

### 3. Torsion offener Profile

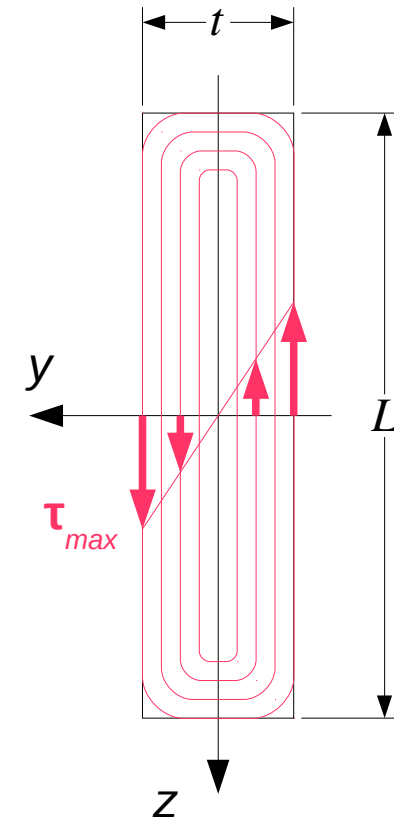
---

- Dünnwandige offene Profile werden für Balken verwendet, bei denen Normalkraft und Biegemomente die wesentlichen Schnittlasten sind.
- Wenn die Wirkungslinie der äußeren Last nicht durch den Schubmittelpunkt geht, tritt auch eine Torsionsbelastung auf.
- Im Folgenden wird wieder vorausgesetzt, dass sich die Querschnitte frei verwölben können (Saint-Venantsche Torsionstheorie).

### 3. Torsion offener Profile

- Dünnwandige Rechteckprofile:
  - Annahmen:
    - Die Schubspannung  $\tau_{sx}$  verläuft parallel zur Langseite und ist über die Länge konstant. Die Umlenkung am oberen und unteren Rand erfolgt in einem schmalen Bereich.
    - Die Schubspannung hat über die Wandstärke einen linearen Verlauf:

$$\tau_{sx}(y) = \tau_{max} \frac{y}{t/2} = 2 \tau_{max} \frac{y}{t}$$



### 3. Torsion offener Profile

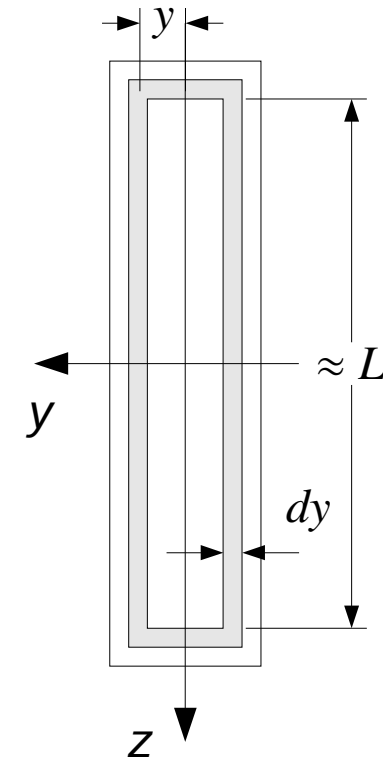
- Modellvorstellung:

- Der Querschnitt ist aus infinitesimalen rechteckigen Kastenprofilen der Wandstärke  $dy$  zusammengesetzt, für die die Bredtschen Formeln gelten.
- Für ein infinitesimales Kastenprofil gilt:

$$A_m \approx 2 L y, \quad \oint \frac{ds}{dy} \approx \frac{2 L}{dy}$$

- Der Beitrag zum Torsionsmoment ist:

$$\begin{aligned} dM_x &= 2 A_m q_{sx} \approx 2 \cdot 2 L y \tau_{sx} dy \\ &= 4 L y \cdot 2 \tau_{max} \frac{y}{t} dy = 8 \tau_{max} \frac{L}{t} y^2 dy \end{aligned}$$



### 3. Torsion offener Profile

---

- Der Beitrag zum Torsionsträgheitsmoment berechnet sich zu

$$dI_T = \frac{4 A_m^2}{\oint \frac{ds}{dy}} \approx 4 \cdot 4 L^2 y^2 \cdot \frac{dy}{2L} = 8 L y^2 dy$$

- Integration über alle infinitesimalen Profile ergibt:

$$M_x = 8 \tau_{max} \frac{L}{t} \int_0^{t/2} y^2 dy = \frac{1}{3} \tau_{max} L t^2, \quad I_T = 8 L \int_0^{t/2} y^2 dy = \frac{1}{3} L t^3$$

- Daraus folgt für die Schubspannung:

$$\tau_{max} = \frac{3 M_x}{L t^2} = \frac{M_x}{W_T} \quad \text{mit} \quad W_T = \frac{1}{3} L t^2$$

### 3. Torsion offener Profile

- Ergebnis:

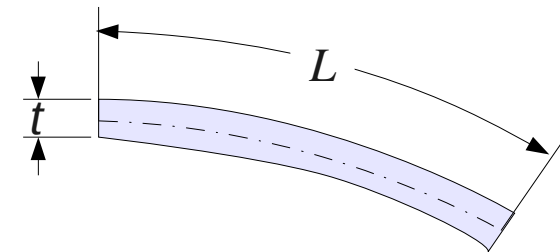
$$I_T = \frac{1}{3} L t^3, \quad W_T = \frac{1}{3} L t^2$$

- Anmerkungen:

- Bei veränderlicher Wandstärke muss integriert werden:

$$I_T = \frac{1}{3} \int_0^L t^3 ds$$

- Die Formeln gelten näherungsweise auch für Profile mit gekrümmter Mittellinie. Dabei ist  $L$  die entlang der Mittellinie gemessene Bogenlänge.



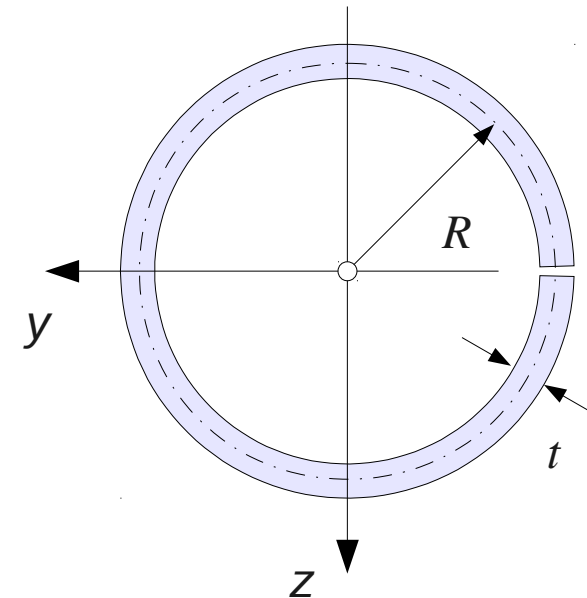
### 3. Torsion offener Profile

- Beispiel: Offener Kreisring
  - Für den offenen Kreisring gilt:

$$I_T^O = \frac{2}{3} \pi R t^3, \quad W_T^O = \frac{2}{3} \pi R t^2$$

$$\tau_{max}^O = \frac{M_x}{W_T^O} = \frac{3 M_x}{2 \pi R t^2}$$

$$\theta^O = \frac{M_x L}{G I_T^O} = \frac{M_x L}{G} \frac{3}{2 \pi R t^3}$$



### 3. Torsion offener Profile

---

- Bei gleichen Abmessungen gilt für den geschlossenen Kreisring:

$$I_T^G = 2 \pi R^3 t, \quad \tau_{max}^G = \frac{M_x}{2 \pi R^2 t} = \frac{M_x}{W_T^G} \rightarrow W_T^G = 2 \pi R^2 t$$

$$\theta^G = \frac{M_x L}{G I_T^G} = \frac{M_x L}{G} \frac{1}{2 \pi R^3 t}$$

- Für das Verhältnis der Größen folgt:

$$\frac{\tau_{max}^G}{\tau_{max}^O} = \frac{2 \pi R t^2}{3 \cdot 2 \pi R^2 t} = \frac{1}{3} \frac{t}{R}, \quad \frac{\theta^G}{\theta^O} = \frac{2 \pi R t^3}{6 \pi R^3 t} = \frac{1}{3} \left( \frac{t}{R} \right)^2$$

### 3. Torsion offener Profile

---

- Für  $t/R = 1/10$  ist die Schubspannung beim geschlossenen Kreisring 30-mal und die Verdrehung 300-mal kleiner als beim offenen Kreisring.
- Zusammengesetzte Profile:
  - Bei zusammengesetzten offenen Profilen können die einzelnen Torsionsträgheitsmomente näherungsweise addiert werden:

$$I_T \approx \frac{1}{3} \sum L_i t_i^3$$

- Die größte Schubspannung tritt in dem Segment mit der größten Wandstärke auf. Für das Torsionswiderstandsmoment gilt näherungsweise:

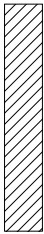
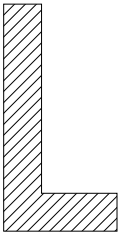
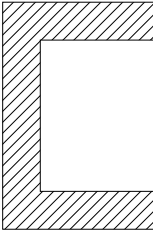
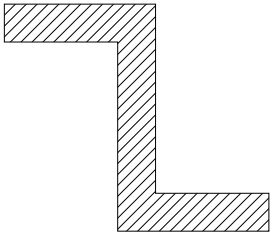
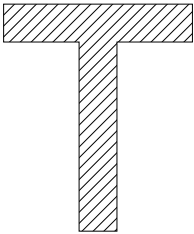
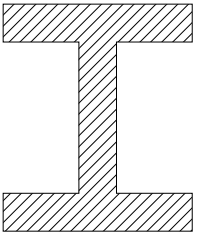
$$W_T \approx \frac{I_T}{t_{max}}$$



### 3. Torsion offener Profile

- Genauere Ergebnisse ergeben sich mit einem von A. Föppl experimentell ermittelten Korrekturfaktor  $\eta$ :

$$I_T = \frac{\eta}{3} \sum L_i t_i^3$$

						
$\eta$	1,00	0,99	1,12	1,12	1,12	1,30

### 3. Torsion offener Profile

- Beispiel: L-Profil

- L 50 x 40 x 5 DIN 1029:

- $a = 50 \text{ mm}$ ,  $b = 40 \text{ mm}$ ,  $t = 5 \text{ mm}$

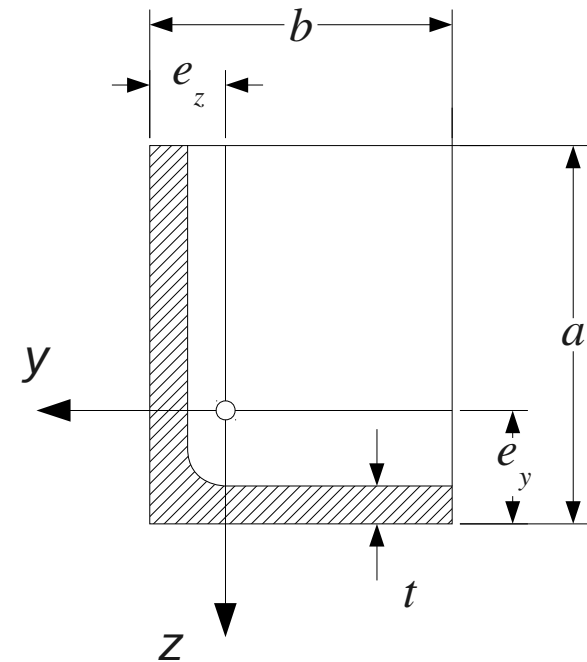
- Torsionsträgheitsmoment:

$$I_T = \frac{0,99}{3} t^3 (a+b)$$

$$= 0,33 \cdot 5^3 \text{ mm}^3 \cdot 90 \text{ mm} = 3713 \text{ mm}^4$$

- Torsionswiderstandsmoment:

$$W_T = \frac{I_T}{t} = \frac{3713 \text{ mm}^4}{5 \text{ mm}} = 742,5 \text{ mm}^3$$



### 3. Torsion offener Profile

---

- Wölbfreie Profile:
  - Bei Querschnitten, die aus dünnwandigen Rechtecken zusammengesetzt sind, tritt keine Verwölbung auf, wenn sich die Mittellinien in einem Punkt schneiden.

