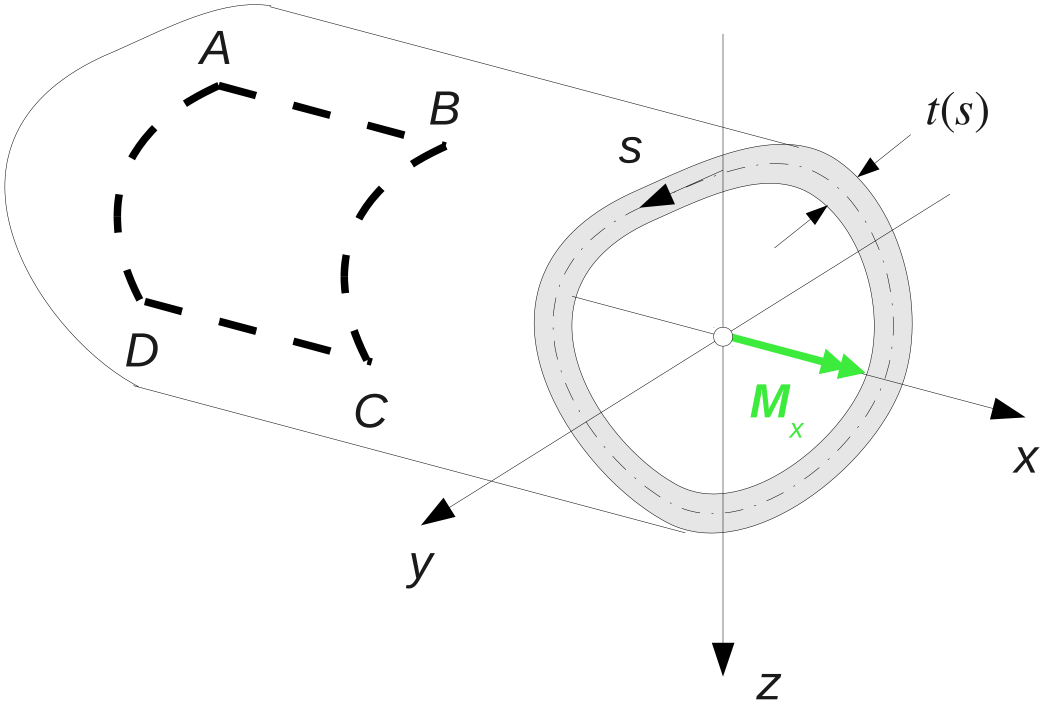
2. Torsion geschlossener Profile

- Betrachtet werden Balken mit einem konstanten einzelligen geschlossenen dünnwandigen Hohlquerschnitt, die durch ein konstantes Torsionsmoment M_x belastet werden.



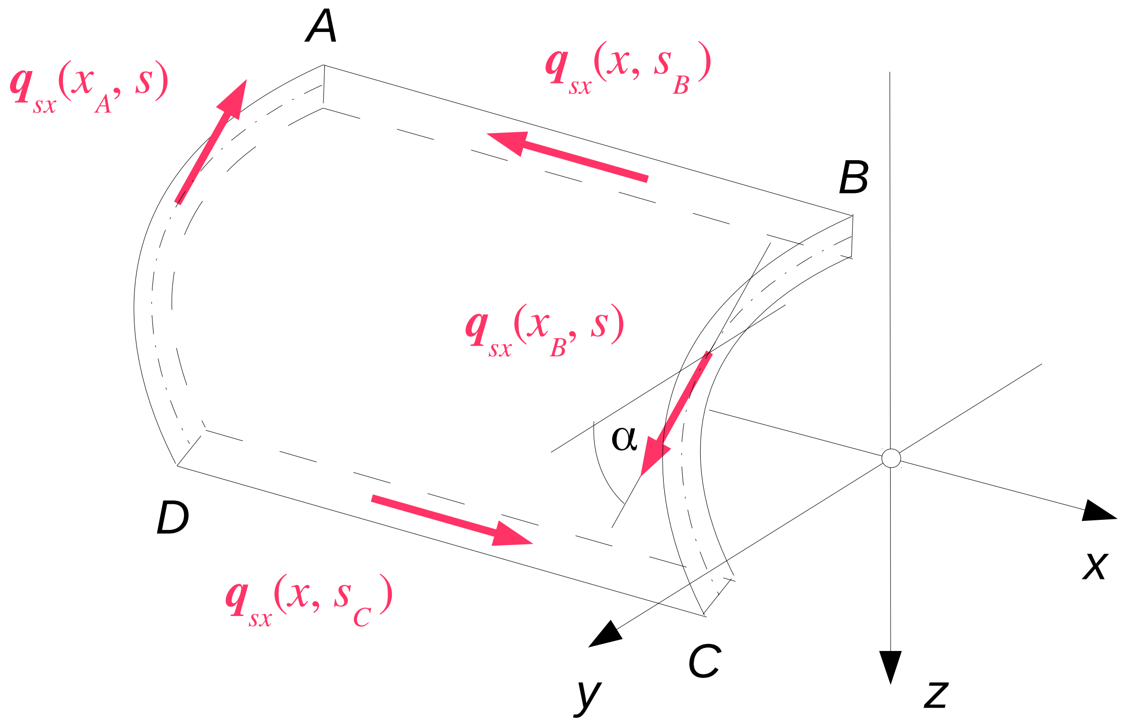
2. Torsion geschlossener Profile

- Annahmen:
  - Die Schubspannung ist über die Wandstärke konstant.
  - Die Querschnitte drehen sich um den Schubmittelpunkt und können sich dabei in *x*-Richtung frei verformen.
  - Die Verschiebung in *x*-Richtung wird als *Verwölbung* bezeichnet.
- Schubfluss:
  - Wie beim Querkraftschub wird der Schubfluss definiert als Produkt aus Schubspannung und Wandstärke:

$$q_{sx}(s) = \tau_{sx}(s)\, t(s)$$

2. Torsion geschlossener Profile

- Gleichgewicht am Wandelement *ABCD*:



2. Torsion geschlossener Profile

$$\sum F_x = 0 \quad : \quad \int_{x_A}^{x_B} \left(q_{sx}(x, s_C) - q_{sx}(x, s_B) \right) dx = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad \int_{s_A}^{s_C} \left(q_{sx}(x_B, s) - q_{sx}(x_A, s) \right) \cos(\alpha(s))\, ds = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad : \quad \int_{s_A}^{s_C} \left(q_{sx}(x_B, s) - q_{sx}(x_A, s) \right) \sin(\alpha(s))\, ds = 0$$

- Diese Gleichungen müssen für beliebige Werte von x_A , x_B und s_B , s_C erfüllt sein.

2. Torsion geschlossener Profile

- Daher muss gelten:

$$q_{sx}(x, s_C) = q_{sx}(x, s_B) \quad \text{für alle} \quad x, s_B, s_C$$

$$q_{sx}(x_B, s) = q_{sx}(x_A, s) \quad \text{für alle} \quad s, x_A, x_B$$

- Der Schubfluss hängt nicht von x und s ab. Er ist konstant.
- Für die resultierenden Querkräfte folgt:

$$Q_y = \oint q_{sx} \cos(\alpha(s))\, ds = q_{sx} \oint \cos(\alpha(s))\, ds = q_{sx} \oint dy = 0 \quad ✔$$

$$Q_z = \oint q_{sx} \sin(\alpha(s))\, ds = q_{sx} \oint \sin(\alpha(s))\, ds = q_{sx} \oint dz = 0 \quad ✔$$

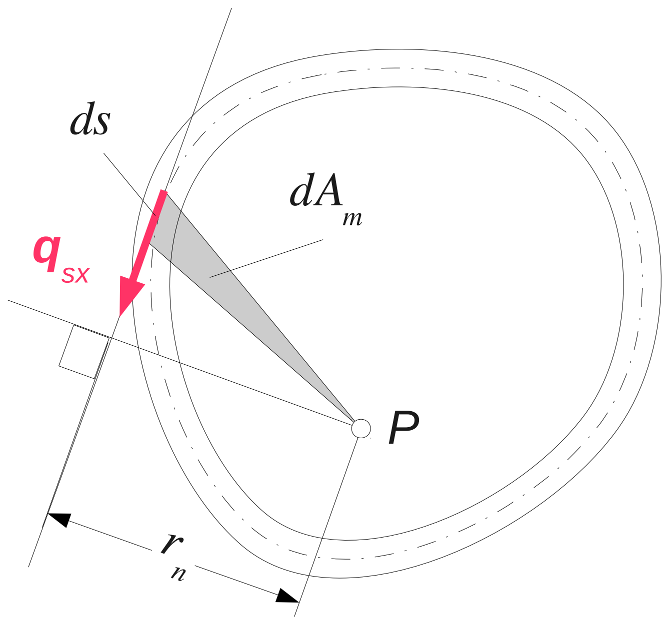
2. Torsion geschlossener Profile

- Da die resultierende Querkraft null ist, kann für die Berechnung des resultierenden Torsionsmoments M_x ein beliebiger Bezugspunkt *P* gewählt werden:

$$M_x = \oint q_{sx} r_n \, ds = q_{sx} \oint r_n \, ds$$

- Daraus folgt die 1. *Bredtsche Formel*:

$$\boxed{M_x = 2 \, A_m q_{sx}}$$



$$dA_m = \frac{1}{2} r_n \, ds$$

$$\oint r_n \, ds = 2 \, A_m$$

2. Torsion geschlossener Profile

- Dabei ist A_m die von der Profilmittellinie umschlossene Fläche.
- Für den Schubfluss und die Schubspannung folgt:

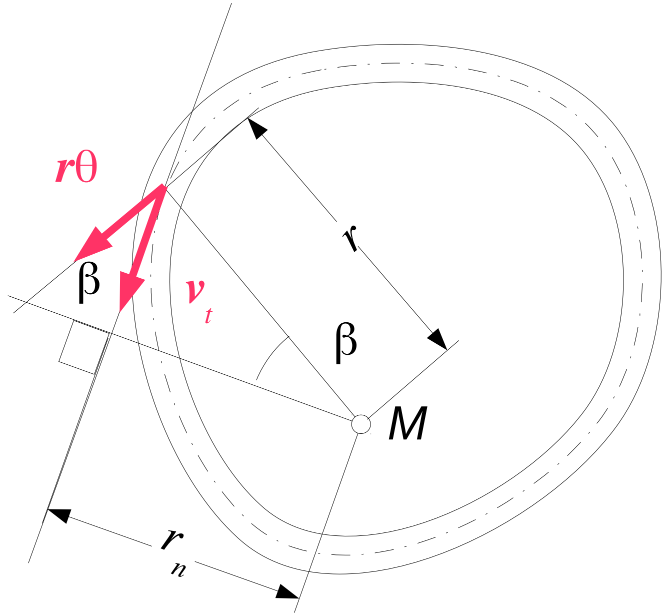
$$q_{sx} = \frac{M_x}{2\,A_m}, \quad \tau_{sx}(s) = \frac{M_x}{2\,A_m\,t(s)}$$

- Die größte Schubspannung tritt an der Stelle mit der kleinsten Wandstärke auf.
- Bei Profilen mit konstanter Wandstärke ist die Schubspannung konstant.

2. Torsion geschlossener Profile

- Verformung:
  - Der Querschnitt dreht sich in der *yz*-Ebene um den Schubmittelpunkt *M*.
  - Dabei gilt für die Verschiebung tangential zur Profilmittellinie:

$$v_t = r\,\theta(x)\cos(\beta) = r_n\,\theta(x)$$



  - Die Verschiebung in *x*-Richtung ist $u(s)$.
  - Damit gilt für die Scherung:

$$\gamma_{sx} = \frac{\partial v_t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} = r_n \frac{d\theta}{dx} + \frac{du}{ds} = \frac{\tau_{sx}}{G}$$

2. Torsion geschlossener Profile

- Einsetzen für die Schubspannung ergibt:

$$r_n \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{2A_m t(s) G} - \frac{du}{ds}$$

- Durch Integration über das komplette Profil entfällt die Verwölbung $u(s)$:

$$\oint r_n \, ds \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{2A_m G} \oint \frac{ds}{t}$$

- Daraus folgt die 2. *Bredtsche Formel*:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{4A_m^2 G} \oint \frac{ds}{t}}$$

2. Torsion geschlossener Profile

- Für das Torsionsträgheitsmoment kann aus der 2. Bredt-schen Formel abgelesen werden:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{G\,I_T} \quad \rightarrow \quad \boxed{I_T = \frac{4\,A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}}$$

- Die Verwölbung berechnet sich zu

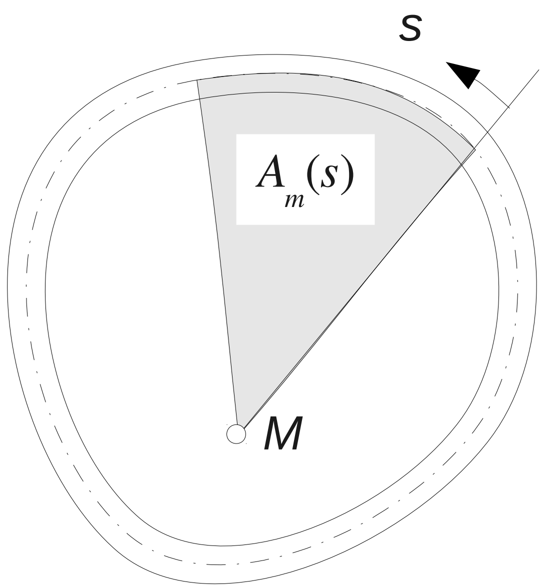
$$u(s) - u_0 = \frac{M_x}{2\,A_m G} \int_0^s \frac{d\bar{s}}{t} - \frac{d\theta}{dx} \int_0^s r_n\, d\bar{s} = \frac{M_x}{2\,A_m G} \int_0^s \frac{d\bar{s}}{t} - 2\,A_m(s) \frac{d\theta}{dx}$$

2. Torsion geschlossener Profile

- Einsetzen für die Verdrillung ergibt:

$$u(s)-u_0=\frac{M_x}{2A_m G}\left(\int_0^s \frac{d\bar{s}}{t}-\frac{A_m(s)}{A_m}\oint\frac{d\bar{s}}{t}\right)$$

- Dabei ist $A_m(s)$ die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche.
- Die Verwölbung ergibt sich relativ zur *x*-Verschiebung an der Stelle $s=0$.



2. Torsion geschlossener Profile

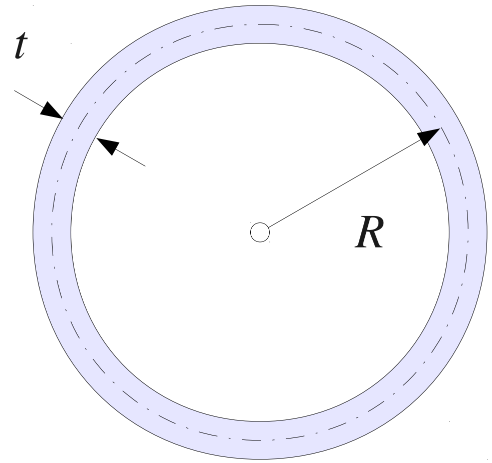
- Beispiel: Kreisring mit konstanter Wandstärke
  - Schubfluss: $A_m = \pi R^2 \;\rightarrow\; q_{sx} = \dfrac{M_x}{2\pi R^2}$
  - Torsionsträgheitsmoment:

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{2\pi R}{t} \;\rightarrow\; I_T = \frac{4\pi^2 R^4}{2\pi R} t = 2\pi R^3 t$$

  - Verwölbung:

$$A_m(s) = \pi R^2 \frac{s}{2\pi R} = \frac{1}{2} R s$$

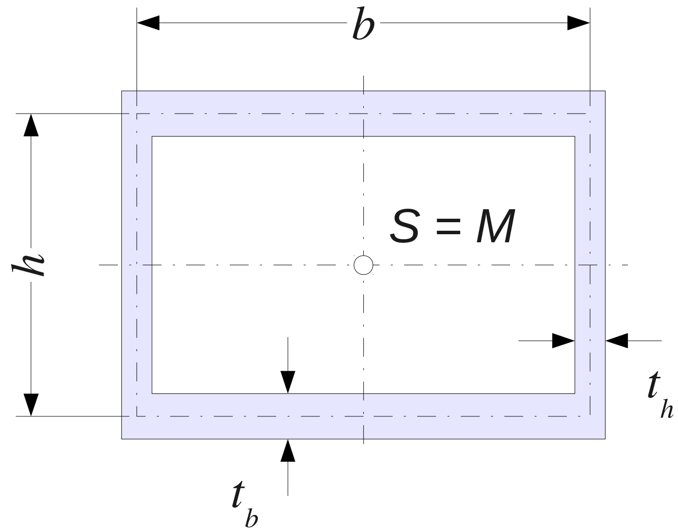
$$\int_0^s \frac{d\bar{s}}{t} - \frac{A_m(s)}{A_m} \oint \frac{d\bar{s}}{t} = \frac{s}{t} - \frac{R s}{2\pi R^2} \cdot \frac{2\pi R}{t} = 0 \;\rightarrow\; u(s) = u_0$$



2. Torsion geschlossener Profile

- Beispiel: Rechteckiges Kastenprofil
  - Schubfluss:

$$A_m = b\,h \;\rightarrow\; q_{sx} = \frac{M_x}{2\,b\,h}$$



  - Torsionsträgheitsmoment:

$$\oint \frac{ds}{t} = 2\left(\frac{b}{t_b} + \frac{h}{t_h}\right)$$

$$I_T = \frac{4\,b^2\,h^2}{2\left(b/t_b + h/t_h\right)} = \frac{2\,b^2\,h^2\,t_b\,t_h}{b\,t_h + h\,t_b}$$

2. Torsion geschlossener Profile

- Wölbfreie Querschnitte:
  - Keine Verwölbung tritt auf, wenn gilt:

$$\frac{\int_0^s \frac{ds}{t}}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{A_m(s)}{A_m}$$

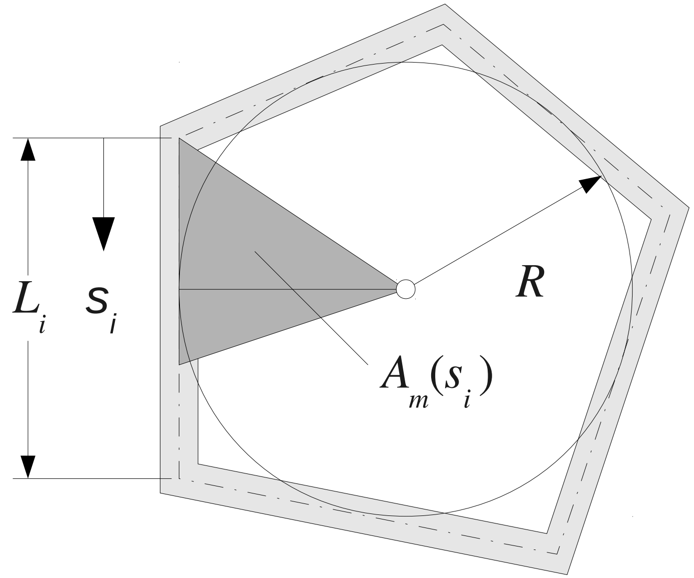
  - Die Bedingung ist erfüllt für:
    - Kreisringprofile
    - rechteckige Kastenprofile mit

$$\frac{b}{t_b} = \frac{h}{t_h}$$

    - Kreistangentenprofile mit konstanter Wandstärke

2. Torsion geschlossener Profile

- Kreistangentenprofile:
  - Bei einem Kreistangentenprofil ist die Mittellinie ein Polygon, dessen Strecken Tangenten an einen Kreis sind.
  - Dazu gehören beliebige Dreiecke, Quadrate sowie alle regelmäßigen n-Ecke.



$$\int_0^{s_i} \frac{ds}{t} = \frac{s_i}{t}, \quad \oint \frac{ds}{t} = \frac{1}{t} \sum L_i \rightarrow \int_0^{s_i} \frac{ds}{t} \Big/ \oint \frac{ds}{t} = \frac{s_i}{\sum L_i}$$

$$A_m(s_i) = \frac{1}{2} R s_i, \quad A_m = \frac{R}{2} \sum L_i \rightarrow A_m(s_i) / A_m = \frac{s_i}{\sum L_i}$$