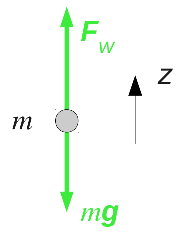
2.1 Bewegungsgleichung

Lösungen

Aufgabe 1



Auf die Masse wirkt nach unten die Gewichtskraft mg und nach oben die Federkraft der Waage F_W.

Die Bewegungsgleichung in z-Richtung lautet:

$$\sum F_z = m a_z \ : \ F_W - mg = m a_z$$

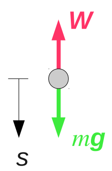
Daraus folgt für die Beschleunigung der Kabine:

$$a_z = \frac{F_W}{m} - g$$

Zahlenwert: $a_z = \frac{52\,\text{N}}{5\,\text{kg}} - 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10{,}4\,\frac{\text{kg}\,\text{m}}{\text{s}^2\,\text{kg}} - 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{0{,}59\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

Aufgabe 2

a) <u>Bewegungsgleichung</u>



Am fallenden Körper greift die Gewichtskraft mg und die Widerstandskraft W an, die entgegengesetzt zur Bewegung wirkt. Wird die positive Achsrichtung nach unten gewählt, so lautet die Bewegungsgleichung:

$$\sum F_s = m a \ : \ m g - W = m g - k v^2 = m a$$

b) <u>Grenzgeschwindigkeit</u>

Wenn der Körper die Grenzgeschwindigkeit erreicht hat, ist seine Beschleunigung null:

$$m g - k v_G^2 = 0 \,.$$

Daraus folgt: $k v_G^2 = m g \ \rightarrow \ v_G = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

Zahlenwert: $v_G = \sqrt{\frac{5\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}{0{,}0162\,\text{kg/m}}} = 55{,}03\,\text{m/s} = \underline{198{,}1\,\text{km/h}}$

c) Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit

Aus der Bewegungsgleichung folgt

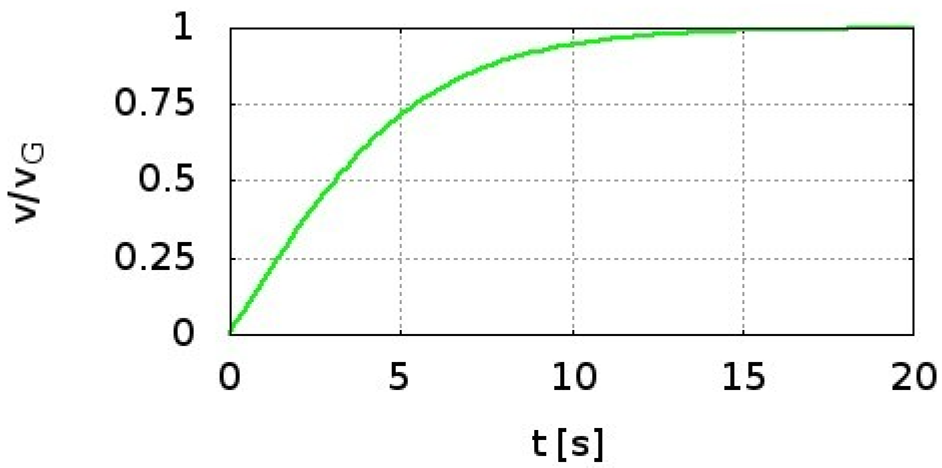
$$a(v)=g-\frac{k}{m}v^2=g\left(1-\frac{k}{m\,g}v^2\right)=g\left(1-\frac{v^2}{v_G^2}\right)=\frac{g}{v_G^2}\left(v_G^2-v^2\right).$$

Die Beschleunigung ist geschwindigkeitsabhängig. Wird die Zeit ab dem Beginn des Falls gemessen, so ist $t_0 = 0$ und $v_0 = 0$. Dann gilt für die Zeit t :

$$t=\int_0^{v(t)}\frac{dv}{a(v)}=\frac{v_G^2}{g}\int_0^{v(t)}\frac{dv}{v_G^2-v^2}=\frac{v_G}{g}\left[\operatorname{artanh}\left(\frac{v}{v_G}\right)\right]_{v=0}^{v=v(t)}=\frac{v_G}{g}\operatorname{artanh}\left(\frac{v(t)}{v_G}\right)$$

Auflösen nach $v(t)$ ergibt:

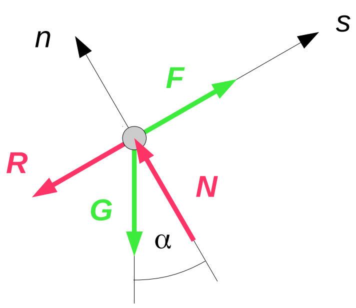
$$\frac{g\,t}{v_G}=\operatorname{artanh}\left(\frac{v(t)}{v_G}\right)\ \rightarrow\ \tanh\left(\frac{g\,t}{v_G}\right)=\frac{v(t)}{v_G}\ \rightarrow\ v(t)=v_G\tanh\left(\frac{g\,t}{v_G}\right)$$



Aufgabe 3

a) Abschussgeschwindigkeit

An der freigeschnittenen Kugel greifen die Federkraft $\boldsymbol{F}$, die Reibungskraft $\boldsymbol{R}$, die Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$ und die Normalkraft $\boldsymbol{N}$ an.



Bewegungsgleichungen:

$$\sum F_s=m\,a_s\ :\ F-R-G\sin(\alpha)=m\,a_s$$

$$\sum F_n=0\ :\ N-G\cos(\alpha)=0\ \rightarrow\ N=G\cos(\alpha)$$

Gleitreibungsgesetz:

$$R = \mu N = \mu G \cos(\alpha)$$

Federkraft: $F = c(s_0 - s)$

Einsetzen der Kräfte in die Bewegungsgleichung in s-Richtung ergibt

$$c(s_0 - s) - (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) m g = m a_s \ .$$

Daraus folgt für die Beschleunigung:

$$a_s(s) = \frac{c}{m} s_0 - (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) g - \frac{c}{m} s$$

Mit den Abkürzungen

$$a_0 = \frac{c}{m} s_0 - (\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)) g \quad \text{und} \quad b = \frac{c}{m}$$

gilt: $a_s(s) = a_0 - b s$

Zahlenwerte:

$$a_0 = \frac{10\,\mathrm{N/mm}}{10\,\mathrm{kg}} \cdot 200\,\mathrm{mm} - (0{,}2 \cos(30°) + \sin(30°)) \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{193{,}4\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$b = \frac{10 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m}}{10\,\mathrm{kg}} = \underline{1000\,\mathrm{s^{-2}}}$$

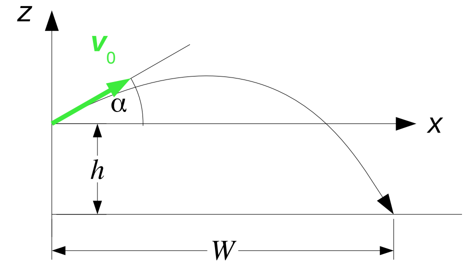
Die Beschleunigung ist ortsabhängig. Da die Anfangsgeschwindigkeit null ist, berechnet sich die Geschwindigkeit v_0, mit der die Kugel das Katapult verlässt, zu

$$v_0 = \sqrt{2 \int_0^{s_0} a_s(s)\, ds} = \sqrt{2 \int_0^{s_0} (a_0 - b s)\, ds} = \sqrt{2 \left[a_0 s - \frac{1}{2} b s^2 \right]_{s=0}^{s=s_0}} = \sqrt{2 \left(a_0 s_0 - \frac{1}{2} b s_0^2 \right)} \ .$$

Zahlenwert: $v_0 = \sqrt{2 \left(193{,}4\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 1000\,\mathrm{s^{-2}} \cdot 0{,}2^2\,\mathrm{m^2} \right)} = \underline{6{,}112\,\mathrm{m/s}}$

b) <u>Wurfweite</u>

Der Ursprung des Koordinatensystems für die Wurfparabel wird in den Punkt gelegt, an dem die Kugel das Katapult verlässt.



Dann gilt für die Wurfweite: $z(W) = -h$

Daraus folgt:

$$W \tan(\alpha) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} W^2 = -h$$

$$W^2-2W\frac{v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}\tan(\alpha)-2\frac{v_0^2\cos^2(\alpha)}{g}h=0$$

$$W^2-2W\frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)-2v_0^2\frac{h}{g}\cos^2(\alpha)=0$$

$$W_{1/2}=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)\pm\sqrt{\frac{v_0^4}{g^2}\sin^2(\alpha)\cos^2(\alpha)+2v_0^2\frac{h}{g}\cos^2(\alpha)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)\pm v_0\cos(\alpha)\sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\sin(\alpha)\right)^2+2\frac{h}{g}}$$

Von den beiden Lösungen ist nur die Lösung $W>0$ physikalisch sinnvoll.

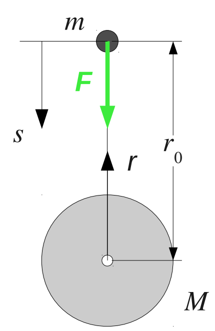
Zahlenwert:

$$W=\frac{1}{2}\frac{6{,}112^2\,\mathrm{m^2/s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}\sin(60°)$$

$$+6{,}112\,\mathrm{m/s}\cdot\cos(30°)\sqrt{\left(\frac{6{,}112\,\mathrm{m/s}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}\sin(30°)\right)^2+\frac{2\cdot 0{,}2\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}}$$

$$=1{,}649\,\mathrm{m}+5{,}293\,\mathrm{m/s}\cdot\sqrt{0{,}1378\,\mathrm{s}^2}=\underline{3{,}614\,\mathrm{m}}$$

Aufgabe 4



Der Weg s wird ab dem Anfangspunkt bei $r = r_0$ gemessen.
Dann gilt: $r(s)=r_0-s$

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\sum F_s=ma \quad : \quad \gamma\frac{mM}{(r_0-s)^2}=m\,a(s)$$

Daraus folgt für die Beschleunigung:

$$a(s)=\gamma\frac{M}{(r_0-s)^2}$$

Die Beschleunigung ist ortsabhängig. Daher gilt für die Geschwindigkeit:

$$v(s)=\sqrt{v_0^2+2\int_0^s a(\bar{s})\,d\bar{s}}=\sqrt{v_0^2+2\gamma M\int_0^s\frac{d\bar{s}}{(r_0-\bar{s})^2}}\ .$$

Das Integral berechnet sich zu

$$\int_0^s\frac{d\bar{s}}{(r_0-\bar{s})^2}=\left[\frac{1}{r_0-\bar{s}}\right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=s}=\frac{1}{r_0-s}-\frac{1}{r_0}\ .$$

Wenn der Meteorit auf die Erde aufschlägt, gilt $s_E = r_0 - R$. Für seine Geschwindigkeit beim Aufschlag folgt:

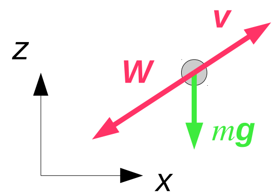
$$v_E = v(s_E) = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma M\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right)} = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma M\frac{r_0 - R}{r_0 R}}$$

Zahlenwert:

$$v_E = \sqrt{\left(\frac{1000}{3,6}\right)^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 2\cdot 6,670\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}\cdot 5,974\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot\frac{(10000-6371)\cdot 10^3\,\mathrm{m}}{10000\cdot 6371\cdot 10^6\,\mathrm{m}^2}}$$
$$= \sqrt{77160 + 45390000}\,\mathrm{m/s} = 6743\,\mathrm{m/s} = \underline{24270\,\mathrm{km/h}}$$

Aufgabe 5

Bewegungsgleichungen:



$$\sum F_x = m a_x \;:\; W_x = m\dot{v}_x$$
$$\sum F_y = m a_y \;:\; -m g + W_y = m\dot{v}_y$$

Aus

$$\boldsymbol{W} = -k v^2 \frac{\boldsymbol{v}}{v} = -k v \boldsymbol{v} = -k v\left(v_x \boldsymbol{e}_x + v_y \boldsymbol{e}_y\right)$$

folgt für die Komponenten des Luftwiderstands:

$$W_x = -k v v_x,\quad W_y = -k v v_y,\quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

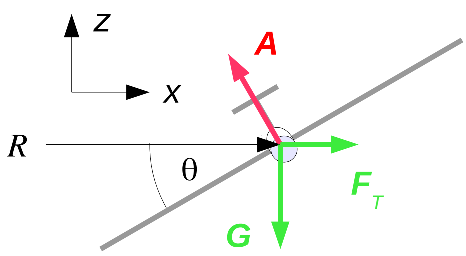
Damit folgt aus den Bewegungsgleichungen das folgende Differenzialgleichungssystem für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors:

$$\dot{v}_x = -\frac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_x^2}\,v_x$$
$$\dot{v}_y = -\frac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,v_y - g$$

Dieses nichtlineare Differenzialgleichungssystem kann nur numerisch gelöst werden, z. B. mit der Matlab-Funktion **`ode45`** oder der GNU Octave-Funktion **`lsode`**.

Aufgabe 6

a) <u>Schräglage und Auftriebskraft</u>



Außer der Auftriebskraft $\boldsymbol{A}$ wirken die Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$ und die d'Alembertsche Trägheitskraft $\boldsymbol{F}_T$.

Für die Gewichtskraft gilt: $G = mg$

Die d'Alembertsche Trägheitskraft ist gleich der Zentrifugalkraft:

$$F_T = m a_n = m \frac{v^2}{R}$$

Dynamisches Gleichgewicht:

$$\sum F_x^D = 0 \ : \ F_T - A\sin(\theta) = 0 \ \rightarrow \ A\sin(\theta) = F_T$$

$$\sum F_z^D = 0 \ : -G + A\cos(\theta) = 0 \ \rightarrow \ A\cos(\theta) = G$$

Division der ersten durch die zweite Gleichung ergibt eine Gleichung für den Winkel θ:

$$\tan(\theta) = \frac{F_T}{G} = \frac{m v^2}{R\, mg} = \frac{v^2}{R g}$$

Werden beide Gleichungen quadriert und addiert, folgt eine Gleichung für den Auftrieb A:

$$A^2 \sin^2(\theta) + A^2 \cos^2(\theta) = F_T^2 + G^2 \ \rightarrow \ A = m\sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + g^2}$$

Zahlenwerte:

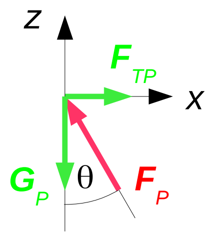
$$v = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{100}{3{,}6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 27{,}78\,\frac{m}{s}$$

$$\tan(\theta) = \frac{27{,}78^2\,\text{m}^2/\text{s}^2}{100\,\text{m}\cdot 9{,}81\,\text{m}/\text{s}^2} = 0{,}7865 \ \rightarrow \ \theta = \underline{38{,}19\,°}$$

$$A = 320\,\text{kg}\cdot\sqrt{\left(\frac{27{,}78^2\,\text{m}^2/\text{s}^2}{100\,\text{m}}\right)^2 + 9{,}81^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}} = 320\,kg\cdot\sqrt{155{,}8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{3993\,\text{N}}$$

b) <u>Kraft auf Pilot</u>

Die vom Sitz auf den Piloten ausgeübte Kraft F_P muss im Gleichgewicht mit der d'Alembertschen Trägheitskraft F_{TP} und der Gewichtskraft G_P sein.



Für die Gewichtskraft gilt: $G_P = m_P g$

Für die d'Alembertsche Trägheitskraft gilt: $F_{TP} = m_P \frac{v^2}{R}$

Aus

$$\frac{F_{TP}}{G_P} = \frac{v^2}{R g} = \frac{F_T}{G}$$

folgt, dass die Kraft $\boldsymbol{F_P}$ die gleiche Richtung wie die Auftriebskraft $\boldsymbol{A}$ hat.

Aus dem Kräfteplan folgt für den Betrag der auf den Piloten ausgeübten Kraft:

$$F_P = \sqrt{G_P^2 + F_{TP}^2} = m_P \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + g^2}$$

Zahlenwert:

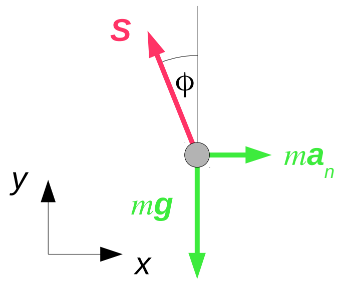
$$F_P = 70\,\mathrm{kg} \cdot \sqrt{155{,}8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{873{,}7\,\mathrm{N}}$$

Aufgabe 7

Dynamisches Gleichgewicht der Masse:

$$\sum F_x^D = 0 \;:\; m\,a_n - S\sin(\phi) = 0$$

$$\sum F_y^D = 0 \;:\; -m\,g + S\cos(\phi) = 0$$



Aus der zweiten Gleichung folgt

$$S = \frac{m\,g}{\cos(\phi)}\,.$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$m\,a_n = m\,g\tan(\phi)\,.$$

Für die Zentripetalbeschleunigung gilt: $a_n = \omega^2\left(R + L\sin(\phi)\right)$

Daraus folgt: $\omega^2\left(R + L\sin(\phi)\right) = g\tan(\phi)$

Für kleine Winkel gilt $\sin(\phi) \approx \tan(\phi)$. Damit vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\omega^2 R = \left(g - \omega^2 L\right)\tan(\phi)\,,$$

woraus folgt:

$$\tan(\phi) = \frac{\omega^2 R}{g - \omega^2 L}$$

Zahlenwerte:

$$\tan(\phi) = \frac{0{,}2\,\mathrm{s}^{-2} \cdot 5\,\mathrm{m}}{9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 - 0{,}2\,\mathrm{s}^{-2} \cdot 2\,\mathrm{m}} = 0{,}02055 \;\rightarrow\; \phi = \underline{1{,}178\,°}$$

$$S = \frac{100\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2}{\cos(1{,}178\,°)} = \underline{981{,}2\,\mathrm{N}}$$

Aufgabe 8

Mit $s(t)=v_0 t$ gilt für den Geschwindigkeitsvektor:

$$\boldsymbol{v}(t)=v_0\boldsymbol{e}_t(t)=v_0\left(\cos\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_y\right)$$

Daraus folgt für den Beschleunigungsvektor:

$$\boldsymbol{a}(t)=\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\frac{v_0^3 t}{R^2}\left(-\sin\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\cos\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_y\right)$$

Aus dem Newtonschen Grundgesetz folgt:

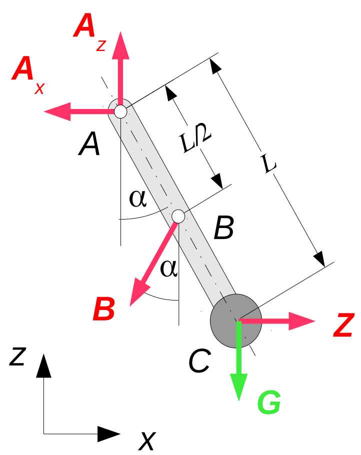
$$\boldsymbol{F}(t)=m\boldsymbol{a}(t)=\frac{m v_0^3 t}{R^2}\left(-\sin\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\cos\left(\frac{v_0^2 t^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_y\right)$$

Aufgabe 9

Die Muffe wird angehoben, wenn die Summe der von den beiden Querstreben auf sie ausgeübten Kräfte in *z*-Richtung größer als ihr Gewicht ist.

Wegen der Symmetrie sind die Kräfte beider Querstreben gleich groß. Die Querstreben sind Pendelstützen.

Der Zusammenhang zwischen der über eine Querstrebe übertragenen Kraft und der Zentrifugalkraft kann aus dem dynamischen Gleichgewicht am Träger *AC* ermittelt werden:



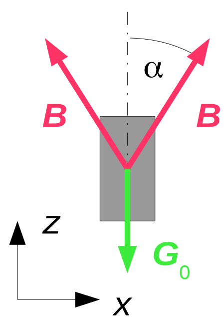
$$\sum M^{DA}=0\ :$$

$$L\cos(\alpha)Z-L\sin(\alpha)G$$

$$-\frac{L}{2}\sin(\alpha)B\cos(\alpha)-\frac{L}{2}\cos(\alpha)B\sin(\alpha)=0$$

$$\rightarrow\ Z\cos(\alpha)-G\sin(\alpha)=B\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\rightarrow\ B=\frac{Z}{\sin(\alpha)}-\frac{G}{\cos(\alpha)}$$



Gleichgewicht für die Muffe:

$$\sum F_z=0\ :\ -G_0+2B\cos(\alpha)=0$$

Die Muffe hebt ab für

$$2B\cos(\alpha) \geq G_0 .$$

Einsetzen für B führt auf

$$2\left(Z\cot(\alpha) - G\right) \geq G_0 .$$

Auflösen nach der Zentrifugalkraft ergibt

$$Z \geq \left(G + \frac{G_0}{2}\right)\tan(\alpha).$$

Mit $Z = m\omega^2 r = m\omega^2 L\sin(\alpha)$, $G = mg$ und $G_0 = m_0 g$ folgt für die Winkelgeschwindigkeit:

$$m\omega^2 L\sin(\alpha) \geq \left(m + \frac{m_0}{2}\right) g\tan(\alpha) \;\rightarrow\; \omega^2 \geq \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_0}{m}\right)\frac{g}{L\cos(\alpha)}$$

Zahlenwerte:

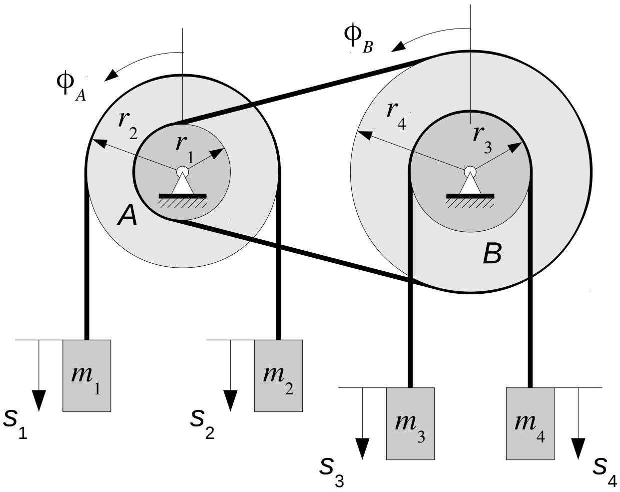
$$\omega^2 \geq (1+5)\,\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}2\,\mathrm{m}\cdot\cos(30°)} = 339{,}8\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \;\rightarrow\; \omega \geq 18{,}43\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}933\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{176\,\frac{1}{\mathrm{min}}}$$

Aufgabe 10

a) Kinematische Beziehungen:

Als Hilfsgrößen werden die Winkel ϕ_A und ϕ_B eingeführt, die die Drehung der Rollen beschreiben.



Es gilt:

$$s_2 = -s_1$$

$$s_1 = r_2\phi_A \;\rightarrow\; \phi_A = \frac{s_1}{r_2}$$

$$r_1\phi_A = r_4\phi_B$$

$$\rightarrow\; \phi_B = \frac{r_1}{r_4}\phi_A = \frac{r_1}{r_2 r_4}s_1$$

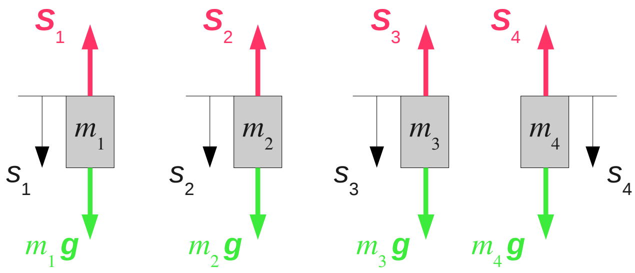
$$s_3 = r_3\phi_B = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}s_1 ,$$

$$s_4 = -s_3 = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}s_1$$

b) Beschleunigungen

Bewegungsgleichungen der Massen:

$$m_1 g - S_1 = m_1 a_1$$
$$m_2 g - S_2 = m_2 a_2$$
$$m_3 g - S_3 = m_3 a_3$$
$$m_4 g - S_4 = m_4 a_4$$



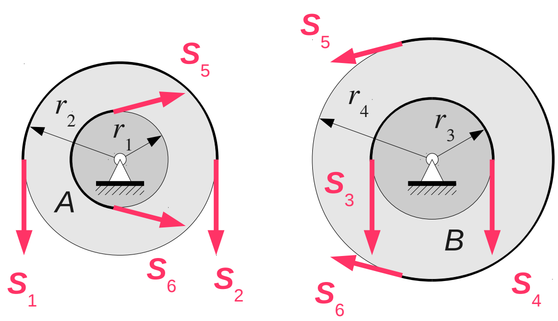
Da die Rollen masselos und reibungsfrei gelenkig gelagert sind, muss für sie das Momentengleichgewicht erfüllt sein.

$$\sum M^A = 0 \quad :$$
$$r_2 \left(S_1 - S_2 \right) + r_1 \left(S_6 - S_5 \right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} \left(S_1 - S_2 \right) = S_5 - S_6$$

$$\sum M^B = 0 \quad :$$
$$r_4 \left(S_5 - S_6 \right) + r_3 \left(S_3 - S_4 \right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{r_3}{r_4} \left(S_3 - S_4 \right) = -\left(S_5 - S_6 \right)$$



Addition der beiden aus dem Momentengleichgewicht gewonnenen Beziehungen ergibt:

$$\frac{r_2}{r_1} \left(S_1 - S_2 \right) + \frac{r_3}{r_4} \left(S_3 - S_4 \right) = 0$$

Aus den Bewegungsgleichungen folgt für die Seilkräfte:

$$S_1 = m_1 \left(g - a_1 \right), \quad S_2 = m_2 \left(g - a_2 \right), \quad S_3 = m_3 \left(g - a_3 \right), \quad S_4 = m_4 \left(g - a_4 \right)$$

Einsetzen in die obige Gleichung führt auf:

$$\frac{r_2}{r_1} \left[m_1 \left(g - a_1 \right) - m_2 \left(g - a_2 \right) \right] + \frac{r_3}{r_4} \left[m_3 \left(g - a_3 \right) - m_4 \left(g - a_4 \right) \right] = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} \left(m_2 a_2 - m_1 a_1 \right) + \frac{r_3}{r_4} \left(m_4 a_4 - m_3 a_3 \right) = \left[\frac{r_2}{r_1} \left(m_2 - m_1 \right) + \frac{r_3}{r_4} \left(m_4 - m_3 \right) \right] g$$

Mit den kinematischen Beziehungen folgt daraus eine Gleichung für die Beschleunigung a_1:

$$\left[\frac{r_2}{r_1} \left(-m_2 - m_1 \right) + \frac{r_3}{r_4} \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \left(-m_4 - m_3 \right) \right] a_1 = -\left[\frac{r_2}{r_1} \left(m_1 - m_2 \right) + \frac{r_3}{r_4} \left(m_3 - m_4 \right) \right] g$$

$$\rightarrow \quad a_1 = \frac{\dfrac{r_2}{r_1}\left(m_1 - m_2\right) + \dfrac{r_3}{r_4}\left(m_3 - m_4\right)}{\dfrac{r_2}{r_1}\left(m_1 + m_2\right) + \dfrac{r_1 r_3^2}{r_2 r_4^2}\left(m_3 + m_4\right)} g = \frac{m_1 - m_2 + \dfrac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\left(m_3 - m_4\right)}{m_1 + m_2 + \left(\dfrac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2 \left(m_3 + m_4\right)} g$$

Die übrigen Beschleunigungen können nun aus den kinematischen Beziehungen berechnet werden:

$$a_2 = -a_1 \,, \quad a_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} a_1 \,, \quad a_4 = -a_3$$

Zahlenwerte:

$$\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = \frac{10\,\mathrm{cm} \cdot 15\,\mathrm{cm}}{20\,\mathrm{cm} \cdot 30\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$a_1 = \frac{60\,\mathrm{kg} - 24\,\mathrm{kg} + 0{,}25 \cdot \left(36\,\mathrm{kg} - 60\,\mathrm{kg}\right)}{60\,\mathrm{kg} + 24\,\mathrm{kg} + 0{,}25^2 \cdot \left(36\,\mathrm{kg} + 60\,\mathrm{kg}\right)} \mathrm{g} = \frac{1}{3} \mathrm{g} = \underline{0{,}3333\,\mathrm{g}} \,, \quad a_2 = -0{,}3333\,\mathrm{g}$$

$$a_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \mathrm{g} = \frac{1}{12} \mathrm{g} = \underline{0{,}08333\,\mathrm{g}} \,, \quad a_4 = -0{,}08333\,\mathrm{g}$$

c) <u>Seilkräfte</u>

$$S_1 = m_1 \left(1 - \frac{1}{3}\right) g = \frac{2}{3} m_1 g = \frac{2}{3} \cdot 60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{392{,}4\,\mathrm{N}}$$

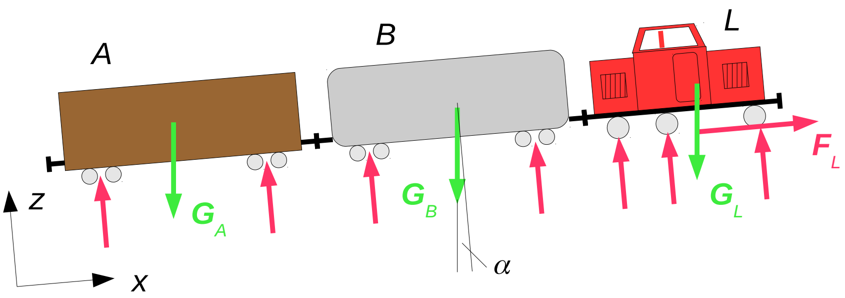
$$S_2 = m_2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) g = \frac{4}{3} m_2 g = \frac{4}{3} \cdot 24\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{313{,}9\,\mathrm{N}}$$

$$S_3 = m_3 \left(1 - \frac{1}{12}\right) g = \frac{11}{12} m_3 g = \frac{11}{12} \cdot 36\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{323{,}7\,\mathrm{N}}$$

$$S_4 = m_4 \left(1 + \frac{1}{12}\right) g = \frac{13}{12} m_4 g = \frac{13}{12} \cdot 60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{637{,}7\,\mathrm{N}}$$

Aufgabe 11

a) Antriebskraft



Schwerpunktsatz für den freigeschnittenen Zug:

$$\sum F_x = F_L - g\left(m_A + m_B + m_L\right)\sin(\alpha) = \left(m_A + m_B + m_L\right)a$$

$$\rightarrow \quad F_L = \left(m_A + m_B + m_L\right)\left(a + g\sin(\alpha)\right)$$

Steigungswinkel: $\tan(\alpha) = 0{,}01 \rightarrow \sin(\alpha) = \dfrac{0{,}01}{\sqrt{1 + 0{,}01^2}} = 0{,}01$

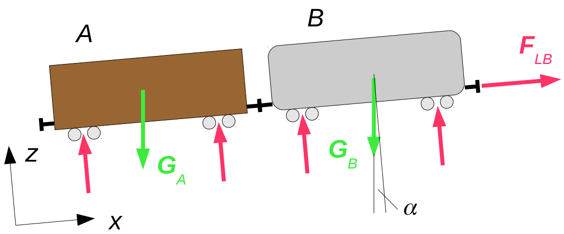
Zahlenwert: $F_L = (45 + 30 + 55)\cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}5 + 9{,}81\cdot 0{,}01)\,\mathrm{m/s^2} = \underline{77{,}75\,\mathrm{kN}}$

b) Kräfte in den Kupplungen

Schwerpunktsatz für die Waggons *A* und *B*:

$$\sum F_x = F_{LB} - \left(m_A + m_B\right) g\sin(\alpha) = \left(m_A + m_B\right)a$$

$$\rightarrow \quad F_{LB} = \left(m_A + m_B\right)\left(a + g\sin(\alpha)\right)$$



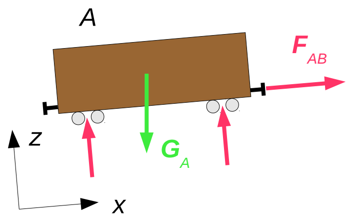
Zahlenwert:

$$F_{LB} = (45 + 30)\cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}5 + 9{,}81\cdot 0{,}01)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{44{,}86\,\mathrm{kN}}$$

Bewegungsgleichung für Waggon *A*:

$$\sum F_x = F_{AB} - m_A g\sin(\alpha) = m_A a$$

$$\rightarrow \quad F_{AB} = m_A\left(a + g\sin(\alpha)\right)$$



Zahlenwert:

$$F_{AB} = 45\cdot 10^3\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}5 + 9{,}81\cdot 0{,}01)\,\mathrm{m/s^2} = \underline{26{,}91\,\mathrm{kN}}$$