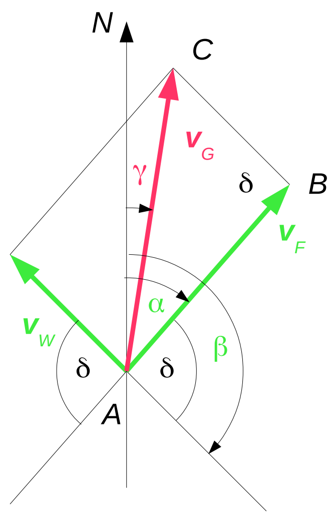
1.2 Räumliche Bewegung

Lösungen

Aufgabe 1

Für den Winkel δ gilt: $\delta = \beta - \alpha$

Der Betrag der Geschwindigkeit über Grund lässt sich aus dem Kosinus-Satz für das Dreieck *ABC* ermitteln:



$$v_G^2 = v_F^2 + v_W^2 - 2\, v_F\, v_w \cos(\delta)$$

$$\rightarrow\; v_G = \sqrt{v_F^2 + v_W^2 - 2\, v_F\, v_W \cos(\delta)}$$

Der Richtungswinkel folgt aus dem Sinus-Satz:

$$\frac{\sin(\alpha - \gamma)}{v_W} = \frac{\sin(\delta)}{v_G} \;\rightarrow\; \sin(\alpha - \gamma) = \frac{v_W}{v_G} \sin(\delta)$$

Zahlenwerte:

$$\delta = 135° - 30° = 105°$$

$$v_G = \sqrt{200^2 + 20^2 - 2 \cdot 200 \cdot 20 \cdot \cos(105°)}\,\mathrm{km/h} = \underline{206{,}1\,\mathrm{km/h}}$$

$$\sin(30° - \gamma) = \frac{20}{206{,}1} \sin(105°) = 0{,}09374$$

$$\rightarrow\; 30° - \gamma = 5{,}379° \;\rightarrow\; \gamma = \underline{24{,}62°}$$

Aufgabe 2

a) <u>Geschwindigkeiten und Beschleunigungen</u>

Geschwindigkeitsvektor:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = 2\pi \frac{R}{T}\left(-\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\boldsymbol{e}_x + \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\boldsymbol{e}_y\right) + v_z \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v}(t) = 31{,}42\,\mathrm{m/s}\left(-\sin\left(\pi \frac{t}{10\,s}\right)\boldsymbol{e}_x + \cos\left(\pi \frac{t}{10\,s}\right)\boldsymbol{e}_y\right) + 3\,\mathrm{m/s} \cdot \boldsymbol{e}_z$$

Bahngeschwindigkeit:

$$v(t)=\dot{s}(t)=\left|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\right|=\sqrt{\left(2\pi\frac{R}{T}\right)^2\left(\sin^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+\cos^2\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)+v_z^2}=\sqrt{\left(2\pi\frac{R}{T}\right)^2+v_z^2}$$

$$v(t)=31{,}56\,\mathrm{m/s}$$

Beschleunigungsvektor:

$$\boldsymbol{a}(t)=\ddot{\boldsymbol{r}}(t)=R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\left(-\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\boldsymbol{e}_x-\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\boldsymbol{e}_y\right)$$

$$\boldsymbol{a}(t)=-9{,}87\,\mathrm{m/s^2}\left(\cos\left(\pi\frac{t}{10\,s}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\pi\frac{t}{10\,s}\right)\boldsymbol{e}_y\right)$$

b) <u>Ortsvektoren und Geschwindigkeitsvektoren zu bestimmten Zeiten</u>

Ortsvektoren:

$$\boldsymbol{r}(0\,\mathrm{s})=100\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_x$$

$$\boldsymbol{r}(5\,\mathrm{s})=100\,\mathrm{m}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_y\right)+3\,\mathrm{m/s}\cdot 5\,\mathrm{s}=100\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_y+15\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}(10\,\mathrm{s})=100\,\mathrm{m}\cdot\left(\cos(\pi)\boldsymbol{e}_x+\sin(\pi)\boldsymbol{e}_y\right)+3\,\mathrm{m/s}\cdot 10\,\mathrm{s}=-100\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_x+30\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}(15\,\mathrm{s})=100\,\mathrm{m}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_y\right)+3\,\mathrm{m/s}\cdot 15\,\mathrm{s}=-100\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_y+45\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}(20\,\mathrm{s})=100\,\mathrm{m}\cdot\left(\cos(2\pi)\boldsymbol{e}_x+\sin(2\pi)\boldsymbol{e}_y\right)+3\,\mathrm{m/s}\cdot 20\,\mathrm{s}=100\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_x+60\,\mathrm{m}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

Geschwindigkeitsvektoren:

$$\boldsymbol{v}(0\,\mathrm{s})=31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_y+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v}(5\,\mathrm{s})=31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_x+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_y\right)+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$
$$=-31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_x+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v}(10\,\mathrm{s})=31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\left(-\sin(\pi)\boldsymbol{e}_x+\cos(\pi)\boldsymbol{e}_y\right)+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$
$$=-31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_y+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v}(15\,s)=31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\left(-\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_x+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_y\right)+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$
$$=31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_x+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{v}(20\,\mathrm{s})=31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\left(-\sin(2\pi)\boldsymbol{e}_x+\cos(2\pi)\boldsymbol{e}_y\right)+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$
$$=31{,}42\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_y+3\,\mathrm{m/s}\cdot\boldsymbol{e}_z$$

c) Beschleunigungsvektoren zu bestimmten Zeiten

Beschleunigungsvektoren:

$$\boldsymbol{a}(0\,\mathrm{s}) = -9{,}87\,\mathrm{m/s^2} \cdot \boldsymbol{e}_x$$

$$\boldsymbol{a}(5\,\mathrm{s}) = -9{,}87\,\mathrm{m/s^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_x + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_y\right) = -9{,}87\,\mathrm{m/s^2} \cdot \boldsymbol{e}_y$$

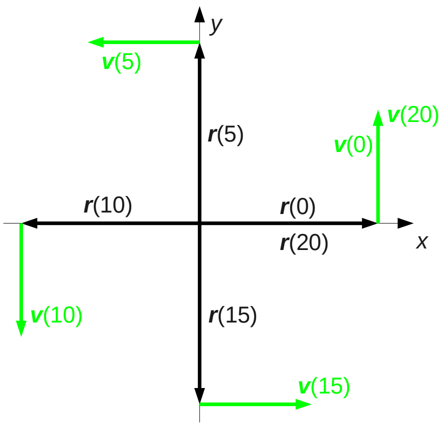
$$\boldsymbol{a}(10\,\mathrm{s}) = -9{,}87\,\mathrm{m/s^2}\left(\cos(\pi)\boldsymbol{e}_x + \sin(\pi)\boldsymbol{e}_y\right) = 9{,}87\,\mathrm{m/s^2} \cdot \boldsymbol{e}_x$$

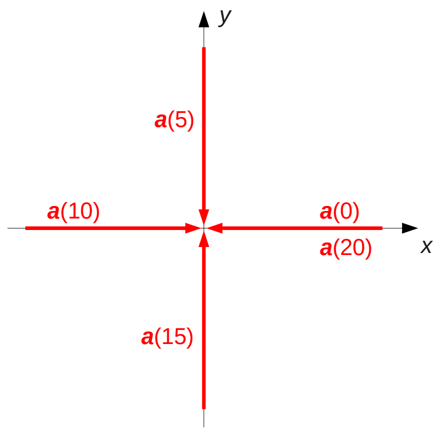
$$\boldsymbol{a}(15\,\mathrm{s}) = -9{,}87\,\mathrm{m/s^2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_x + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\boldsymbol{e}_y\right) = 9{,}87\,\mathrm{m/s^2} \cdot \boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{a}(20\,\mathrm{s}) = -9{,}87\,\mathrm{m/s^2}\left(\cos(2\pi)\boldsymbol{e}_x + \sin(2\pi)\boldsymbol{e}_y\right) = -9{,}87\,\mathrm{m/s^2} \cdot \boldsymbol{e}_x$$

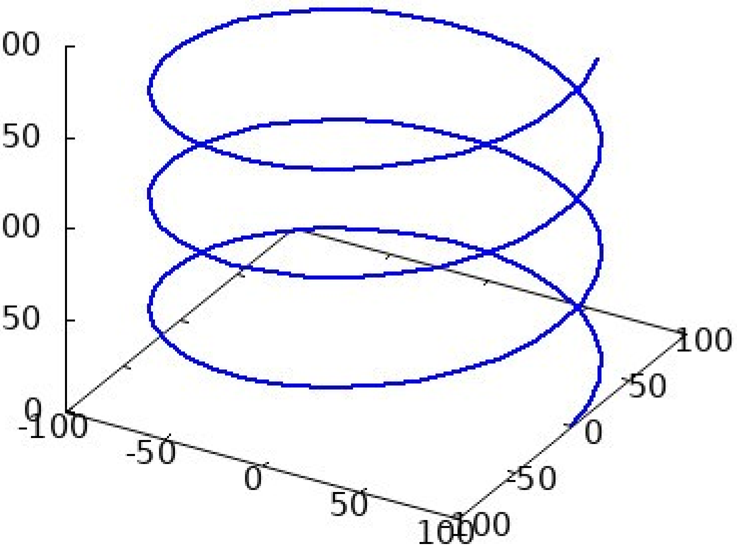
Betrag: $a = 9{,}87\,\mathrm{m/s^2}$

Darstellung der Vektoren:





d) Flugbahn



Die Flugbahn ist eine Spirale mit einem Radius von $100\ \mathrm{m}$ und einer Steigung von $60\ \mathrm{m}$.

Aufgabe 3

a) Geschwindigkeitsvektor und Beschleunigungsvektor

Ortsvektor:

$$[\boldsymbol{r}(t)] = R\, e^{t/T} \begin{bmatrix} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \\ \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor:

$$[\boldsymbol{v}(t)] = [\dot{\boldsymbol{r}}(t)] = \frac{R}{T} e^{t/T} \begin{bmatrix} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) - 2\pi \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \\ \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + 2\pi \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \end{bmatrix}$$

Beschleunigungsvektor:

$$[\boldsymbol{a}(t)]=[\dot{\boldsymbol{v}}(t)]=\frac{R}{T^2}e^{t/T}\begin{bmatrix}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)-4\pi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)-4\pi^2\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\\ \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+4\pi\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)-4\pi^2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{R}{T^2}e^{t/T}\begin{bmatrix}(1-4\pi^2)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)-4\pi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\\ (1-4\pi^2)\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+4\pi\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\end{bmatrix}$$

b) <u>Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung</u>

Bahngeschwindigkeit:

$$v(t)=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)}$$

$$=\frac{R}{T}e^{t/T}\sqrt{\left(\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)-2\pi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)^2+\left(\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+2\pi\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{R}{T}e^{t/T}\sqrt{1+4\pi^2}$$

Bahnbeschleunigung:

$$a_t(t)=\dot{v}(t)=\frac{R}{T^2}e^{t/T}\sqrt{1+4\pi^2}$$

c) <u>Normalbeschleunigung</u>

Es gilt: $[\boldsymbol{a_n}(t)]=[\boldsymbol{a}(t)]-\dfrac{a_t(t)}{v(t)}[\boldsymbol{v}(t)]$

Mit

$$\frac{a_t(t)}{v(t)}=\frac{1}{T}$$

folgt:

$$[\boldsymbol{a}_n(t)] = \frac{R}{T^2} e^{t/T} \begin{bmatrix} (1-4\pi^2)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - 4\pi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \\ (1-4\pi^2)\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + 4\pi\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \end{bmatrix}$$

$$-\frac{R}{T^2} e^{t/T} \begin{bmatrix} \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - 2\pi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \\ \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + 2\pi\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{R}{T^2} e^{t/T} \begin{bmatrix} -4\pi^2\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) - 2\pi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \\ -4\pi^2\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + 2\pi\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \end{bmatrix}$$

Betrag:

$$a_n(t) = |\boldsymbol{a}_n(t)|$$

$$= \frac{2\pi R}{T^2} e^{t/T} \sqrt{\left(2\pi\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + \sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)^2 + \left(-2\pi\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) + \cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{2\pi R}{T^2} e^{t/T} \sqrt{1+4\pi^2} = 2\pi a_t(t)$$

Aufgabe 4

a) <u>Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit</u>

Da die Bahngeschwindigkeit konstant ist, ist die Bahnbeschleunigung null:

$$a_t = 0$$

Für die Normalbeschleunigung gilt: $\boldsymbol{a}_n(t) = v_0 \dot{\boldsymbol{e}}_t(t)$

Mit

$$\boldsymbol{e}_t(t) = \boldsymbol{e}_t(s(t)) = \cos\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_x + \sin\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_y$$

folgt:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t(t) = -2\frac{v_0^2 t}{2R^2}\sin\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_x + 2\frac{v_0^2 t}{2R^2}\cos\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_y$$

Damit gilt für die Normalbeschleunigung:

$$\boldsymbol{a}_n(t)=\frac{v_0^3 t}{R^2}\left[-\sin\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\cos\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_y\right]$$

Für den Betrag gilt: $a_n(t)=\frac{v_0^3 t}{R^2}$

b) <u>Gleichmäßig beschleunigte Fahrt</u>

Für die Bahnbeschleunigung gilt: $a_t(t)=a_0$

Mit $s(t)=\frac{1}{2}a_0 t^2$ gilt für den Einheitstangentenvektor:

$$\boldsymbol{e}_t(t)=\boldsymbol{e}_t(s(t))=\cos\left(\frac{a_0^2 t^4}{8R^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{a_0^2 t^4}{8R^2}\right)\boldsymbol{e}_y$$

Seine zeitliche Ableitung berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t(t)=\frac{a_0^2 t^3}{2R^2}\left[-\sin\left(\frac{a_0^2 t^4}{8R^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\cos\left(\frac{a_0^2 t^4}{8R^2}\right)\boldsymbol{e}_y\right] .$$

Damit gilt für die Normalbeschleunigung:

$$\boldsymbol{a}_n(t)=a_0 t\,\dot{\boldsymbol{e}}_t=\frac{a_0^3 t^4}{2R^2}\left[-\sin\left(\frac{a_0^2 t^4}{8R^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\cos\left(\frac{a_0^2 t^4}{8R^2}\right)\boldsymbol{e}_y\right]$$

Für den Betrag gilt: $a_n(t)=\frac{a_0^3 t^4}{2R^2}$

Aufgabe 5

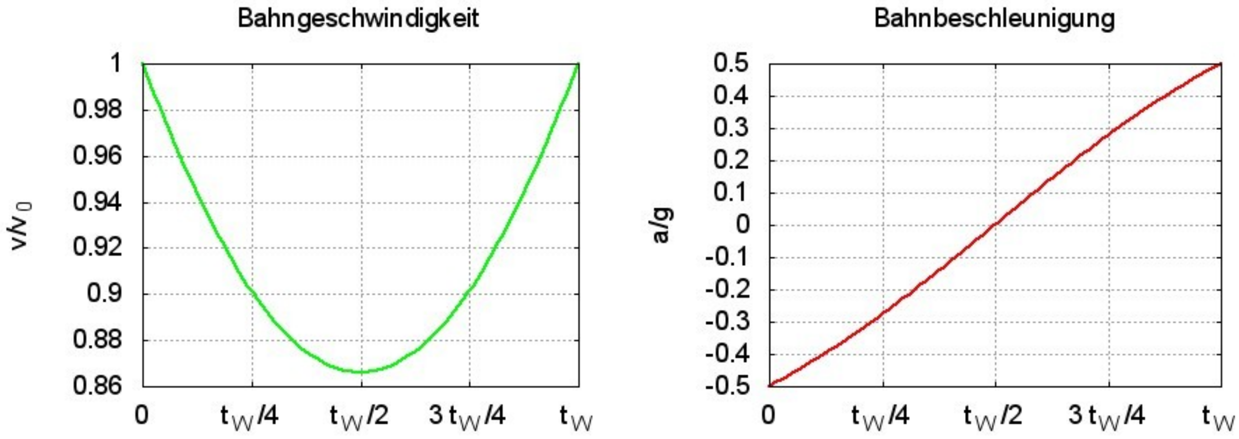
Die Bahngeschwindigkeit ist gleich dem Betrag des Geschwindigkeitsvektors:

$$\begin{aligned} v(t)&=\sqrt{v_x^2(t)+v_z^2(t)}=\sqrt{v_0^2\cos^2(\alpha)+\left(v_0\sin(\alpha)-g\,t\right)^2}\\ &=\sqrt{v_0^2-2\,v_0\,g\,t\sin(\alpha)+(g\,t)^2}\end{aligned}$$

Die Bahnbeschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Bahngeschwindigkeit:

$$a_t(t)=\dot{v}(t)=\frac{2g^2t-2\,v_0\,g\sin(\alpha)}{2\sqrt{v_0^2-2\,v_0\,g\,t\sin(\alpha)+(g\,t)^2}}=\frac{g\,t-v_0\sin(\alpha)}{v(t)}\,g$$

Diagramme:



Aufgabe 6

Der Ball erreicht den höchsten Punkt seiner Bahn gerade am Tor. Also gilt:

$$H=\frac{1}{2g}\left(v_0\sin(\alpha)\right)^2=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\alpha)$$

Außerdem gilt für den bis zum Erreichen des höchsten Punktes zurückgelegten Weg:

$$L=\frac{v_0^2}{2g}\sin(2\alpha)$$

Aus diesen beiden Gleichungen können die beiden Unbekannten α und v_0 bestimmt werden:

$$\frac{H}{L}=\frac{\sin^2(\alpha)}{\sin(2\alpha)}=\frac{\sin^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}=\frac{1}{2}\tan(\alpha) \rightarrow \tan(\alpha)=2\frac{H}{L}$$

$$v_0^2=\frac{2gH}{\sin^2(\alpha)}=2gH\frac{1+\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha)}=2gH\frac{1+4\frac{H^2}{L^2}}{4\frac{H^2}{L^2}}=2g\frac{L^2/4+H^2}{H}$$

Zahlenwerte:

$$\tan(\alpha)=2\cdot\frac{2{,}4\,m}{11\,m}=0{,}4364 \rightarrow \alpha=\underline{23{,}57°}$$

$$v_0^2 = 2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{11^2\,\mathrm{m}^2/4 + 2{,}4^2\,\mathrm{m}^2}{2{,}4\,\mathrm{m}} = 294{,}4\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \rightarrow v_0 = \underline{17{,}16\,\mathrm{m/s}}$$

Aufgabe 7

a) Winkel α und Geschwindigkeit v_0

Gleichung der Flugbahn:

$$z(x) = x\tan(\alpha) - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x^2$$

Bedingungen:

$$z(x_1) = x_1\tan(\alpha) - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x_1^2 = H \;\rightarrow\; x_1\tan(\alpha) - H = \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x_1^2$$

$$z(x_2) = x_2\tan(\alpha) - \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x_2^2 = H \;\rightarrow\; x_2\tan(\alpha) - H = \frac{g}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x_2^2$$

Damit stehen zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten v_0 und α zur Verfügung.

Division der 1. Gleichung durch die 2. Gleichung führt auf

$$\frac{x_1\tan(\alpha) - H}{x_2\tan(\alpha) - H} = \frac{x_1^2}{x_2^2}\,.$$

Daraus folgt:

$$x_1\tan(\alpha) - H = \frac{x_1^2}{x_2^2}\left(x_2\tan(\alpha) - H\right)$$

$$x_1\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right)\tan(\alpha) = H\left(1 - \frac{x_1^2}{x_2^2}\right) = H\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right)\left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)$$

Für den Winkel α gilt also:

$$\tan(\alpha) = \frac{H}{x_1}\left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 kann nun z. B. aus der 1. Bedingung bestimmt werden:

$$\frac{1}{x_1\tan(\alpha) - H} = 2\,v_0^2\,\frac{\cos^2(\alpha)}{g\,x_1^2} \;\rightarrow\; 2\,v_0^2 = \frac{g\,x_1^2}{\cos^2(\alpha)}\,\frac{1}{x_1\tan(\alpha) - H}$$

Mit

$$\cos^2(\alpha)=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha)}$$

folgt daraus

$$2\,v_0^2=g\,x_1^2\,\frac{1+\tan^2(\alpha)}{x_1\tan(\alpha)-H}\;.$$

Mit

$$x_1\tan(\alpha)-H=H\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)-H=H\,\frac{x_1}{x_2}$$

folgt weiter:

$$v_0^2=\frac{g}{2}\,\frac{x_1^2\,x_2}{H\,x_1}\left(1+\tan^2(\alpha)\right)=\frac{g}{2}\,\frac{x_1\,x_2}{H}\left(1+\tan^2(\alpha)\right)$$

Zahlenwerte:

$$\tan(\alpha)=\frac{5\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m}}\left(1+\frac{10\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{m}}\right)=\frac{5}{6}\;\rightarrow\;\alpha=\underline{39{,}81\,°}$$

$$v_0^2=\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{10\,\mathrm{m}\cdot 15\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m}}\left(1+\frac{5^2}{6^2}\right)=9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 15\,\mathrm{m}\cdot\frac{61}{36}=249{,}3\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$v_0=\underline{15{,}79\,\mathrm{m/s}}$$

b) <u>Sprungweite</u>

Für die Sprungweite gilt:

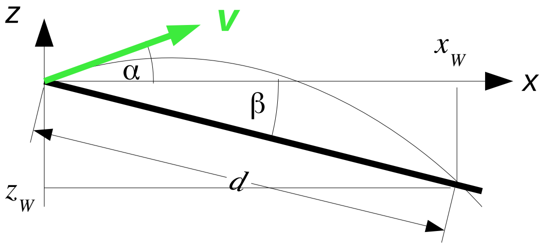
$$\begin{aligned}W&=\frac{v_0^2}{g}\sin(2\,\alpha)=\frac{1}{2}\,\frac{x_1\,x_2}{H}\left(1+\tan^2(\alpha)\right)\sin(2\,\alpha)\\&=\frac{x_1\,x_2}{H}\left(1+\tan^2(\alpha)\right)\sin(\alpha)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Mit $\cos(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$ und $\sin(\alpha)=\cos(\alpha)\tan(\alpha)$ folgt:

$$W=\frac{x_1\,x_2}{H}\tan(\alpha)=\frac{x_1\,x_2}{H}\,\frac{H}{x_1}\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)=x_2\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)=x_1+x_2$$

Zahlenwert: $W=\underline{25\,\mathrm{m}}$

Aufgabe 8



Das Fahrzeug kommt wieder auf, wenn sich seine Flugbahn mit der Geraden schneidet, die die Fahrbahn beschreibt.

Fahrbahn: $z_F(x) = -\tan(\beta)\, x$

Flugbahn:

$$z_A(x) = \tan(\alpha)\, x - \frac{g}{2 v^2 \cos^2(\alpha)} x^2$$

Schnittpunkt: $z_A(x_W) = z_F(x_w)$

$$-\tan(\beta)\, x_W = \tan(\alpha)\, x_W - \frac{g}{2 v^2 \cos^2(\alpha)} x_W^2$$

$$\rightarrow \quad x_W = 2 \frac{v^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left(\tan(\alpha) + \tan(\beta) \right)$$

Die zugehörige *z*-Koordinate ist

$$z_W = -\tan(\beta)\, x_W \,.$$

Für den entlang der Fahrbahn gemessenen Abstand gilt:

$$d = \sqrt{x_W^2 + z_W^2}$$

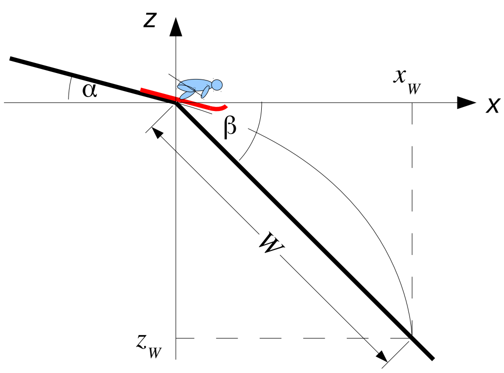
Zahlenwerte:

$$x_W = 2 \cdot \frac{20^2\, \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \cos^2(20°)}{9{,}81\, \mathrm{m}/\mathrm{s}^2} \left(\tan(20°) + \tan(10°) \right) = 38{,}91\, \mathrm{m}$$

$$z_W = -\tan(10°) \cdot 38{,}91\, \mathrm{m} = 6{,}860\, \mathrm{m}$$

$$d = \sqrt{38{,}91^2\, \mathrm{m}^2 + 6{,}860\, \mathrm{m}^2} = \underline{39{,}51\, \mathrm{m}}$$

Aufgabe 9



Im eingezeichneten Koordinatensystem gilt für die Flugbahn:

$$z(x) = -\tan(\alpha)\, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2$$

Das negative Vorzeichen vor $\tan(\alpha)$ kommt daher, dass der Wurfwinkel α hier nach unten gerichtet ist.

Für den Hang gilt: $z_h(x) = -x \tan(\beta)$

Für den Punkt, an dem der Skifahrer landet, gilt: $z(x_W)=z_h(x_W)$

Aus dieser Bedingung kann x_W bestimmt werden:

$$-x_W\tan(\alpha)-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_W^2=-x_W\tan(\beta)$$

Daraus folgt:

$$\tan(\beta)-\tan(\alpha)=\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x_W \rightarrow x_W=\frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}(\tan(\beta)-\tan(\alpha))$$

Die zugehörige z-Koordinate ist

$$z_W=-x_W\tan(\beta)\ .$$

Für die Sprungweite W gilt also:

$$W=\sqrt{x_W^2+z_W^2}=x_W\sqrt{1+\tan^2(\beta)}=\frac{x_W}{\cos(\beta)}=\frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}\frac{\tan(\beta)-\tan(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

Zahlenwert:

$$v_0=36\,\mathrm{km/h}=10\,\mathrm{m/s}$$

$$W=\frac{2\cdot 100\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\cdot\cos^2(15°)}{9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\frac{\tan(45°)-\tan(15°)}{\cos(45°)}=19{,}02\,\mathrm{m}\cdot 1{,}035=\underline{19{,}69\,\mathrm{m}}$$

Aufgabe 10

a) Geschwindigkeitsvektor und Bahngeschwindigkeit

Für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors gilt:

$$v_x(t)=\dot{x}(t)=2\frac{x_0}{T}\left(\frac{t}{T}\right),\quad v_y(t)=\dot{y}(t)=3\frac{y_0}{T}\left(\frac{t}{T}\right)^2$$

Die Bahngeschwindigkeit ist gleich dem Betrag des Geschwindigkeitsvektors:

$$v(t)=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)}=\frac{1}{T}\sqrt{4x_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^4}=\frac{t}{T^2}\sqrt{4x_0^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}$$

b) Beschleunigungsvektor und Bahnbeschleunigung

Der Beschleunigungsvektor ist die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeits-vektors. Für seine Komponenten gilt:

$$a_x(t)=\dot{v}_x(t)=2\frac{x_0}{T^2},\quad a_y(t)=\dot{v}_y(t)=6\frac{y_0}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Die Bahnbeschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Bahngeschwindigkeit:

$$a_t(t)=\dot{v}(t)=\frac{8x_0^2\left(\frac{t}{T}\right)+36y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^3}{2T^2\sqrt{4x_0\left(\frac{t}{T}\right)^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^4}}=\frac{4x_0^2+18y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}{T^2\sqrt{4x_0^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}}$$

c) <u>Normalbeschleunigung</u>

Aus

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=a_t\frac{\boldsymbol{v}}{v}+\boldsymbol{a}_n$$

folgt:

$$\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}-\frac{a_t}{v}\boldsymbol{v}$$

Mit

$$\frac{a_t}{v}=\frac{4x_0^2+18y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}{t\left(4x_0^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2\right)}$$

folgt:

$$a_{nx}(t)=2\frac{x_0}{T^2}\left[1-\frac{4x_0^2+18y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}{4x_0^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}\right]=-18\frac{x_0}{T^2}\frac{y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}{4x_0^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}$$

$$a_{ny}(t)=3\frac{y_0}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)\left[2-\frac{4x_0^2+18y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}{4x_0^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}\right]=12\frac{y_0}{T^2}\left(\frac{t}{T}\right)\frac{x_0^2}{4x_0^2+9y_0^2\left(\frac{t}{T}\right)^2}$$

Aufgabe 11

a) Geschwindigkeitsvektor und Bahngeschwindigkeit

Geschwindigkeitsvektor:

$$v_x(t)=\dot{x}(t)=-x_0\,\omega\sin(\omega t),\quad v_y(t)=\dot{y}(t)=y_0\,\omega\cos(\omega t)$$

Bahngeschwindigkeit:

$$v(t)=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)}=\omega\sqrt{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}$$

b) Beschleunigungsvektor und Bahnbeschleunigung

Beschleunigungsvektor:

$$a_x(t)=\ddot{x}(t)=-x_0\,\omega^2\cos(\omega t),\quad a_y(t)=\ddot{y}(t)=-y_0\,\omega^2\sin(\omega t)$$

Bahnbeschleunigung:

$$a_t(t)=\frac{dv}{dt}(t)=\frac{2\omega^2\left(x_0^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)-y_0^2\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right)}{2\sqrt{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos(\omega t)}}$$

$$=\frac{\omega^2\left(x_0^2-y_0^2\right)\sin(2\omega t)}{2\sqrt{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}}$$

c) Vektor der Normalbeschleunigung

$$\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{a}_n(t)+\boldsymbol{a}_t(t)\ \rightarrow\ \boldsymbol{a}_n(t)=\boldsymbol{a}(t)-\boldsymbol{a}_t(t)=\boldsymbol{a}(t)-\frac{a_t(t)}{v(t)}\boldsymbol{v}(t)$$

$$\frac{a_t(t)}{v(t)}=\frac{\omega\left(x_0^2-y_0^2\right)\sin(2\omega t)}{2\left(x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)\right)}$$

$$a_{nx}(t)=-x_0\,\omega^2\left(\cos(\omega t)-\frac{1}{2}\sin(\omega t)\sin(2\omega t)\frac{x_0^2-y_0^2}{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}\right)$$

$$=-x_0\,\omega^2\cos(\omega t)\left(1-\frac{\left(x_0^2-y_0^2\right)\sin^2(\omega t)}{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}\right)$$

$$=-x_0\,\omega^2\frac{y_0^2\cos(\omega t)}{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}$$

$$a_{ny}(t) = -y_0\omega^2\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\cos(\omega t)\sin(2\omega t)\frac{x_0^2 - y_0^2}{x_0^2\sin^2(\omega t) + y_0^2\cos^2(\omega t)}\right)$$

$$= -y_0\omega^2\sin(\omega t)\left(1 + \frac{\left(x_0^2 - y_0^2\right)\cos^2(\omega t)}{x_0^2\sin^2(\omega t) + y_0^2\cos^2(\omega t)}\right)$$

$$= -y_0\omega^2\frac{x_0^2\sin(\omega t)}{x_0^2\sin^2(\omega t) + y_0^2\cos^2(\omega t)}$$

Aufgabe 12

a) <u>Wurfhöhe und Steigzeit von Ball *B*</u>

Aus $0 = v_B - g\,t_H$ folgt: $t_H = \frac{v_B}{g}$

Für die Wurfhöhe folgt: $H = v_B t_H - \frac{1}{2}g\,t_H^2 = \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g}$

b) <u>Wurfwinkel und Anfangsgeschwindigkeit von Ball *A*</u>

Es muss gelten:

$$d = v_A\cos(\alpha)\,t_H \qquad (1)$$

$$H = v_A\sin(\alpha)\,t_H - \frac{1}{2}g\,t_H^2 \qquad (2)$$

Aus (1) folgt: $v_A = \frac{d}{\cos(\alpha)\,t_H}$

Einsetzen in (2) ergibt: $H = d\tan(\alpha) - \frac{1}{2}g\,t_H^2 \rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{d}\left(h + \frac{1}{2}g\,t_H^2\right)$

Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe a) gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} + \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g}\right) = \frac{v_B^2}{g\,d}$$

Mit

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_B^4}{(g\,d)^2}}}$$

folgt für die benötigte Wurfgeschwindigkeit:

$$v_A=\frac{d}{t_H}\sqrt{1+\frac{v_B^4}{(g\,d)^2}}=\frac{g\,d}{v_B}\sqrt{1+\frac{v_B^4}{(g\,d)^2}}=\sqrt{\frac{(g\,d)^2}{v_B^2}+v_B^2}$$

Aufgabe 13

a) Geschwindigkeiten

$$v_x(t)=\dot{x}(t)=-\omega\,r\sin(\omega\,t)$$
$$v_y(t)=\dot{y}(t)=2\,\omega\,r\cos(2\,\omega\,t)$$
$$v(t)=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)}=\omega\,r\sqrt{\sin^2(\omega\,t)+4\cos^2(\omega\,t)}$$

b) Beschleunigungen

$$a_x(t)=\dot{v}_x(t)=-\omega^2\,r\cos(\omega\,t)$$
$$a_y(t)=\dot{v}_y(t)=-4\,\omega^2 r\sin(2\,\omega\,t)$$
$$a_t(t)=\dot{v}(t)=\omega^2 r\,\frac{2\sin(\omega\,t)\cos(\omega\,t)-16\cos(2\,\omega\,t)\sin(2\,\omega\,t)}{2\sqrt{\sin^2(\omega\,t)+4\cos^2(2\,\omega\,t)}}$$
$$=\omega^2 r\,\frac{\sin(2\,\omega\,t)-8\sin(4\,\omega\,t)}{2\sqrt{\sin^2(\omega\,t)+4\cos^2(2\,\omega\,t)}}$$

Aufgabe 14

a) Geschwindigkeiten

$$v_x(t)=\dot{x}(t)=r\left(\omega-\omega\cos(\omega\,t)\right)=\omega\,r\left(1-\cos(\omega\,t)\right)$$
$$v_y(t)=\dot{y}(t)=\omega\,r\sin(\omega\,t)$$
$$v(t)=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)}=\omega\,r\sqrt{1-2\cos(\omega\,t)+1}=\omega\,r\sqrt{2-2\cos(\omega\,t)}$$

b) Beschleunigungen

$$a_x(t)=\dot{v}_x(t)=\omega^2 r\sin(\omega\,t)$$
$$a_y(t)=\dot{v}_y(t)=\omega^2 r\cos(\omega\,t)$$
$$a_t(t)=\dot{v}(t)=\omega\,r\,\frac{2\,\omega\sin(\omega\,t)}{2\sqrt{2-2\cos(\omega\,t)}}=\omega^2 r\,\frac{\sin(\omega\,t)}{\sqrt{2-2\cos(\omega\,t)}}$$

Aufgabe 15

a) <u>Geschwindigkeiten</u>

Geschwindigkeitsvektor:

$$v_x(t)=\dot{x}(t)=-5\,\omega\,r\left(\sin(\omega t)-2\sin(5\,\omega t)\right)$$

$$v_y(t)=\dot{y}(t)=5\,\omega\,r\left(\cos(\omega t)-2\cos(5\,\omega t)\right)$$

$$v_x^2(t)=25\,\omega^2 r^2\left(\sin^2(\omega t)-4\sin(\omega t)\sin(5\,\omega t)+4\sin^2(5\,\omega t)\right)$$

$$v_y^2(t)=25\,\omega^2 r^2\left(\cos^2(\omega t)-4\cos(\omega t)\cos(5\,\omega t)+4\cos^2(5\,\omega t)\right)$$

Bahngeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_x^2(t)+v_y^2(t) &= 25\,\omega^2 r^2\left[5-4\left(\cos(\omega t)\cos(5\,\omega t)+\sin(\omega t)\sin(5\,\omega t)\right)\right] \\ &= 25\,\omega^2 r^2\left(5-4\cos(4\,\omega t)\right) \end{aligned}$$

$$v(t)=5\,\omega\,r\sqrt{5-4\cos(4\,\omega t)}$$

b) <u>Beschleunigungen</u>

Beschleunigungsvektor:

$$a_x(t)=\dot{v}_x(t)=-5\,\omega^2 r\left(\cos(\omega t)-10\cos(5\,\omega t)\right)$$

$$a_y(t)=\dot{v}_y(t)=-5\,\omega^2 r\left(\sin(\omega t)-10\sin(5\,\omega t)\right)$$

Bahnbeschleunigung:

$$a_t(t)=\dot{v}(t)=5\,\omega\,r\,\frac{16\,\omega\sin(4\,\omega t)}{2\sqrt{5-4\cos(4\,\omega t)}}=\frac{40\,\omega^2 r\sin(4\,\omega t)}{\sqrt{5-4\cos(4\,\omega t)}}$$