kerbwirkung

---

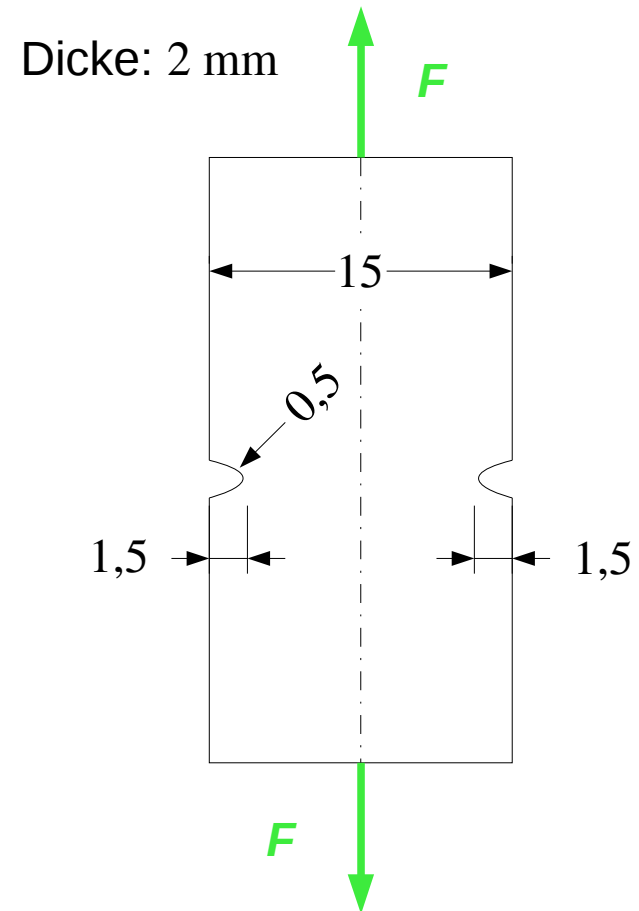
- Für die Sicherheit  $S_F$  gegenüber Fließen und die zulässige Spannung gilt dann:

$$S_F = \frac{n_{0,2} \sigma_F}{\alpha_k \sigma_n} \quad \text{und} \quad \sigma_{zul} = \frac{n_{0,2} \sigma_F}{\alpha_k S_F}$$

- Für den Wertebereich der Stützziffer gilt:  $1 \leq n_{0,2} \leq \alpha_k$
- Für spröde Werkstoffe gilt  $n_{0,2} = 1$ . Es gibt keine Stützwirkung.
- Für Werkstoffe mit ausgeprägtem Fließen gilt  $n_{0,2} = \alpha_k$ . Die Kerbe hat bei statischer Belastung keine Wirkung.

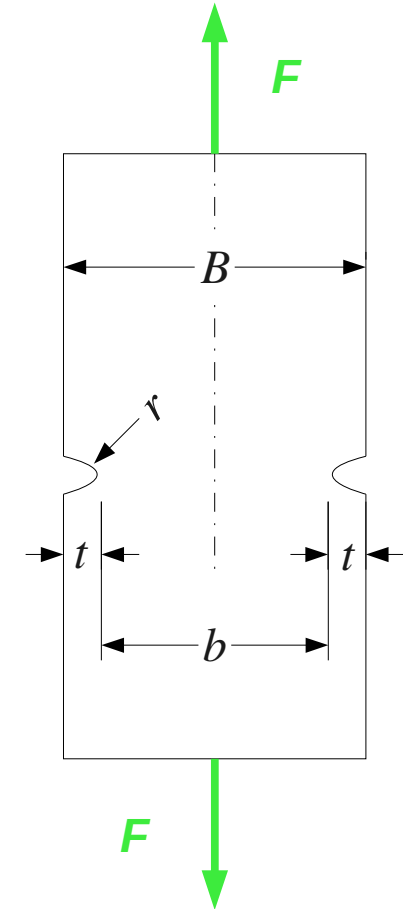
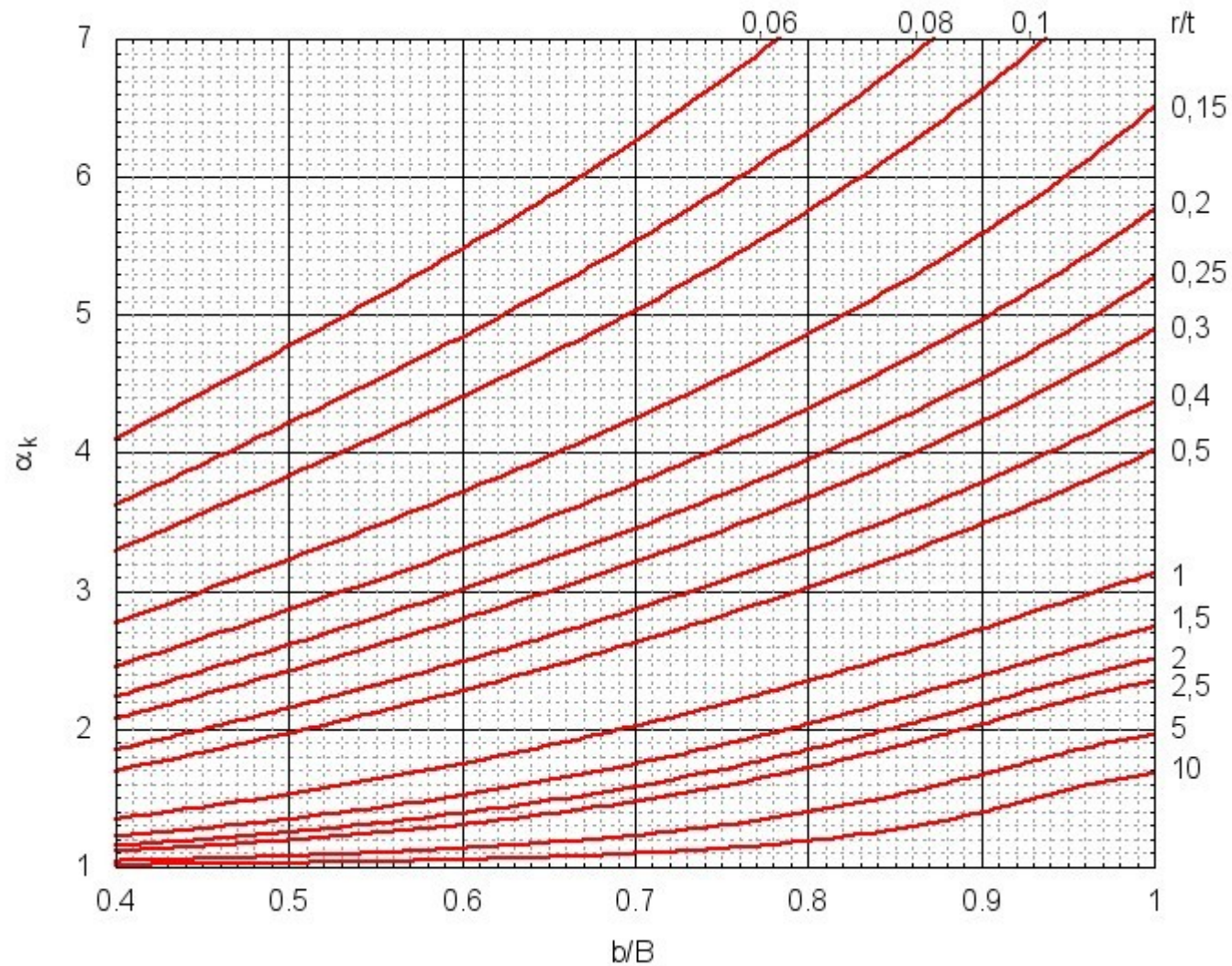
# 1.5 Kerbwirkung

- Beispiel:
  - Ein 2 mm dicker gekerbter Flachstab aus dem Werkstoff 18CrNi8 wird ruhend mit der Zugkraft  $F = 3 \text{ kN}$  belastet.
  - Gesucht ist die Sicherheit gegen Erreichen der Streckgrenze.
  - Werkstoffdaten:
    - $R_{p0,2} = 800 \text{ N/mm}^2$
    - $n_{0,2} = 1$





# 1.5 Kerbwirkung



## 1.5 Kerbwirkung

---

- Nennspannung: 
$$\sigma_n = \frac{N}{A_{min}} = \frac{3000 \text{ N}}{12 \text{ mm} \cdot 2 \text{ mm}} = 125 \text{ N/mm}^2$$

- Formzahl: 
$$\frac{r}{t} = \frac{0,5 \text{ mm}}{1,5 \text{ mm}} = 0,3333, \quad \frac{b}{B} = \frac{12 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} = 0,8$$

→  $\alpha_k = 3,7$

- Kerbspannung: 
$$\sigma_k = \alpha_k \sigma_n = 3,7 \cdot 125 \text{ N/mm}^2 = 462,5 \text{ N/mm}^2$$

- Sicherheit: 
$$S_F = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_k} = \frac{800 \text{ N/mm}^2}{462,5 \text{ N/mm}^2} = 1,7$$

# 1.5 Kerbwirkung

