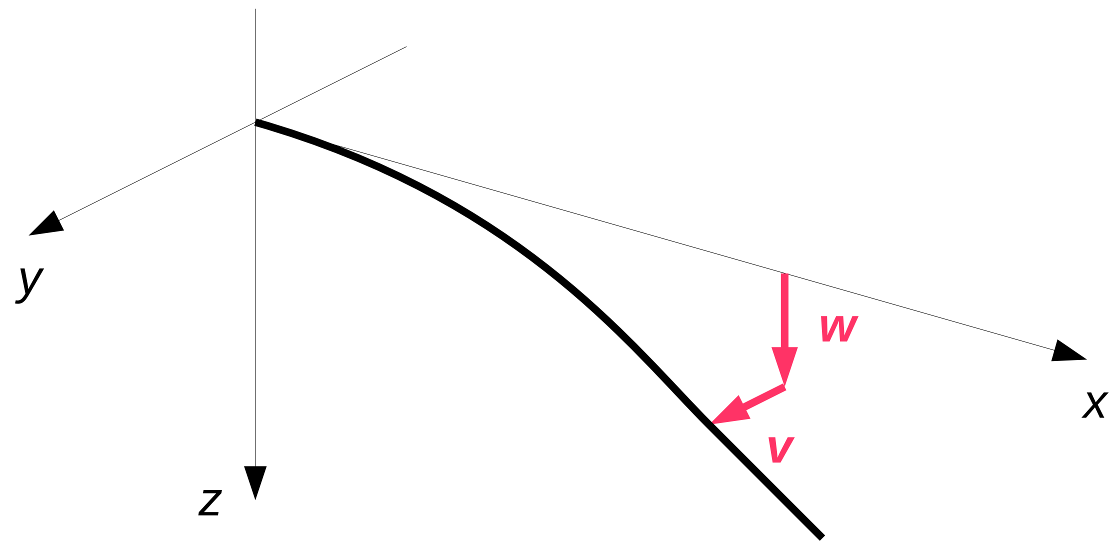
3. Biegelinie

- Die Biegemomente führen zu einer Verformung der Balkenachse, die als Biegelinie bezeichnet wird.
- Die Biegelinie wird beschrieben durch die Verschiebung v in *y*-Richtung und die Verschiebung w in *z*-Richtung.



3. Biegelinie

- Ebene Biegung:
  - Für $M_z = 0$ und $I_{yz} = 0$ verformt sich der Balken nur in der *xz*-Ebene.
  - Die Biegelinie wird durch die Verschiebung w beschrieben. Die Verschiebung v ist null.
  - Dieser Spezialfall wird als ebene Biegung bezeichnet.
- Räumliche Biegung:
  - Für $M_z \neq 0$ oder $I_{yz} \neq 0$ treten Verschiebungen v und w auf.
  - Dieser allgemeine Fall wird meist als schiefe Biegung bezeichnet.

3. Biegelinie

3.1 Ebene Biegung

3.2 Räumliche Biegung

3.1 Ebene Biegung

- Kinematische Annahmen:
  - Es wird angenommen, dass die Scherung vernachlässigt werden darf. Dann treten keine Winkeländerungen auf.
  - Daraus folgt unmittelbar die Bernoulli-Hypothese:
    - Ebene Querschnitte bleiben eben.
    - Querschnitte senkrecht zur Balkenachse sind am verformten Balken senkrecht zur Biegelinie.
  - Diese Annahmen sind bei schlanken Balken zulässig.
  - Bei querkraftfreier Biegung sind die Annahmen exakt erfüllt.

3.1 Ebene Biegung

- Differenzialgleichung der Biegelinie:
  - Einsetzen von

$$u(x,z)=\phi(x)z$$

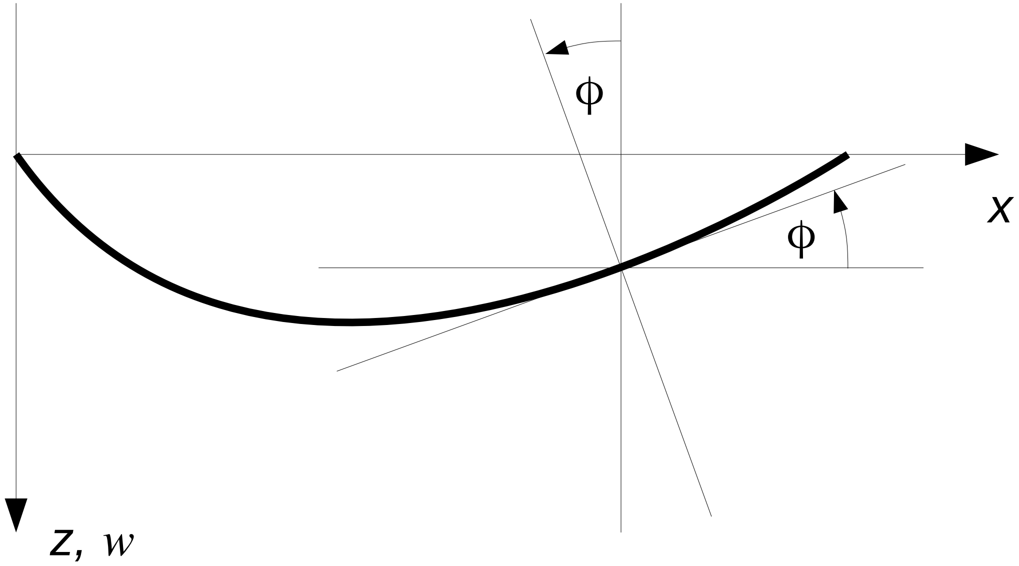
in

$$0=\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

ergibt:

$$\phi(x)+\frac{dw}{dx}(x)=0$$

$$\rightarrow \quad \frac{dw}{dx}(x)=-\phi(x)$$



$$\phi\approx\tan(\phi)=-\frac{dw}{dx}$$

3.1 Ebene Biegung

- Mit

$$\frac{d\,\phi}{dx}=\frac{M_y}{E\,I_y}$$

folgt:

$$\boxed{\frac{d^2 w}{dx^2}=-\frac{M_y}{E\,I_y}}$$

- Daraus kann die Gleichung $w(x)$ der Biegelinie durch zweimalige Integration ermittelt werden.
- Die Integrationskonstanten werden durch die Randbedingungen festgelegt.

3.1 Ebene Biegung

- Weitere Differenzialbeziehungen:
  - Weiteres Ableiten der Differenzialgleichung der Biegelinie ergibt:

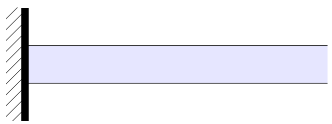
$$\frac{d}{dx}\left(E\,I_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)=-\frac{dM_y}{dx}=-Q_z\,,\quad \frac{d^2}{dx^2}\left(E\,I_y\frac{d^2w}{dx^2}\right)=-\frac{dQ_z}{dx}=q_z$$

  - Bei konstanter Biegesteifigkeit EI_y gilt:

$$\boxed{E\,I_y\frac{d^2w}{dx^2}=-M_y\,,\quad E\,I_y\frac{d^3w}{dx^3}=-Q_z\,,\quad E\,I_y\frac{d^4w}{dx^4}=q_z}$$

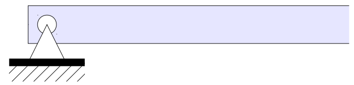
3.1 Ebene Biegung

- Randbedingungen:
  - Die bei den Integrationen auftretenden Integrationskonstanten werden durch die Randbedingungen festgelegt.
  - Feste Einspannung:



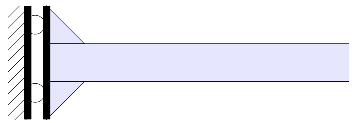
$$w = 0,\ \phi = 0$$

  - Gelenk:



$$w = 0,\ M_y = 0$$

  - Parallelführung:



$$\phi = 0,\ Q_z = 0$$

  - Freies Ende:

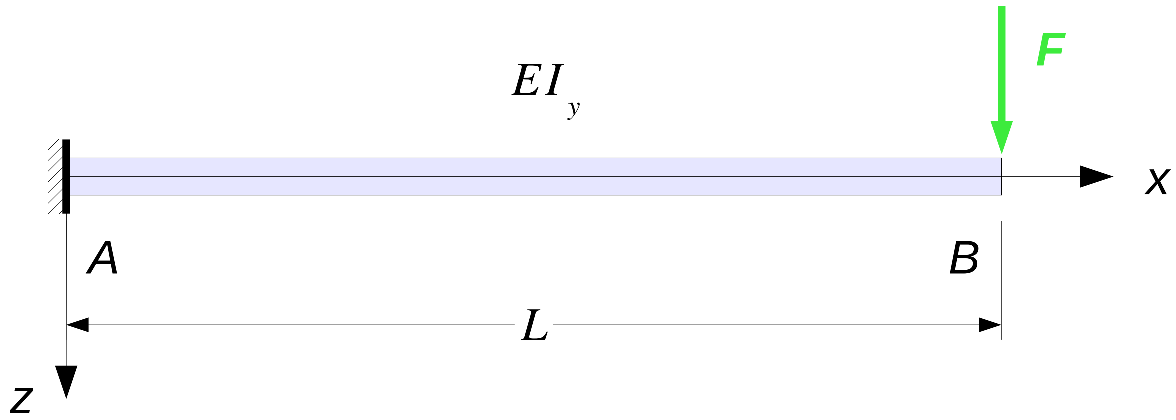
$$M_y = 0,\ Q_z = 0$$

3.1 Ebene Biegung

- Die Randbedingungen für w und ϕ werden als *geometrische* Randbedingungen bezeichnet.
- Die Randbedingungen für M_y und Q_z werden als *statische* Randbedingungen bezeichnet.
- Wenn die Biegelinie durch zweifache Integration des Biegemoments gewonnen wird, müssen nur noch die geometrischen Randbedingungen erfüllt werden. Die statischen Randbedingungen sind bereits infolge der Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, die zur Ermittlung des Biegemoments benutzt wurden.

3.1 Ebene Biegung

- Beispiel: Kragbalken mit Endlast



  - Gegeben:
    - Kraft F, Länge L, Biegesteifigkeit EI_y
  - Gesucht:
    - Biegelinie $w(x)$, Durchbiegung w_B im Punkt *B*

3.1 Ebene Biegung

- Biegemoment: (rechter Teilbalken)

$$M_y = -F(L-x) = -F\,L + F\,x$$

- Integrationen:

$$E\,I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = F\,L - F\,x$$

$$E\,I_y \frac{dw}{dx} = F\,L\,x - \frac{1}{2} F\,x^2 + c_1$$

$$E\,I_y\,w = \frac{1}{2} F\,L\,x^2 - \frac{1}{6} F\,x^3 + c_1\,x + c_2$$

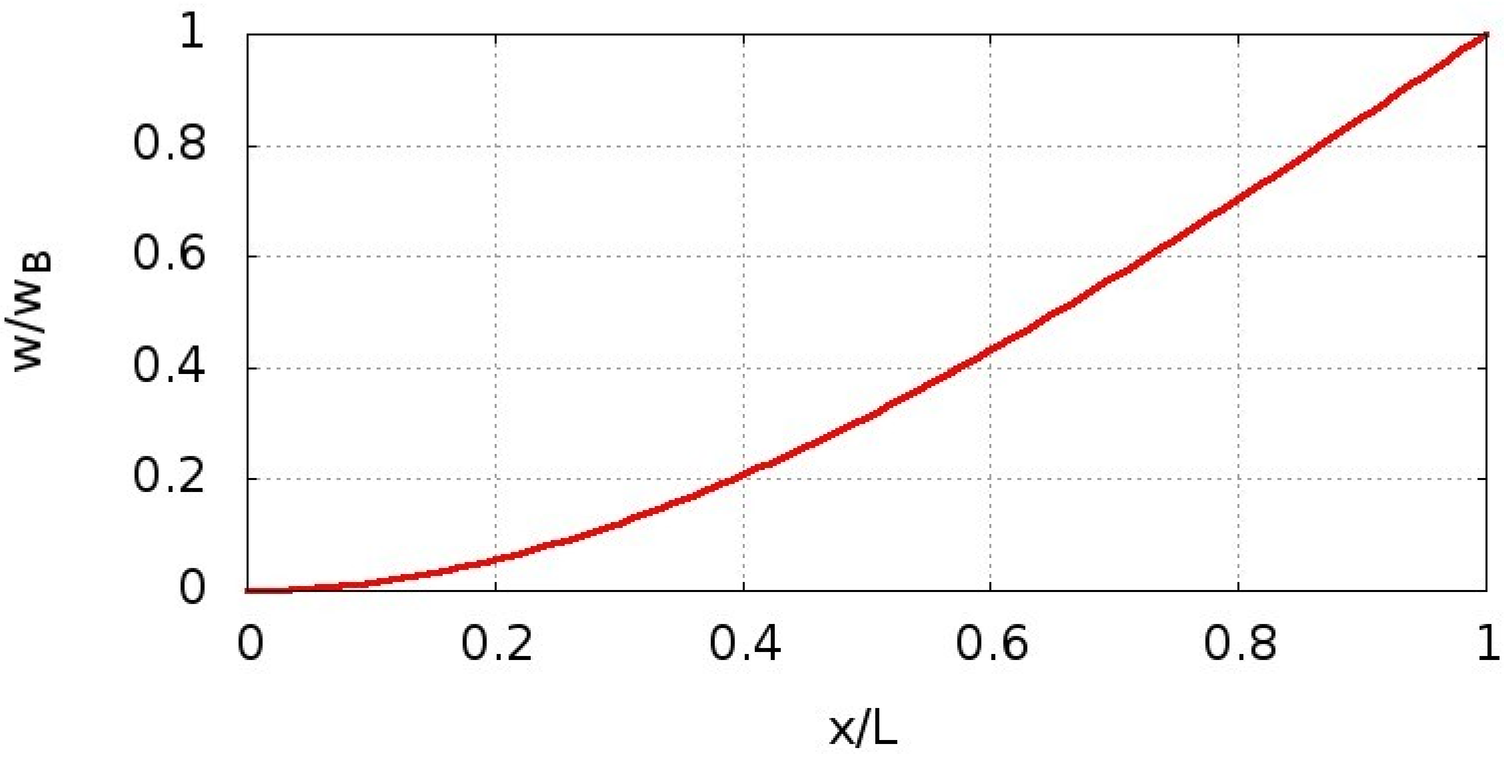
- Randbedingungen:

$$\frac{dw}{dx}(0) = 0 \;\rightarrow\; c_1 = 0$$

$$w(0) = 0 \;\rightarrow\; c_2 = 0$$

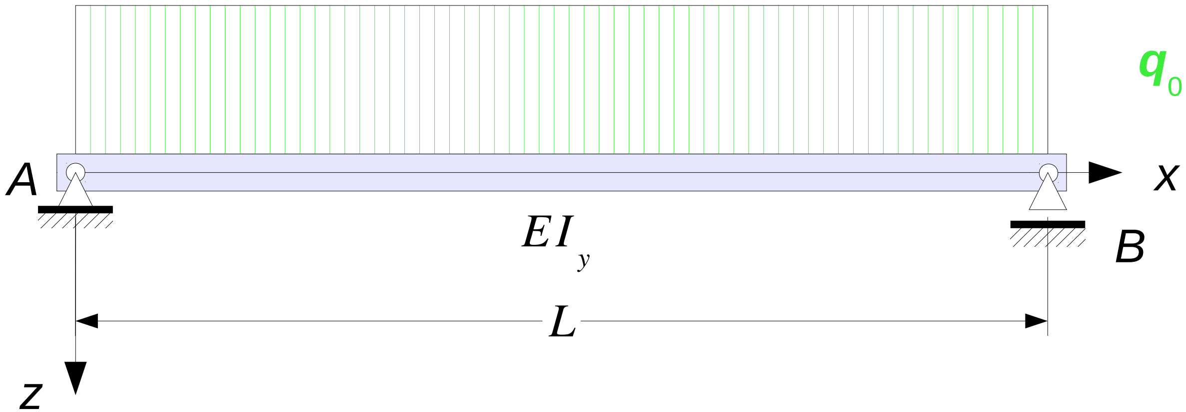
3.1 Ebene Biegung

- Ergebnis: $$w(x) = \frac{F L^3}{6 E I_y}\left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right], \quad w_B = w(L) = \frac{F L^3}{3 E I_y}$$



3.1 Ebene Biegung

- Beispiel: Balken mit Streckenlast



- Gegeben:
  - Streckenlast q_0, Länge L, Biegesteifigkeit EI_y
- Gesucht:
  - Biegelinie $w(x)$, Durchbiegung w_m in der Mitte des Balkens

3.1 Ebene Biegung

- Integrationen:

$$E\,I_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_0$$

$$E\,I_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0\,x + c_1 = -Q_z$$

$$E\,I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} q_0\,x^2 + c_1\,x + c_2 = -M_y$$

$$E\,I_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{6} q_0\,x^3 + \frac{1}{2} c_1\,x^2 + c_2\,x + c_3$$

$$E\,I_y\,w = \frac{1}{24} q_0\,x^4 + \frac{1}{6} c_1\,x^3 + \frac{1}{2} c_2\,x^2 + c_3\,x + c_4$$

3.1 Ebene Biegung

- Randbedingungen:

$$M_y(0)=0 \rightarrow c_2=0, \quad w(0)=0 \rightarrow c_4=0$$

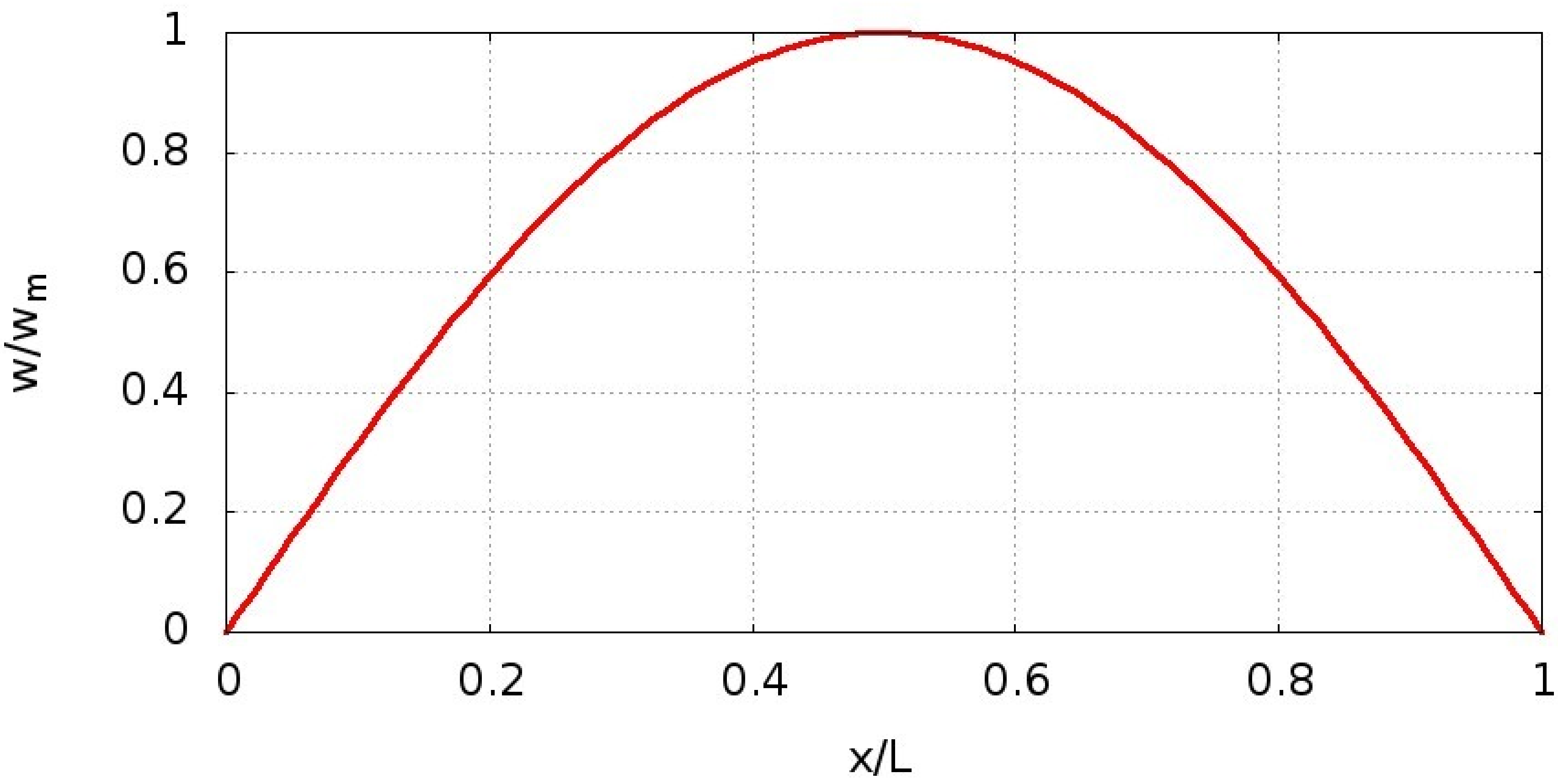
$$M_y(L)=0 \ : \ \frac{1}{2} q_0 L^2 + c_1 L = 0 \rightarrow c_1 = -\frac{1}{2} q_0 L$$

$$w(L)=0 \ : \ \frac{1}{24} q_0 L^4 - \frac{1}{12} q_0 L^4 + c_3 L = 0 \rightarrow c_3 = \frac{1}{24} q_0 L^3$$

- Ergebnis:

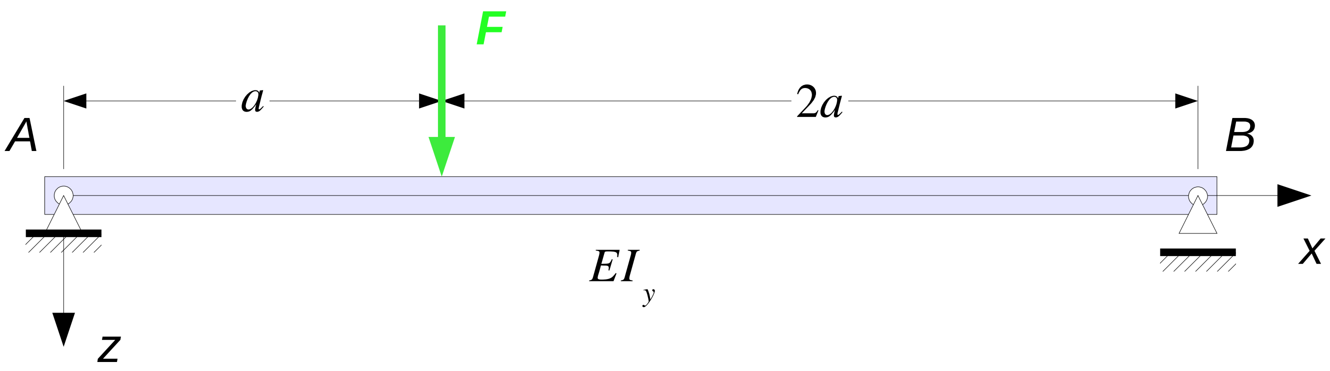
$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{24 E I_y} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{x}{L} \right], \quad w_m = w\left(\frac{L}{2} \right) = \frac{5 q_0 L^4}{384 E I_y}$$

3.1 Ebene Biegung



3.1 Ebene Biegung

- Beispiel: Balken mit Einzelkraft

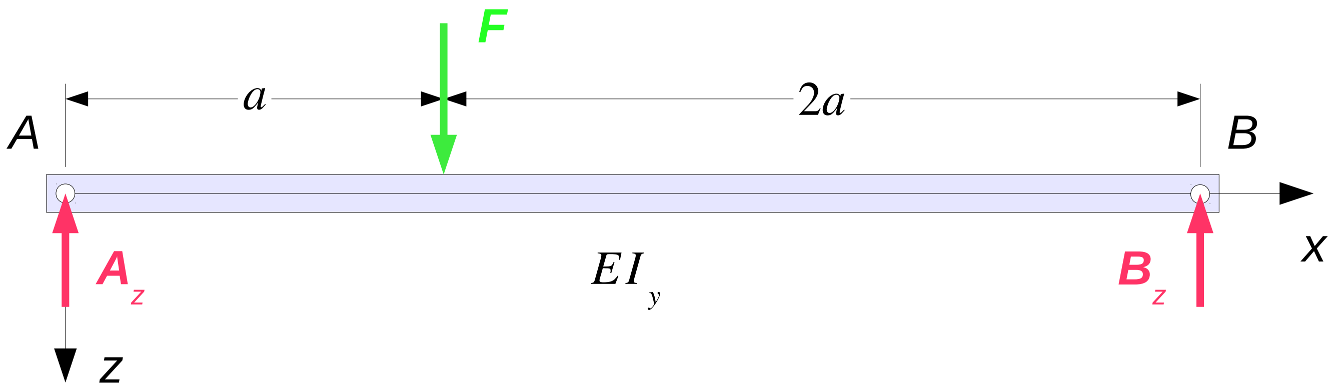


  - Gegeben:
    - Kraft F, Abmessung a, Biegesteifigkeit EI_y
  - Gesucht:
    - Biegelinie $w(x)$, Durchbiegung $w(a)$ am Kraftangriffspunkt

3.1 Ebene Biegung

a) Lösung durch abschnittsweise Betrachtung:

- Lagerkräfte:



$$\sum M^B = 0 \;:\; -3\,a\,A_z + 2\,a\,F = 0 \;\rightarrow\; A_z = \frac{2}{3}F$$

$$\sum M^A = 0 \;:\; 3\,a\,B_z - a\,F = 0 \;\rightarrow\; B_z = \frac{1}{3}F$$

3.1 Ebene Biegung

- Abschnitt 1: $0 < x < a$

$$M_y = -\left(-A_z x\right) = \frac{2}{3} F x$$

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = -\frac{2}{3} F x$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = -\frac{F}{3} x^2 + c_1$$

$$E I_y w = -\frac{F}{9} x^3 + c_1 x + c_2$$

- Abschnitt 2: $a < x < 3a$

$$M_y = B_z \left(3a - x\right) = F a - \frac{1}{3} F x$$

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y = -F a + \frac{F}{3} x$$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = -F a x + \frac{1}{6} F x^2 + d_1$$

$$E I_y w = -\frac{1}{2} F a x^2 + \frac{1}{18} F x^3 + d_1 x + d_2$$

3.1 Ebene Biegung

- Randbedingungen:

$$w(0)=0 \;\rightarrow\; c_2=0$$

$$w(3a)=0 \;:\; \left(-\frac{9}{2}+\frac{27}{18}\right)F\,a^3+3\,d_1\,a+d_2=0$$

$$\rightarrow\; 3\,d_1\,a+d_2=3\,a^3\,F \quad (1)$$

- Anschlussbedingungen:

$$\frac{dw}{dx}(a-0)=\frac{dw}{dx}(a+0) \;:\; -\frac{1}{3}F\,a^2+c_1=\left(-1+\frac{1}{6}\right)F\,a^2+d_1$$

$$\rightarrow\; \frac{F}{2}a^2=d_1-c_1 \quad (2)$$

3.1 Ebene Biegung

$$w(a-0)=w(a+0)\ :\ -\frac{F}{9}a^3+c_1 a=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{18}\right)F a^3+d_1 a+d_2 \quad (3)$$

$$(3)\ \rightarrow\ \frac{1}{3}F a^3=(d_1-c_1)a+d_2\overset{(2)}{=}\frac{1}{2}F a^3+d_2 \rightarrow\ d_2=-\frac{1}{6}F a^3$$

$$(1)\ \rightarrow\ 3 d_1 a=3 a^3 F-d_2=\frac{19}{6}a^3 F\ \rightarrow\ d_1=\frac{19}{18}F a^2$$

$$(2)\ \rightarrow\ c_1=d_1-\frac{1}{2}F a^2\ \rightarrow\ c_1=\frac{5}{9}F a^2$$

3.1 Ebene Biegung

- Biegelinie:

$$0 < x < a \;:\; E I_y w = -\frac{1}{9} F x^3 + \frac{5}{9} F a^2 x \quad \rightarrow \quad w(x) = \frac{F a^3}{9 E I_y}\left[5\frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a}\right)^3\right]$$

$$a < x < 3a \;:\; E I_y w = -\frac{1}{2} F a x^2 + \frac{1}{18} F x^3 + \frac{19}{18} F a^2 x - \frac{1}{6} F a^3$$

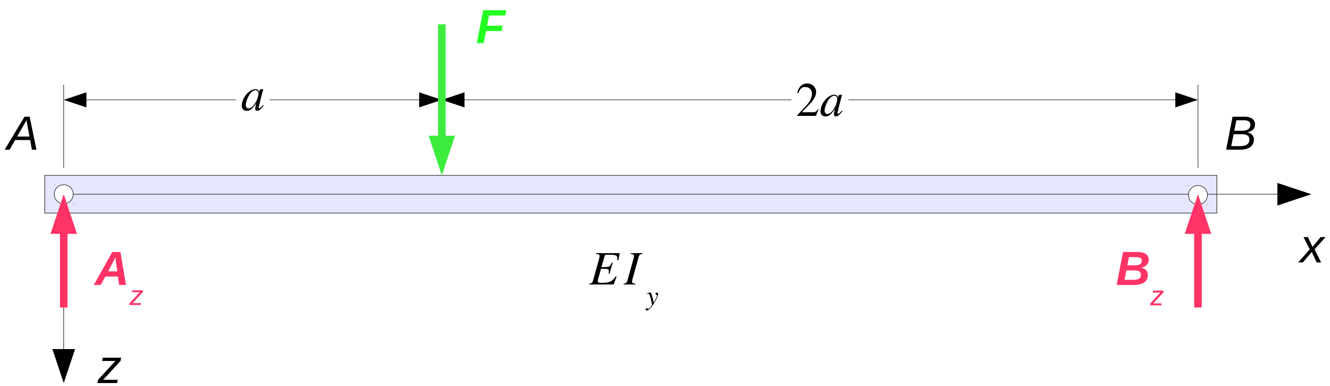
$$\rightarrow \quad w(x) = \frac{F a^3}{18 E I_y}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 9\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 19\frac{x}{a} - 3\right]$$

$$w(a) = \frac{F a^3}{9 E I_y}(5-1) = \frac{4}{9}\frac{F a^3}{E I_y}$$

3.1 Ebene Biegung

b) Lösung mit Föppl-Symbol:

- Biegemoment:



$$M_y(x) = -\left(-A_z x + \langle x-a \rangle F\right) = \frac{F}{3}\left(2x - 3\langle x-a \rangle\right)$$

3.1 Ebene Biegung

- Weitere Integrationen: $E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y(x) = -\frac{F}{3}\left(2x - 3\langle x-a\rangle\right)$

$$E I_y \frac{dw}{dx} = -\frac{F}{3}\left(x^2 - \frac{3}{2}\langle x-a\rangle^2 + c_1\right)$$

$$E I_y w = -\frac{F}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^3 + c_1 x + c_2\right)$$

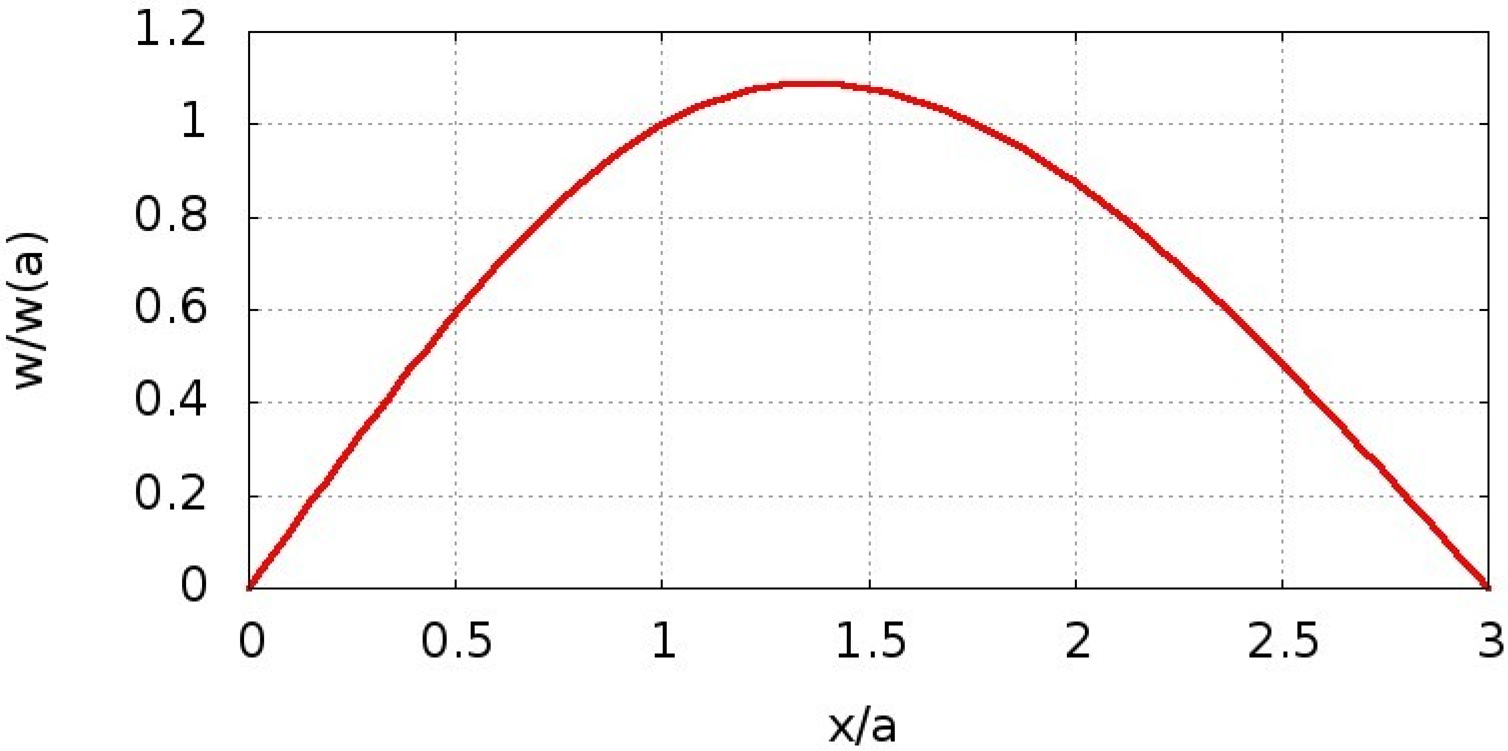
- Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \;\rightarrow\; c_2 = 0$$

$$w(3a) = 0 \;:\; 9a^3 - 4a^3 + 3c_1 a = 0 \;\rightarrow\; c_1 = -\frac{5}{3}a^2$$

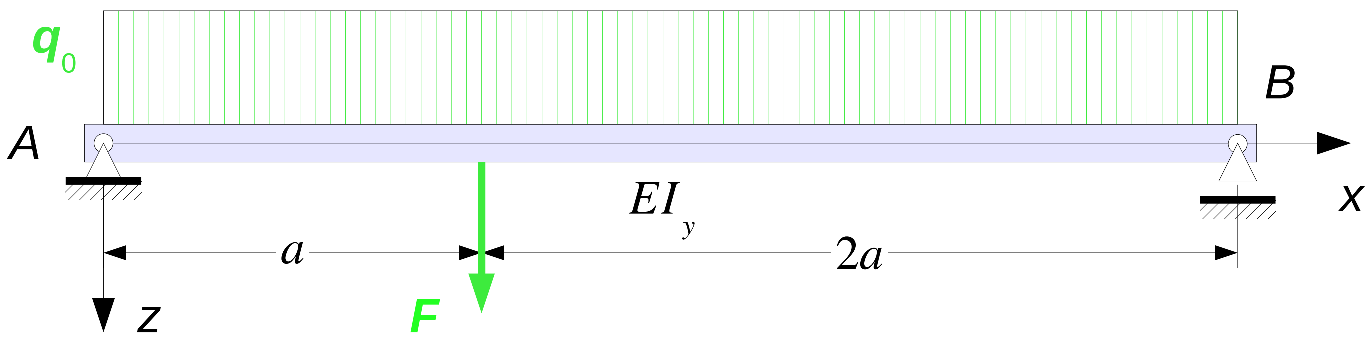
3.1 Ebene Biegung

- Biegelinie: $$w(x)=\frac{F\,a^3}{18\,E\,I_y}\left[10\frac{x}{a}-2\left(\frac{x}{a}\right)^3+3\left\langle\frac{x}{a}-1\right\rangle^3\right]$$



3.1 Ebene Biegung

- Beispiel: Superposition



- Gegeben:
  - Kraft F, Streckenlast q_0, Abmessung a, Biegesteifigkeit EI_y
- Gesucht:
  - Biegelinie $w(x)$, Durchbiegung $w(a)$ am Kraftangriffspunkt

3.1 Ebene Biegung

- Die Lösung kann durch Überlagerung der beiden bereits ermittelten Biegelinien gewonnen werden.
- Lastfall 1: Streckenlast

$$w_1(x) = \frac{q_0 (3a)^4}{24 E I_y}\left[\left(\frac{x}{3a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{3a}\right)^3 + \frac{x}{3a}\right] = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 27\frac{x}{a}\right]$$

$$w_1(a) = \frac{q_0 a^4}{24 E I_y}(1 - 6 + 27) = \frac{11}{12}\frac{q_0 a^4}{E I_y}$$

- Lastfall 2: Einzelkraft

$$w_2(x) = \frac{F a^3}{18 E I_y}\left[10\frac{x}{a} - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3\left\langle\frac{x}{a} - 1\right\rangle^3\right],\quad w_2(a) = \frac{4}{9}\frac{F a^3}{E I_y}$$

3.1 Ebene Biegung

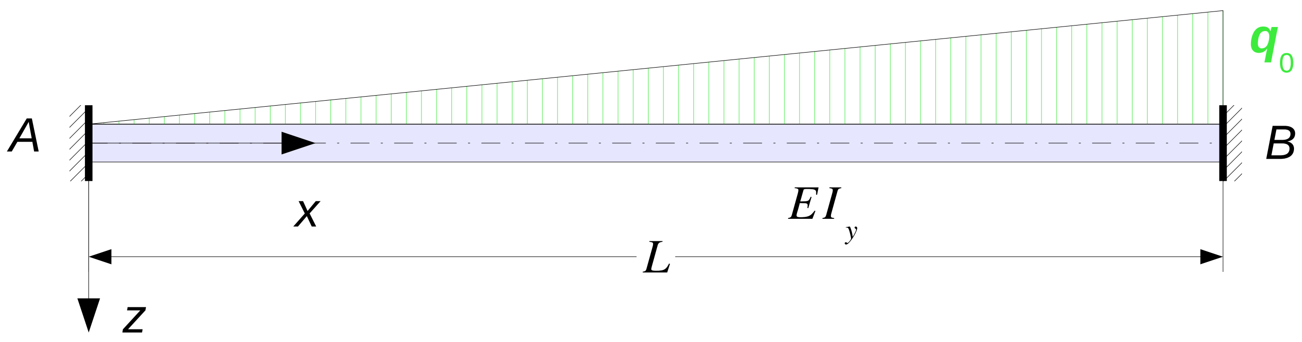
- Gesamt: $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$

$$w(a) = \frac{11}{12}\frac{q_0 a^4}{E I_y} + \frac{4}{9}\frac{F a^3}{E I_y} = \frac{a^3\left(33 q_0 a + 16 F\right)}{36 E I_y}$$

- Für eine Reihe von Lagerungen und Belastungen sind die Biegelinien tabelliert.
- Damit können die Biegelinien für überlagerte Belastungen leicht ermittelt werden.

3.1 Ebene Biegung

- Beispiel: Statisch unbestimmt gelagerter Balken



  - Gegeben:
    - Streckenlast q_0, Länge L, Biegesteifigkeit EI_y
  - Gesucht:
    - Schnittlasten, Lagerreaktionen und Biegelinie

3.1 Ebene Biegung

- Lösung durch Integration der Streckenlast:

$$E\,I_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_z(x) = q_0 \frac{x}{L}$$

$$E\,I_y \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{q_0\,x^2}{2\,L} + c_1 = -Q_z(x)$$

$$E\,I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q_0\,x^3}{6\,L} + c_1\,x + c_2 = -M_y(x)$$

$$E\,I_y \frac{dw}{dx} = \frac{q_0\,x^4}{24\,L} + \frac{1}{2}\,c_1\,x^2 + c_2\,x + c_3$$

$$E\,I_y\,w = \frac{q_0\,x^5}{120\,L} + \frac{1}{6}\,c_1\,x^3 + \frac{1}{2}\,c_2\,x^2 + c_3\,x + c_4$$

3.1 Ebene Biegung

- Randbedingungen:

$$\frac{dw}{dx}(0)=0 \ \rightarrow \ c_3=0, \ \ w(0)=0 \ \rightarrow \ c_4=0$$

$$\frac{dw}{dx}(L)=0 \ : \ \frac{q_0 L^3}{24}+\frac{1}{2}c_1 L^2+c_2 L=0 \ \rightarrow \ 12 c_1 L+24 c_2=-q_0 L^2$$

$$w(L)=0 \ : \ \frac{q_0 L^4}{120}+\frac{1}{6}c_1 L^3+\frac{1}{2}c_2 L^2=0 \ \rightarrow \ 20 c_1 L+60 c_2=-q_0 L^2$$

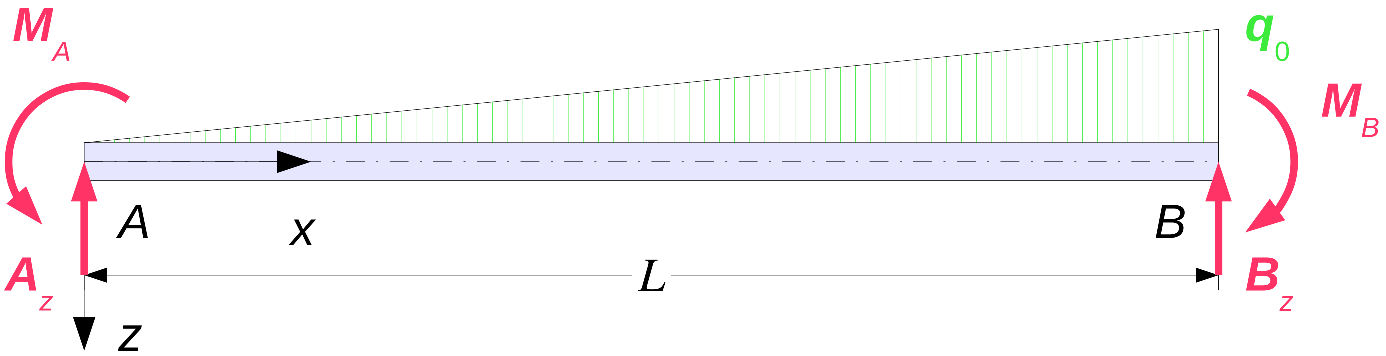
$$\rightarrow \ c_1=-\frac{3}{20}q_0 L, \ \ c_2=\frac{1}{30}q_0 L^2$$

3.1 Ebene Biegung

- Schnittlasten:

$$Q_z(x) = \frac{q_0 L}{20}\left[3 - 10\left(\frac{x}{L}\right)^2\right], \quad M_y(x) = \frac{q_0 L^2}{60}\left[9\frac{x}{L} - 10\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 2\right]$$

- Lagerreaktionen:



3.1 Ebene Biegung

$$A_z = Q_z(0) = \frac{3}{20} q_0 L, \quad B_z = -Q_z(L) = \frac{7}{20} q_0 L$$

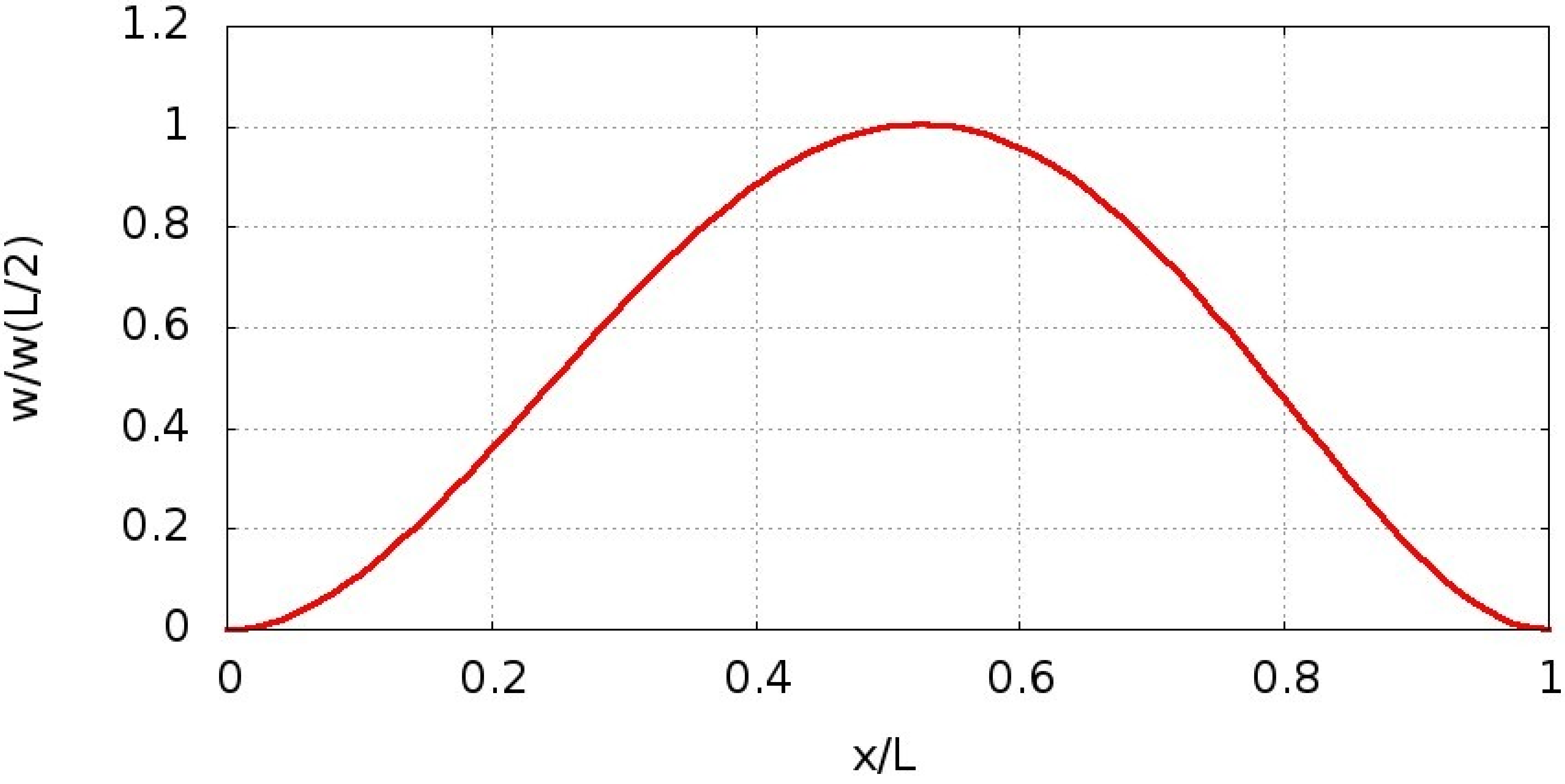
$$M_A = -M_y(0) = \frac{1}{30} q_0 L^2, \quad M_B = -M_y(L) = \frac{1}{20} q_0 L^2$$

- Biegelinie:

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{120 E I_y} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

$$\frac{dw}{dx}(x) = \frac{q_0 L^3}{120 E I_y} \left[5\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 9\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 4\frac{x}{L} \right]$$

3.1 Ebene Biegung



3.2 Räumliche Biegung

- Im allgemeinen Fall erfolgt die Belastung nicht in einer Ebene oder das Deviationsmoment verschwindet nicht.
- Dann treten Verschiebungen in *y*- und *z*-Richtung auf.
- Die Biegelinie wird durch die Verschiebungen $v(x)$ in *y*-Richtung und $w(x)$ in *z*-Richtung beschrieben.

3.2 Räumliche Biegung

- Differenzialgleichungen der Biegelinie:
  - Nach der Bernoulli-Hypothese gilt: $u(x, y, z) = \phi(x) z - \psi(x) y$
  - Vernachlässigung der Scherungen ergibt:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi(x) + \frac{dw}{dx}(x) = 0 \;\rightarrow\; \phi(x) = -\frac{dw}{dx}(x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\psi(x) + \frac{dv}{dx}(x) = 0 \;\rightarrow\; \psi(x) = \frac{dv}{dx}(x)$$

  - Der Zusammenhang zwischen den Biegewinkeln ϕ und ψ und den Biegemomenten wurde bereits bei der Spannungsermittlung gefunden.

3.2 Räumliche Biegung

- Mit

$$E\frac{d\phi}{dx}=\frac{I_z M_y - I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$E\frac{d\psi}{dx}=\frac{I_y M_z - I_{yz} M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

folgt:

$$E I_y \frac{d^2 w}{dx^2}=-\frac{I_y I_z M_y - I_y I_{yz} M_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$E I_z \frac{d^2 v}{dx^2}=\frac{I_y I_z M_z - I_z I_{yz} M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

- Mit den Ersatzmomenten

$$\bar{M}_y=\frac{M_y - M_z I_{yz}/I_z}{1-I_{yz}^2/\left(I_y I_z\right)}$$

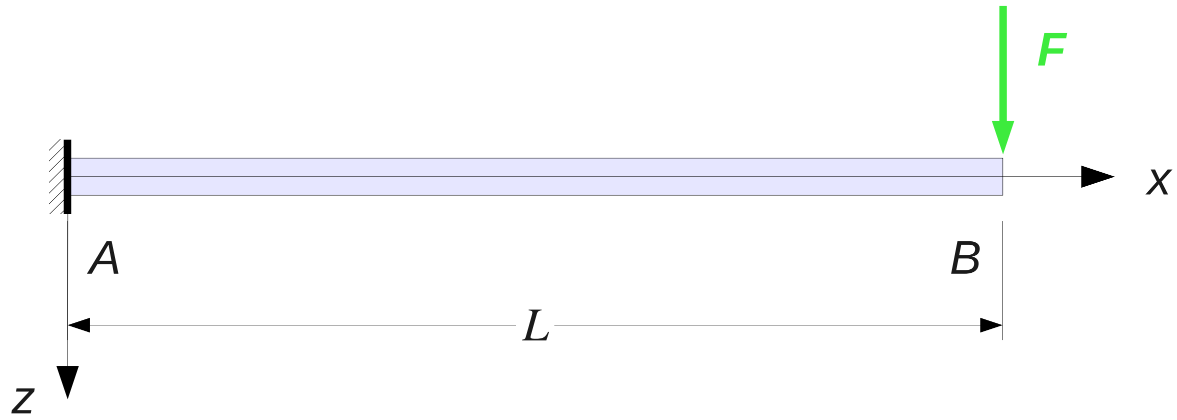
$$\bar{M}_z=\frac{M_z - M_y I_{yz}/I_y}{1-I_{yz}^2/\left(I_y I_z\right)}$$

gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} E I_y \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\bar{M}_y \\ E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} &= \bar{M}_z \end{aligned}}$$

3.2 Räumliche Biegung

- Beispiel: Kragbalken mit Endlast



  - Gegeben:
    - $F = 100$ N, $L = 1$ m, $E = 210000$ MPa
    - $I_y = 10{,}4$ cm^4, $I_z = 5{,}89$ cm^4, $I_{yz} = 4{,}63$ cm^4
  - Gesucht:
    - Verschiebungen v_B und w_B von Punkt *B*

3.2 Räumliche Biegung

- Biegemoment:

$$M_y(x) = -F(L-x) = F(x-L)$$

- Ersatzmomente:

$$\bar{M}_y(x) = \frac{F(x-L)}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}, \quad \bar{M}_z(x) = \frac{-F(x-L) I_{yz}/I_y}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}$$

- Biegelinien:

$$E I_z \frac{dv}{dx} = -\frac{F I_{yz}/I_y}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)} \left(\frac{x^2}{2} - L x + c_1 \right)$$

$$E I_z v = -\frac{F I_{yz}/I_y}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)} \left(\frac{x^3}{6} - L \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right)$$

3.2 Räumliche Biegung

$$E\,I_y \frac{dw}{dx} = -\frac{F}{1-I_{yz}^2/\left(I_y I_z\right)}\left(\frac{x^2}{2} - L\,x + d_1\right)$$

$$E\,I_y\,w = -\frac{F}{1-I_{yz}^2/\left(I_y I_z\right)}\left(\frac{x^3}{6} - L\frac{x^2}{2} + d_1\,x + d_2\right)$$

- Randbedingungen:

$$v(0)=0 \;\rightarrow\; c_2=0,\quad \frac{dv}{dx}(0)=0 \;\rightarrow\; c_1=0$$

$$w(0)=0 \;\rightarrow\; d_2=0,\quad \frac{dw}{dx}(0)=0 \;\rightarrow\; d_1=0$$

3.2 Räumliche Biegung

- Ergebnis:

$$v(x) = -\frac{F L^3}{6 E I_z} \frac{I_{yz}/I_y}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

$$\frac{v(x)}{w(x)} = \frac{I_{yz}}{I_z}$$

$$w(x) = -\frac{F L^3}{6 E I_y} \frac{1}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)} \left[\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 \right]$$

$$v_B = v(L) = \frac{F L^3}{3 E I_z} \frac{I_{yz}/I_y}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)}$$

$$w_B = w(L) = \frac{F L^3}{3 E I_y} \frac{1}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)}$$

3.2 Räumliche Biegung

- Zahlenwerte:

$$\frac{F\,L^3}{3\,E} = \frac{100\,\mathrm{N}\cdot\left(1\cdot 10^3\,\mathrm{mm}\right)^3}{3\cdot 2{,}1\cdot 10^5\,\mathrm{N/mm}^2} = 1{,}587\cdot 10^5\,\mathrm{mm}^5$$

$$\frac{F\,L^3}{3\,E\,I_y} = \frac{1{,}587\cdot 10^5\,\mathrm{mm}^5}{10{,}4\cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4} = 1{,}526\,\mathrm{mm}$$

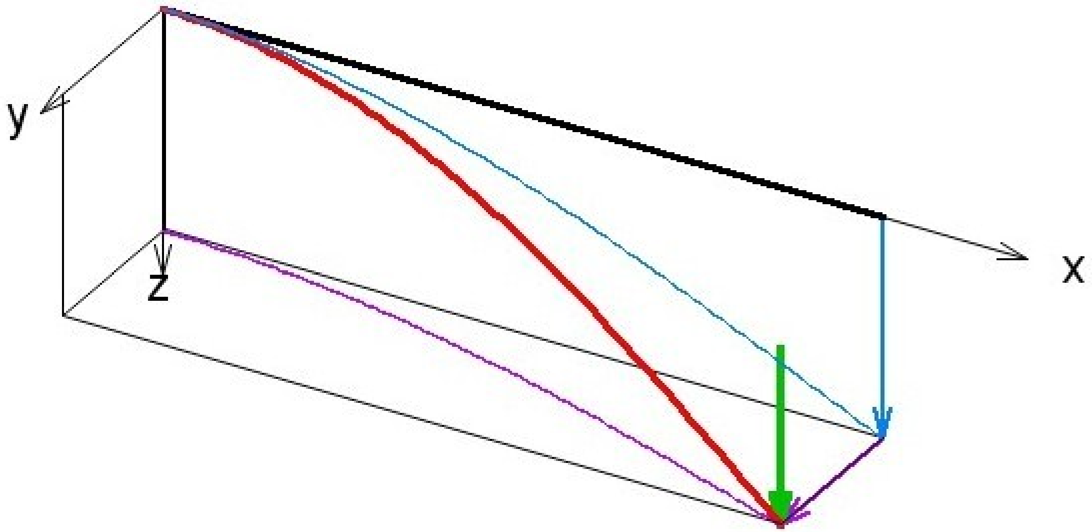
$$\frac{F\,L^3}{3\,E\,I_z} = \frac{4{,}762\cdot 10^5\,\mathrm{mm}^5}{5{,}89\cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4} = 2{,}695\,\mathrm{mm}$$

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y\,I_z} = 1 - \frac{4{,}63^2}{10{,}4\cdot 5{,}89} = 0{,}6500\,,\quad \frac{I_{yz}}{I_y} = \frac{4{,}63}{10{,}4} = 0{,}4452$$

3.2 Räumliche Biegung

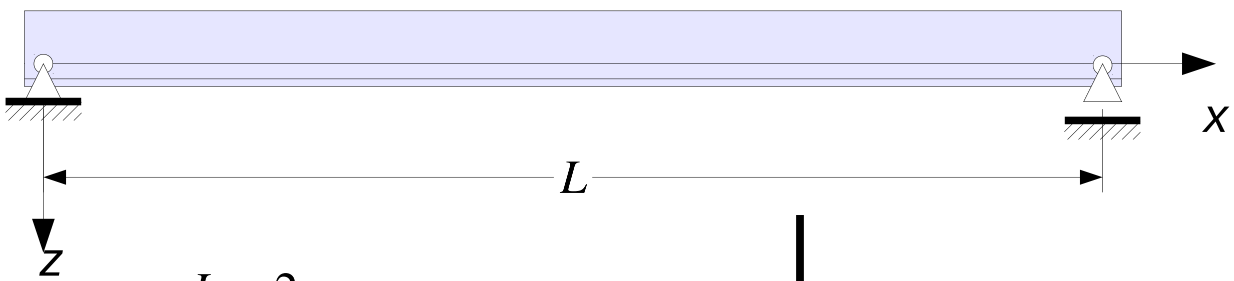
$$v_B = 2{,}695\,\text{mm} \cdot \frac{0{,}4452}{0{,}6500} = \underline{1{,}846\,\text{mm}}$$

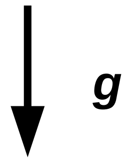
$$w_B = 1{,}526\,\text{mm} \cdot \frac{1}{0{,}6500} = \underline{2{,}348\,\text{mm}}$$



3.2 Räumliche Biegung

- Beispiel: Balken unter Eigengewicht



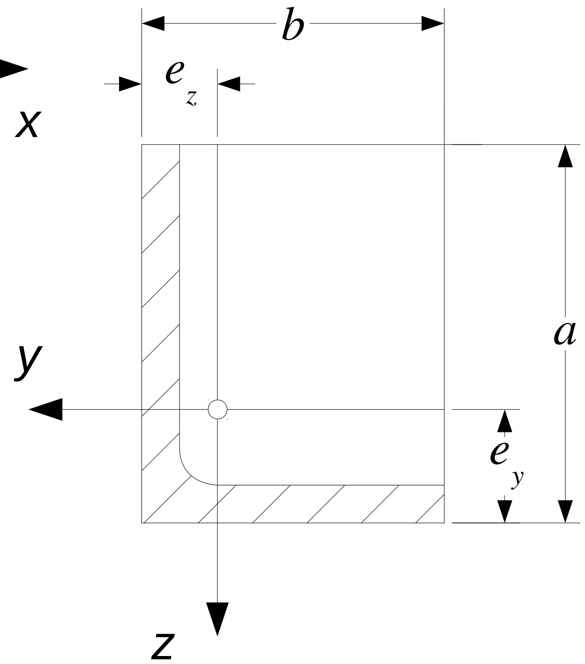


$L = 2\ \mathrm{m}$

L 50 x 40 x 5 DIN 1029:

$I_y = 10{,}4\ \mathrm{cm}^4,\ I_z = 5{,}89\ \mathrm{cm}^4,\ I_{yz} = 4{,}63\ \mathrm{cm}^4$

$q_G = 33{,}5\ \mathrm{N/m},\ E = 210000\ \mathrm{MPa}$



3.2 Räumliche Biegung

- Der abgebildete Balken aus Stahl ist beidseitig gelenkig gelagert. Er wird durch sein Gewicht belastet.
- Gesucht ist die maximale Durchbiegung.
- Schnittlasten:

$$q_z(x) = q_G\,,\quad Q_z(x) = -q_G x + c_1\,,\quad M_y(x) = -\frac{1}{2} q_G x^2 + c_1 x + c_2$$

$$M_y(0) = 0 \;\rightarrow\; c_2 = 0$$

$$M_y(L) = 0 \;:\; -\frac{1}{2} q_G L^2 + c_1 L = 0 \;\rightarrow\; c_1 = \frac{1}{2} q_G L$$

$$\rightarrow\; M_y(x) = -\frac{1}{2} q_G L^2 \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right)$$

3.2 Räumliche Biegung

- Ersatzmomente:

$$\bar{M}_y = -\frac{1}{2}\frac{q_G L^2}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)}\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right), \quad \bar{M}_z = \frac{1}{2}\frac{q_G L^2 I_{yz}/I_y}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)}\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right)$$

- Integrationen:

$$E I_z \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{q_G L^2 I_{yz}/I_y}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)}\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L}\right)$$

$$E I_z \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{q_G L^2 I_{yz}/I_y}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)}\left(\frac{x^3}{3 L^2} - \frac{x^2}{2 L} + c_1\right)$$

$$E I_z v = \frac{1}{2}\frac{q_G L^2 I_{yz}/I_y}{1 - I_{yz}^2/(I_y I_z)}\left(\frac{x^4}{12 L^2} - \frac{x^3}{6 L} + c_1 x + c_2\right)$$

3.2 Räumliche Biegung

- Integrationen:

$$E\,I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{q_G L^2}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \right)$$

$$E\,I_y \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2} \frac{q_G L^2}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} \left(\frac{x^3}{3L^2} - \frac{x^2}{2L} + d_1 \right)$$

$$E\,I_y w = \frac{1}{2} \frac{q_G L^2}{1 - I_{yz}^2 / (I_y I_z)} \left(\frac{x^4}{12L^2} - \frac{x^3}{6L} + d_1 x + d_2 \right)$$

- Randbedingungen: $v(0) = 0 \;\rightarrow\; c_2 = 0; \;\; w(0) = 0 \;\rightarrow\; d_2 = 0$

$$v(L) = 0 \;:\; \frac{L^2}{12} - \frac{L^2}{6} + c_1 L = 0 \;\rightarrow\; c_1 = \frac{L}{12}; \;\; w(L) = 0 \;\rightarrow\; d_1 = \frac{L}{12}$$

3.2 Räumliche Biegung

- Biegelinie: $$v(x)=\frac{q_G L^4}{24\,E\,I_z}\frac{I_{yz}/I_y}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}\left(\frac{x^4}{L^4}-2\frac{x^3}{L^3}+\frac{x}{L}\right)$$

$$w(x)=\frac{q_G L^4}{24\,E\,I_y}\frac{1}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}\left(\frac{x^4}{L^4}-2\frac{x^3}{L^3}+\frac{x}{L}\right)$$

- Die maximale Durchbiegung tritt in der Mitte auf:

$$v_{max}=v\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{5\,q_G L^4}{384\,E\,I_z}\frac{I_{yz}/I_y}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}$$

$$w_{max}=w\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{5\,q_G L^4}{384\,E\,I_y}\frac{1}{1-I_{yz}^2/(I_y I_z)}$$

3.2 Räumliche Biegung

- Zahlenwerte:

$$\frac{q_G L^4}{E} = \frac{33{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N/mm} \cdot 2000^4\,\mathrm{mm}^4}{2{,}1 \cdot 10^5\,\mathrm{N/mm}^2} = 2{,}552 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^5$$

$$1 - \frac{I_{yz}^2}{I_y I_z} = 1 - \frac{4{,}63^2}{10{,}4 \cdot 5{,}89} = 0{,}6500\,, \quad \frac{I_{yz}}{I_y} = \frac{4{,}63}{10{,}4} = 0{,}4452$$

$$v_{max} = \frac{5 \cdot 2{,}552 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^5}{384 \cdot 5{,}89 \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4} \frac{0{,}4452}{0{,}65} = 0{,}3864\,\mathrm{mm}$$

$$w_{max} = \frac{5 \cdot 2{,}552 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^5}{384 \cdot 10{,}4 \cdot 10^4\,\mathrm{mm}^4} \frac{1}{0{,}65} = 0{,}4916\,\mathrm{mm}$$

3.2 Räumliche Biegung