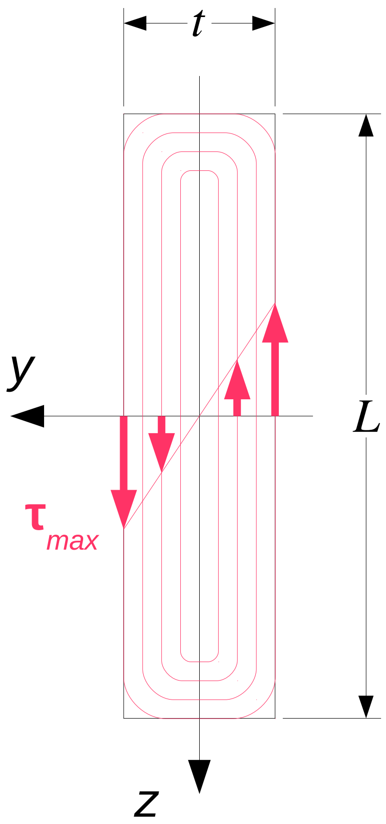
3. Torsion offener Profile

- Dünnwandige offene Profile werden hauptsächlich für Balken verwendet, die überwiegend auf Biegung beansprucht werden.
- Wenn die Wirkungslinie der äußeren Last nicht durch den Schubmittelpunkt geht, tritt auch eine Torsionsbelastung auf.
- Im Folgenden wird wieder vorausgesetzt, dass sich die Querschnitte frei verwölben können (Saint-Venantsche Torsionstheorie).

3. Torsion offener Profile

- Dünnwandige Rechteckprofile:
  - Annahmen:
    - Die Schubspannung τ_{sx} verläuft parallel zur Langseite und ist über die Länge konstant. Die Umlenkung am oberen und unteren Rand erfolgt in einem schmalen Bereich.
    - Die Schubspannung hat über die Wandstärke einen linearen Verlauf:

$$\tau_{sx}(y) = \tau_{max} \frac{y}{t/2} = 2\tau_{max} \frac{y}{t}$$



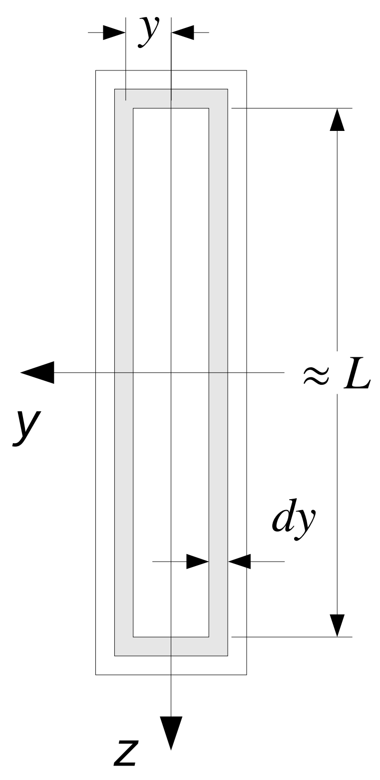
3. Torsion offener Profile

- Modellvorstellung:
  - Der Querschnitt ist aus infinitesimalen rechteckigen Kastenprofilen der Wandstärke dy zusammengesetzt, für die die Bredtschen Formeln gelten.
  - Für ein infinitesimales Kastenprofil gilt:

$$A_m \approx 2\,L\,y\,,\quad \oint \frac{ds}{dy} \approx \frac{2\,L}{dy}$$

  - Der Beitrag zum Torsionsmoment ist:

$$dM_x = 2\,A_m\,q_{sx} \approx 2 \cdot 2\,L\,y\,\tau_{sx}\,dy$$
$$= 4\,L\,y \cdot 2\,\tau_{max}\,\frac{y}{t}\,dy = 8\,\tau_{max}\,\frac{L}{t}\,y^2\,dy$$



3.Torsion offener Profile

- Der Beitrag zum Torsionsträgheitsmoment berechnet sich zu

$$dI_T = \frac{4\,A_m^2}{\oint \frac{ds}{dy}} \approx 4 \cdot 4\,L^2\,y^2 \cdot \frac{dy}{2\,L} = 8\,L\,y^2\,dy$$

- Integration über alle infinitesimalen Profile ergibt:

$$M_x = 8\,\tau_{max}\frac{L}{t}\int_0^{t/2} y^2\,dy = \frac{1}{3}\tau_{max}\,L\,t^2,\quad I_T = 8\,L\int_0^{t/2} y^2\,dy = \frac{1}{3}L\,t^3$$

- Daraus folgt für die Schubspannung:

$$\tau_{max} = \frac{3\,M_x}{L\,t^2} = \frac{M_x}{W_T} \quad \text{mit} \quad W_T = \frac{1}{3}L\,t^2$$

3. Torsion offener Profile

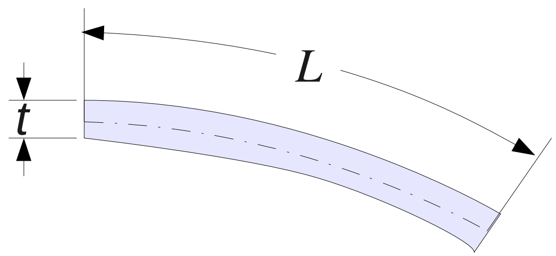
- Ergebnis:

$$\boxed{I_T = \frac{1}{3} L t^3, \quad W_T = \frac{1}{3} L t^2}$$

- Anmerkungen:
  - Bei veränderlicher Wandstärke muss integriert werden:

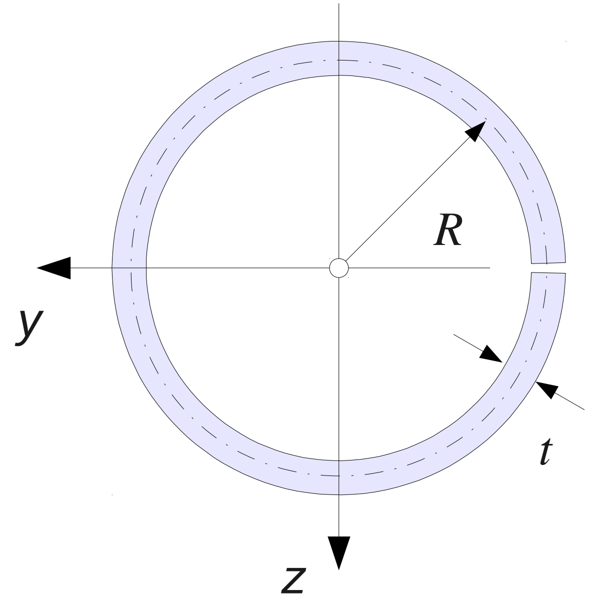
$$I_T = \frac{1}{3} \int_0^L t^3 \, ds$$

- Die Formeln gelten näherungsweise auch für Profile mit gekrümmter Mittellinie. Dabei ist L die entlang der Mittellinie gemessene Bogenlänge.



3. Torsion offener Profile

- Beispiel: Offener Kreisring
  - Für den offenen Kreisring gilt:



$$I_T^O = \frac{2}{3}\pi R t^3, \quad W_T^O = \frac{2}{3}\pi R t^2$$

$$\tau_{max}^O = \frac{M_x}{W_T^O} = \frac{3 M_x}{2\pi R t^2}$$

$$\theta^O = \frac{M_x L}{G I_T^O} = \frac{M_x L}{G} \frac{3}{2\pi R t^3}$$

3. Torsion offener Profile

- Bei gleichen Abmessungen gilt für den geschlossenen Kreisring:

$$I_T^G = 2\pi R^3 t , \quad \tau_{max}^G = \frac{M_x}{2\pi R^2 t} = \frac{M_x}{W_T^G} \rightarrow W_T^G = 2\pi R^2 t$$

$$\theta^G = \frac{M_x L}{G I_T^G} = \frac{M_x L}{G} \frac{1}{2\pi R^3 t}$$

- Für das Verhältnis der Größen folgt:

$$\frac{\tau_{max}^G}{\tau_{max}^O} = \frac{2\pi R t^2}{6\pi R^2 t} = \frac{1}{3} \frac{t}{R} , \quad \frac{\theta^G}{\theta^O} = \frac{2\pi R t^3}{6\pi R^3 t} = \frac{1}{3} \left(\frac{t}{R} \right)^2$$

3. Torsion offener Profile

- Für $t/R = 1/10$ ist die Schubspannung beim geschlossenen Kreisring 30-mal und die Verdrehung 300-mal kleiner als beim offenen Kreisring.

- Zusammengesetzte Profile:
  - Bei zusammengesetzten offenen Profilen können die einzelnen Torsionsträgheitsmomente näherungsweise addiert werden:

$$I_T \approx \frac{1}{3} \sum L_i t_i^3$$

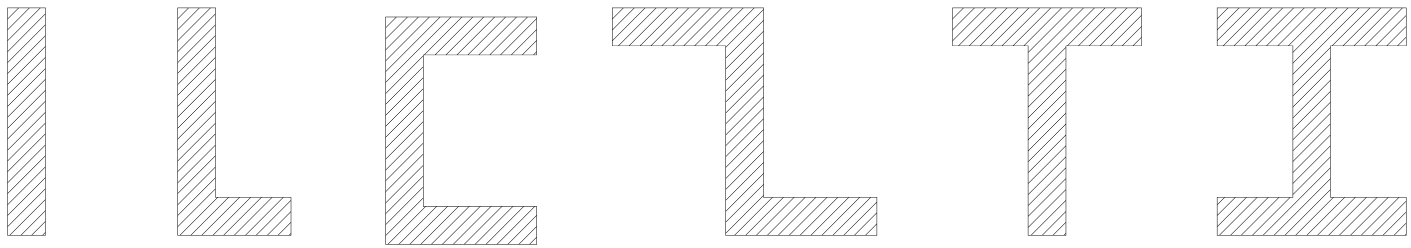
  - Die größte Schubspannung tritt in dem Segment mit der größten Wandstärke auf. Für das Torsionswiderstandsmoment gilt näherungsweise:

$$W_T \approx \frac{I_T}{t_{max}}$$

3. Torsion offener Profile

- Genauere Ergebnisse ergeben sich mit einem von A. Föppl experimentell ermittelten Korrekturfaktor η:

$$\boxed{I_T = \frac{\eta}{3} \sum L_i t_i^3}$$

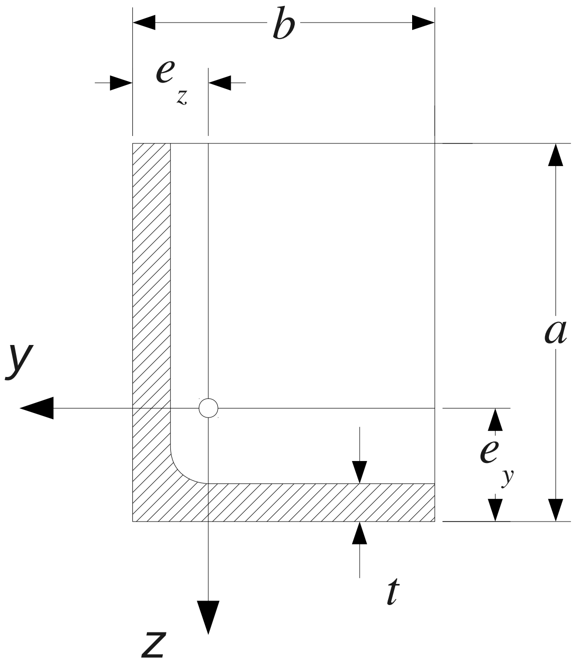


η	1,00	0,99	1,12	1,12	1,12	1,30

3. Torsion offener Profile

- Beispiel: L-Profil
  - L 50 x 40 x 5 DIN 1029:
    - $a = 50$ mm, $b = 40$ mm, $t = 5$ mm
  - Torsionsträgheitsmoment:

$$I_T = \frac{0{,}99}{3} t^3 (a+b)$$
$$= 0{,}33 \cdot 5^3\,\mathrm{mm}^3 \cdot 90\,\mathrm{mm} = 3713\,\mathrm{mm}^4$$



  - Torsionswiderstandsmoment:

$$W_T = \frac{I_T}{t} = \frac{3713\,\mathrm{mm}^4}{5\,\mathrm{mm}} = 742{,}5\,\mathrm{mm}^3$$

3. Torsion offener Profile

- Wölbfreie Profile:
  - Bei Querschnitten, die aus dünnwandigen Rechtecken zusammengesetzt sind, tritt keine Verwölbung auf, wenn sich die Mittellinien in einem Punkt schneiden.