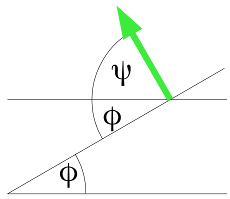
1.3 Kreisbewegung

Lösungen

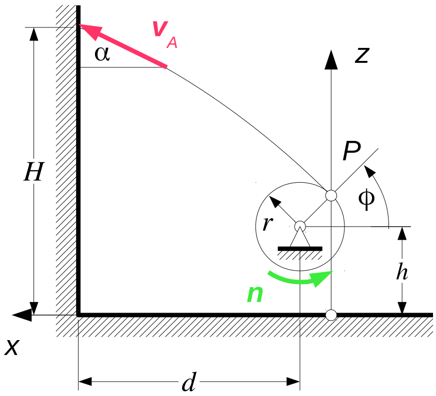
Aufgabe 1



a) Auftreffhöhe

Nach dem Ablösen beschreibt der Punkt *P* die Bahn eines schiefen Wurfs mit dem Anfangswinkel $\psi = 90° - \phi$. Die Anfangsgeschwindigkeit hat den Wert

$$v_0 = r\omega = 2\pi r n \,.$$



Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die *x*-Achse entlang des Bodens nach links verläuft und die *z*-Achse nach oben durch Punkt *P* geht.

Dann lautet die Gleichung der Flugbahn

$$z(x) = h + r\sin(\phi) + x\tan(\psi) - \frac{g}{2\left(v_0\cos(\psi)\right)^2} x^2 \,.$$

Die linke Wand befindet sich an der Stelle

$$x_W = d + r\cos(\phi) \,.$$

Damit gilt:

$$H = z(x_W) = h + r\sin(\phi) + x_W\tan(\psi) - \frac{g}{2\left(v_0\cos(\psi)\right)^2} x_W^2$$

Zahlenwerte:

$$v_0 = 2\pi \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} \cdot \frac{3000\,\mathrm{min}^{-1}}{60\,\mathrm{s/min}} = 157{,}1\,\mathrm{m/s}$$

$$x_W = 2\,\mathrm{m} + 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot\cos(45°) = 2{,}354\,\mathrm{m}$$

$$H = 1\,\mathrm{m} + 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot\sin(45°) + 2{,}354\,\mathrm{m}\cdot\tan(45°) - \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 2{,}354^2\,\mathrm{m}^2}{2\left(157{,}1\,\mathrm{m/s}\cdot\cos(45°)\right)^2}$$

$$= \underline{3{,}705\,\mathrm{m}}$$

b) Auftreffgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit in *x*-Richtung ist konstant. Daher gilt:

$$v_{Ax} = v_{0x} = v_0 \cos(\psi)$$

Für die Flugzeit folgt:

$$t_F = \frac{x_W}{v_{0x}}$$

Für die Geschwindigkeit in *z*-Richtung gilt:

$$v_{Az} = v_{0z} - g\,t_F \quad \text{mit} \quad v_{0z} = v_0 \sin(\psi)$$

Zahlenwerte:

$$v_{Ax} = v_{0x} = 157{,}1\,\mathrm{m/s} \cdot \cos(45°) = 111{,}1\,\mathrm{m/s}$$

$$t_F = \frac{2{,}354\,\mathrm{m}}{111{,}1\,\mathrm{m/s}} = 0{,}02119\,\mathrm{s}$$

$$v_{Az} = 157{,}1\,\mathrm{m/s} \cdot \sin(45°) - 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}02119\,\mathrm{s} = 110{,}9\,\mathrm{m/s}$$

$$v_A = \sqrt{111{,}1^2 + 110{,}9^2}\,\mathrm{m/s} = \underline{157{,}0\,\mathrm{m/s}}$$

c) Auftreffwinkel

$$\tan(\alpha) = \frac{v_{Az}}{v_{Ax}}$$

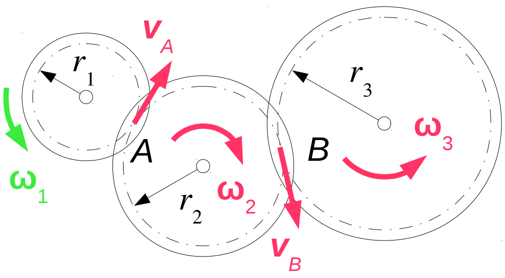
Zahlenwert:

$$\tan(\alpha) = \frac{110{,}9}{111{,}1} = 0{,}9982 \;\rightarrow\; \alpha = \underline{44{,}95°}$$

Aufgabe 2

In Punkt *A* gilt:

$$v_A = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \;\rightarrow\; \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}$$



In Punkt *B* gilt:

$$v_B = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$$

$$\rightarrow \quad \omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{r_3} = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} \frac{r_2}{r_3} = \omega_1 \frac{r_1}{r_3}$$

Zahlenwerte: $\omega_2 = 600\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \frac{2\,\mathrm{cm}}{3\,\mathrm{cm}} = \underline{400\,\mathrm{s}^{-1}}$, $\omega_3 = 600\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \frac{2\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{cm}} = \underline{300\,\mathrm{s}^{-1}}$

Aufgabe 3

a) Winkelgeschwindigkeit vor Beginn des Bremsens

Allgemein gilt: $\omega(t) = \frac{v(t)}{R}$

Daraus folgt: $\omega_0 = \omega(0) = \frac{v_0}{R}$

Zahlenwert: $\omega_0 = \frac{30\,\mathrm{m/s}}{200\,\mathrm{m}} = \underline{0{,}15\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$

b) Überstrichener Winkel

Allgemein gilt: $s(t) = R\,\phi(t)$

Daraus folgt: $\phi_B = \frac{s_B}{R}$

Zahlenwert: $\phi_B = \frac{75\,\mathrm{m}}{200\,\mathrm{m}} = \underline{0{,}375} = \underline{21{,}49\,°}$

c) Beschleunigungen

Die Bahnbeschleunigung ist während des Bremsens konstant, d. h. es liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung vor.

Aus $v(s_B) = \sqrt{v_0^2 + 2\,a_t\,s_B} = 0$ folgt: $a_t = -\frac{v_0^2}{2\,s_B}$

Zahlenwert: $a_t = -\frac{30^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{2 \cdot 75\,\mathrm{m}} = \underline{-6\,\mathrm{m/s}^2}$

Zeitpunkt 1

Unmittelbar vor Beginn des Bremsvorgangs ist die Bahnbeschleunigung null. Für die Normalbeschleunigung gilt:

$$a_{n0} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{30^2\, m^2/s^2}{200\, m} = \underline{4{,}5\,\frac{m}{s^2}}$$

Die Normalbeschleunigung ist zum Kreismittelpunkt hin gerichtet.

Zeitpunkt 2

Unmittelbar nach Beginn des Bremsvorgangs wirkt die Bahnbeschleunigung von -6 m/s^2 und die Normalbeschleunigung von 4,5 m/s^2.

Zeitpunk 3

Nach Zurücklegen des halben Bremswegs hat das Fahrzeug die Geschwindigkeit

$$v_H = v\left(\frac{s_B}{2}\right) = \sqrt{v_0^2 + 2\,a_t\,\frac{s_B}{2}} = \sqrt{v_0^2 - \frac{v_0^2}{2\,s_B}\cdot s_B} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

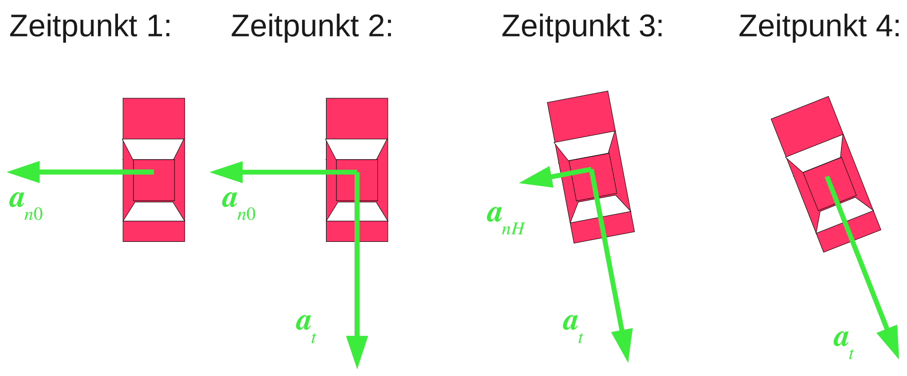
Damit folgt für die Normalbeschleunigung:

$$a_{nH} = \frac{v_H^2}{R} = \frac{v_0^2}{2\,R} = \frac{1}{2}\,a_{n0} = \underline{2{,}25\,\mathrm{m/s^2}}$$

Nach Zurücklegen des halben Bremsweges wirkt die Bahnbeschleunigung von -6 m/s^2 und die Normalbeschleunigung von 2,25 m/s^2.

Zeitpunkt 4

Unmittelbar vor Ende des Bremsvorgangs ist die Bahngeschwindigkeit und damit auch die Normalbeschleunigung praktisch null. Es wirkt nur die Bahnbeschleunigung von -6 m/s^2 .



Aufgabe 4

Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung mit den Anfangsbedingungen:

1. Die Zeit wird ab Beginn des Anlaufens gemessen: $t_0 = 0\,\mathrm{s}$
2. Der Winkel wird ab der Ruhelage gemessen: $\phi_0 = \phi(0) = 0$
3. Die Bewegung startet aus der Ruhelage: $\omega_0 = \omega(0) = 0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

a) <u>Winkelbeschleunigung</u>

Mit den angegebenen Anfangsbedingungen gilt:

$$\omega(t_1) = \dot{\omega}_0 t_1 \;\rightarrow\; \dot{\omega}_0 = \frac{\omega(t_1)}{t_1}$$

Die Drehzahl n_1 hat die Einheit Umdrehungen pro Minute. Damit gilt für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t_1) = \pi \frac{n_1}{30}$$

Damit berechnet sich die Winkelbeschleunigung zu

$$\dot{\omega}_0 = \frac{\pi n_1}{30 t_1}$$ (n_1 in Umdrehungen pro Minute, $\dot{\omega}_0$ in $1/\mathrm{s}$)

Zahlenwert: $\dot{\omega}_0 = \frac{\pi \cdot 2000}{30 \cdot 20} \frac{1}{\mathrm{s}^2} = \frac{10}{3} \pi \frac{1}{\mathrm{s}^2} = \underline{10{,}47 \frac{1}{\mathrm{s}^2}}$

b) <u>Umdrehungen</u>

Für den überstrichenen Winkel bis zur Zeit t_1 gilt:

$$\phi_1 = \phi(t_1) = \frac{1}{2}\dot{\omega}_0 t_1^2 = \frac{\pi}{60} n_1 t_1$$

Während einer Umdrehung wird ein Winkel von 2π überstrichen. Die Anzahl der Umdrehungen berechnet sich daher zu

$$N_1 = \frac{\phi_1}{2\pi} = \frac{n_1 t_1}{120} \; .$$

Zahlenwert: $N_1 = \frac{2000}{120}\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 20\,\mathrm{s} = \frac{4000}{12} = \frac{1000}{3} = \underline{333{,}3}$