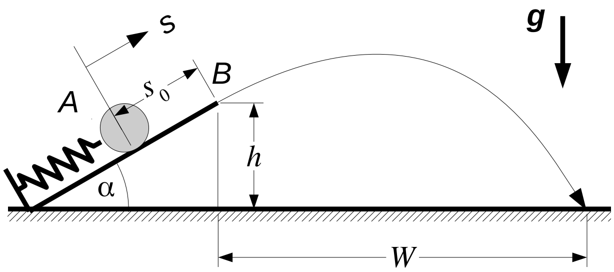
2.2 Arbeit und Energie

Lösungen

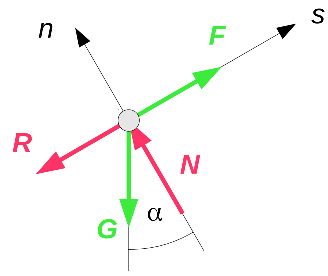
Aufgabe 1

a) <u>Geschwindigkeit beim Verlassen des Katapults</u>



Im Punkt *A* ist die Feder gespannt und die Kugel in Ruhe. Im Punkt *B* ist die Feder entspannt, und die Kugel hat die Geschwindigkeit v_B.

An der freigeschnittenen Kugel greifen die Federkraft $\boldsymbol{F}$, die Reibungskraft $\boldsymbol{R}$, die Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$ und die Normalkraft $\boldsymbol{N}$ an. Zu berechnen ist die von diesen Kräften an der Kugel verrichtete Arbeit.



Aus dem Gleichgewicht in *n*-Richtung folgt:

$$0=N-G\cos(\alpha) \rightarrow N=G\cos(\alpha)$$

Damit berechnet sich die Reibungskraft zu

$$R=\mu N=\mu G\cos(\alpha) .$$

Die Reibungskraft verrichtet die Arbeit

$$W_{AB}^R=-R s_0=-\mu G s_0\cos(\alpha)=-\mu mg\, s_0\cos(\alpha) .$$

Die Gewichtskraft verrichtet die Arbeit

$$W_{AB}^G=-G s_0\sin(\alpha)=-mg\, s_0\sin(\alpha) .$$

Die Federkraft verrichtet die Arbeit

$$W_{AB}^F=\int_0^{s_0} c(s_0-s)\,ds=-c\left[\frac{1}{2}(s_0-s)^2\right]_{s=0}^{s=s_0}=\frac{1}{2}c s_0^2 .$$

Die kinetische Energie E^K_A der Kugel am Anfang ist null, da die Kugel in Ruhe ist. Für die kinetische Energie E^K_B der Kugel beim Verlassen des Katapults gilt

$$E_B^K=\frac{1}{2}m v_B^2 .$$

Der Arbeitssatz lautet: $E_B^K - E_A^K = W_{AB}^R + W_{AB}^G + W_{AB}^F$

Einsetzen der Ausdrücke für die Arbeiten und Energien ergibt:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = -\mu m g s_0 \cos(\alpha) - m g s_0 \sin(\alpha) + \frac{1}{2} c s_0^2$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit:

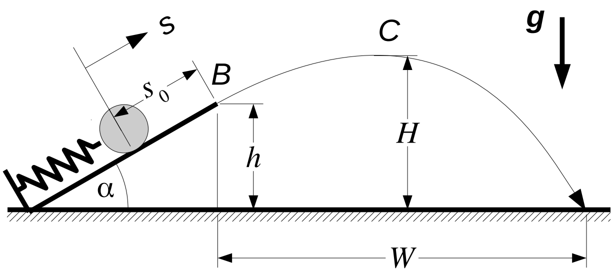
$$v_B = s_0 \sqrt{\frac{c}{m} - 2\left(\mu \cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right) \frac{g}{s_0}}$$

Zahlenwert:

$$v_B = 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m}}{10\,\mathrm{kg}} - 2\left(0{,}2 \cos(30°) + \sin(30°)\right) \cdot \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}2\,\mathrm{m}}} = \underline{6{,}112\,\mathrm{m/s}}$$

b) <u>Maximale Höhe</u>

Die maximale Höhe wird im Punkt *C* erreicht. In diesem Punkt ist die vertikale Komponente der Geschwindigkeit null.



Auf dem Weg von Punkt *B* nach Punkt *C* wirkt auf die Kugel nur die Gewichtskraft. Sie verrichtet die Arbeit

$$W_{BC}^G = -m g (H - h) .$$

Während des Wurfs ist die *x*-Komponente der Geschwindigkeit konstant. Die *z*-Komponente der Geschwindigkeit ist bei Erreichen des höchsten Punktes null. Damit berechnet sich die kinetische Energie im Punkt *C* zu

$$E_C^K = \frac{1}{2} m v_{Bx}^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 \cos^2(\alpha) .$$

Der Arbeitssatz lautet: $E_C^K - E_B^K = W_{BC}^G$

Einsetzen der Gleichungen für die Energien und die Hubarbeit ergibt

$$\frac{1}{2} m v_B^2 \left(\cos^2(\alpha) - 1\right) = -m g (H - h) .$$

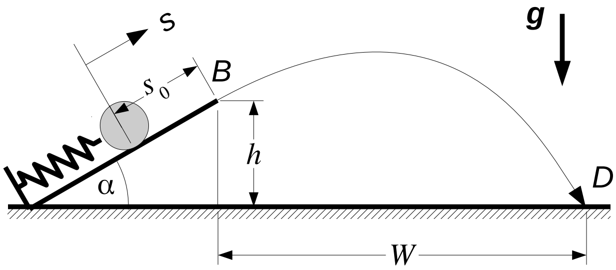
Daraus folgt:

$$H = h + \frac{v_B^2}{2g}\left(1 - \cos^2(\alpha)\right) = h + \frac{v_B^2}{2g} \sin^2(\alpha)$$

Zahlenwert:

$$H=0{,}2\,\mathrm{m}+\frac{6{,}112^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2}\cdot\sin^2(30°)=\underline{0{,}6760\,\mathrm{m}}$$

c) Auftreffgeschwindigkeit



Auf dem Weg von Punkt *B* nach Punkt *D* wirkt nur die Gewichtskraft. Sie verrichtet die Arbeit

$$W_{BD}^{G}=m\,g\,h\,.$$

Der Arbeitssatz lautet:

$$E_D^K-E_B^K=W_{AD}^G$$

Mit $E_D^K=\frac{1}{2}m\,v_D^2$ folgt:

$$\frac{1}{2}m\,v_D^2-\frac{1}{2}m\,v_B^2=m\,g\,h$$

Daraus berechnet sich die Auftreffgeschwindigkeit v_D zu

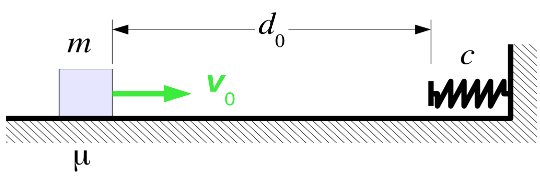
$$v_D=\sqrt{v_B^2+2\,g\,h}\,.$$

Zahlenwert:

$$v_D=\sqrt{6{,}112\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2+2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\cdot 0{,}2\,\mathrm{m}}=\underline{6{,}425\,\mathrm{m}/\mathrm{s}}$$

Aufgabe 2

a) Geschwindigkeit der Masse beim Auftreffen



Im Punkt *A* hat die Masse m den Abstand d_0 zur Feder und die Geschwindigkeit v_0. Im Punkt *B* trifft die Masse gerade auf die Feder auf.

Auf dem Weg von Punkt *A* nach Punkt *B* verrichtet nur die Reibungskraft Arbeit. Die Reibungsarbeit berechnet sich zu

$$W_{AB}^R=-\mu\,m\,g\,d_0\,.$$

Mit den kinetischen Energien $E_A^K=\frac{1}{2}m\,v_0^2$ und $E_B^K=\frac{1}{2}m\,v_1^2$ lautet der Arbeitssatz:

$$\frac{1}{2}m\left(v_1^2-v_0^2\right)=-\mu\, m\, g\, d_0$$

Daraus folgt für die gesuchte Geschwindigkeit:

$$v_1=\sqrt{v_0^2-2\mu\, g\, d_0}$$

Zahlenwert:

$$v_1=\sqrt{10^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2-2\cdot 0.3\cdot 9{,}81\,\mathrm{m}/s^2\cdot 5\,\mathrm{m}}=\underline{8{,}401\,\mathrm{m/s}}$$

b) <u>Maximale Einfederung</u>

Im Punkt *C* wird die maximale Einfederung erreicht. Auf dem Weg von Punkt *B* nach Punkt *C* verrichten die Reibungskraft und die Federkraft Arbeit.

Die Reibungsarbeit berechnet sich zu $W_{BC}^R=-\mu\, m\, g\, s_1$.

Für die Federarbeit gilt: $W_{BC}^F=-\frac{1}{2}c\, s_1^2$

Die Federarbeit ist negativ, da die Federkraft entgegen der Bewegungsrichtung gerichtet ist.

Im Punkt *C* ist die kinetische Energie null. Damit lautet der Arbeitssatz:

$$-\frac{1}{2}m\, v_1^2=-\mu\, m\, g\, s_1-\frac{1}{2}c\, s_1^2$$

Daraus folgt:

$$s_1^2+2\mu\frac{m}{c}g\, s_1-\frac{m}{c}v_1^2=0$$

Die quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$s_{1\,1/2}=-\mu\frac{m}{c}g\pm\sqrt{\left(\mu\frac{m}{c}g\right)^2+\frac{m}{c}v_1^2}\ .$$

Nur die positive Lösung ist physikalisch sinnvoll:

$$s_1=\frac{m\, g}{c}\left(\sqrt{\mu^2+\frac{c}{m}\left(\frac{v_1}{g}\right)^2}-\mu\right)$$

Zahlenwert:

$$s_1=\frac{10\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2}{10^4\,\mathrm{kg/s}^2}\left(\sqrt{0{,}3^2+\frac{10^4\,\mathrm{kg/s}^2}{10\,\mathrm{kg}}\left(\frac{8{,}401\,\mathrm{m/s}}{9{,}81\,\mathrm{m/s}^2}\right)^2}-0{,}3\right)=\underline{0{,}2627\,\mathrm{m}}$$

c) Geschwindigkeit nach Entspannen der Feder

Im Punkt *D* ist die Feder wieder entspannt. Auf dem Weg von Punkt *B* nach Punkt *D* verrichten die Reibungskraft und die Federkraft Arbeit. Der insgesamt zurückgelegte Weg ist $2 s_1$.

Die Reibungsarbeit berechnet sich daher zu $W_{BD}^R = -2 \mu m g s_1$.

Die Punkte *B* und *D* liegen an derselben Stelle. Daher gilt für die Federarbeit:

$$W_{BD}^F = 0$$

Mit der kinetischen Energie $E_D^K = \frac{1}{2} m v_2^2$ lautet der Arbeitssatz:

$$\frac{1}{2} m \left(v_2^2 - v_1^2 \right) = -2 \mu m g s_1$$

Daraus folgt: $v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4 \mu g s_1}$

Zahlenwert:

$$v_2 = \sqrt{8{,}401^2 \,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 - 4 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}81 \,\mathrm{m/s}^2 \cdot 0{,}2627 \,\mathrm{m}} = \underline{8{,}215 \,\mathrm{m/s}}$$

d) Abstand bei Ruhe

Im Punkt *E* kommt die Masse zur Ruhe. Auf dem Weg von Punkt *D* nach Punkt *E* verrichtet nur die Reibungskraft Arbeit. Für die Reibungsarbeit gilt:

$$W_{DE}^R = -\mu m g d_2$$

Im Punkt *E* ist die kinetische Energie null. Der Arbeitssatz lautet:

$$-\frac{1}{2} m v_2^2 = -\mu m g d_2$$

Daraus folgt: $d_2 = \frac{1}{2} \frac{v_2^2}{\mu g}$

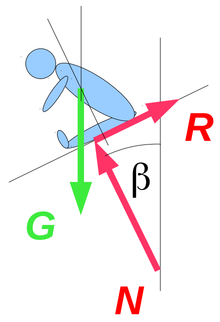
Zahlenwert:

$$d_2 = \frac{1}{2} \frac{8{,}215^2 \,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{0{,}3 \cdot 9{,}81 \,\mathrm{m/s}^2} = \underline{11{,}47 \,\mathrm{m}}$$

Aufgabe 3

a) Reibungskräfte

Kräfte am freigeschnittenen Kind im Abschnitt *AB*:



$$N_{AB}=G\cos(\beta)=mg\cos(\beta)$$

$$R_{AB}=\mu N_{AB}=\mu mg\cos(\beta)$$

Entsprechend gilt in den anderen Abschnitten:

$$R_{BC}=\mu m g\cos(\gamma),\quad R_{CD}=\mu m g\cos(\delta)$$

Zahlenwerte:

$$R_{AB}=0{,}2\cdot 30\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot\cos(30°)=\underline{50{,}97\,\text{N}}$$

$$R_{BC}=0{,}2\cdot 30\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot\cos(45°)=\underline{41{,}62\,\text{N}}$$

$$R_{CD}=0{,}2\cdot 30\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot\cos(20°)=\underline{55{,}31\,\text{N}}$$

b) Geschwindigkeiten

Auf das Kind wirkt die Gewichtskraft und die Reibungskraft. Die Gewichtskraft ist eine konservative Kraft und die Reibungskraft eine dissipative Kraft.

Das Nullniveau für die Lageenergie wird in Punkt *D* gelegt. Dann gilt für die Energien in den Punkten *A*, *B*, *C* und D:

	Kinetische Energie	Lageenergie
Punkt *A*	$E_A^K=0$	$E_A^G=m\,g\,h_A$
Punkt *B*	$E_B^K=\frac{1}{2}m\,v_B^2$	$E_B^G=m\,g\,h_B$
Punkt *C*	$E_C^K=\frac{1}{2}m\,v_C^2$	$E_C^G=m\,g\,h_C$
Punkt *D*	$E_D^K=\frac{1}{2}m\,v_D^2$	$E_D^G=0$

Für die Arbeit der Reibungskraft gilt:

$$W_{AB}^R=-R_{AB}\,s_{AB}=-R_{AB}\frac{h_A-h_B}{\sin(\beta)}$$

$$W_{BC}^R=-R_{BC}\,s_{BC}=-R_{BC}\frac{h_B-h_C}{\sin(\gamma)}$$

$$W_{CD}^R = -R_{CD}\, s_{CD} = -R_{CD}\, \frac{h_C}{\sin(\delta)}$$

Arbeitssatz für die Strecke *AB*:

$$\left(E_B^K + E_B^G\right) - \left(E_A^K + E_A^G\right) = W_{AB}^R$$

$$\frac{1}{2} m\, v_B^2 + m\, g\, h_B - m\, g\, h_A = -R_{AB}\, \frac{h_A - h_B}{\sin(\beta)} = -\mu\, m\, g\left(h_A - h_B\right)\cot(\beta)$$

$$\rightarrow \quad v_B = \sqrt{2\, g\left(h_A - h_B\right) - 2\, g\, \mu\left(h_A - h_B\right)\cot(\beta)} = \sqrt{2\, g\left(h_A - h_B\right)\left(1 - \mu\cot(\beta)\right)}$$

Zahlenwert: $v_B = \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\left(5\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m}\right)\left(1 - 0{,}2\cdot\cot(30°)\right)} = \underline{3{,}581\,\mathrm{m/s}}$

Arbeitssatz für die Strecke *BC*:

$$\left(E_C^K + E_C^G\right) - \left(E_B^K + E_B^G\right) = W_{BC}^R$$

$$\frac{1}{2} m\, v_C^2 + m\, g\, h_C - \left(\frac{1}{2} m\, v_B^2 + m\, g\, h_B\right) = -R_{BC}\, \frac{h_B - h_C}{\sin(\gamma)} = -\mu\, m\, g\left(h_B - h_C\right)\cot(\gamma)$$

$$\rightarrow \quad v_C = \sqrt{v_B^2 + 2\, g\left(h_B - h_C\right)\left(1 - \mu\cot(\gamma)\right)}$$

Zahlenwert:

$$v_C = \sqrt{3{,}581^2\,\mathrm{m^2/s^2} + 2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\left(4\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m}\right)\cdot\left(1 - 0{,}2\cdot\cot(45°)\right)} = \underline{7{,}740\,\mathrm{m/s}}$$

Arbeitssatz für die Strecke *CD*:

$$\left(E_D^K + E_D^G\right) - \left(E_C^K + E_C^G\right) = W_{CD}^R$$

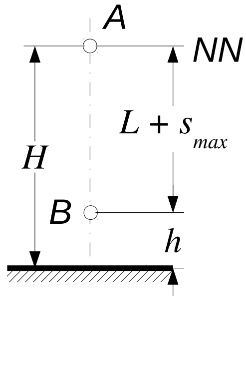
$$\frac{1}{2} m\, v_D^2 - \left(\frac{1}{2} m\, C^2 + m\, g\, h_C\right) = -R_{CD}\, \frac{h_C}{\sin(\delta)} = -\mu\, m\, g\, h_C \cot(\delta)$$

$$\rightarrow \quad v_D = \sqrt{v_C^2 + 2\, g\, h_C\left(1 - \mu\cot(\delta)\right)}$$

Zahlenwert:

$$v_D = \sqrt{7{,}740^2\,\mathrm{m^2/s^2} + 2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot\left(1 - 0{,}2\cdot\cot(20°)\right)} = \underline{8{,}292\,\mathrm{m/s}}$$

Aufgabe 4



a) <u>Seillänge</u>

Die Aufgabe wird mit dem Energieerhaltungssatz gelöst. Dabei wird das Nullniveau für die Lageenergie in den Absprungpunkt gelegt. Punkt *A* entspricht dem Absprung und Punkt *B* dem tiefsten Punkt. Wird die Verlängerung des Seils mit *s* bezeichnet, dann gilt für die aktuelle Länge

$l(s)$ des Seils:

$$l(s) = L + s$$

Energien:

	Lageenergie	Federenergie
Punkt *A*	$E_A^G = 0$	$E_A^F = 0$
Punkt *B*	$E_B^G = -m\,g\,(H - h)$	$E_B^F = \frac{1}{2} c\, s_{max}^2$

Die kinetische Energie ist in beiden Punkten null. Daher lautet der Energieerhaltungssatz:

$$E_B^G + E_B^F = 0 \;\rightarrow\; -m\,g\,(H-h) + \frac{1}{2} c\, s_{max}^2 = 0$$

Daraus folgt: $s_{max} = \sqrt{2 \frac{m\,g}{c}(H-h)}$

Die gesucht Seillänge berechnet sich aus der Bedingung $L + s_{max} = H - h$ zu

$$L = H - h - \sqrt{2 \frac{m\,g}{c}(H-h)}\,.$$

Zahlenwert:

$$L = 78\,\mathrm{m} - \sqrt{2 \cdot 78\,\mathrm{m} \cdot \frac{80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{50\,\mathrm{kg/s^2}}} = 78\,m - 49{,}48\,\mathrm{m} = \underline{28{,}52\,\mathrm{m}}$$

b) <u>Geschwindigkeit bei Beginn der Seildehnung</u>

In dem Augenblick, in dem das Seil beginnt, gedehnt zu werden, ist die Federenergie null. Der zurückgelegte Weg ist gleich der Länge des ungedehnten Seils. Wird dieser Punkt mit *C* bezeichnet, dann gilt für die Energien:

	Lageenergie	kinetische Energie
Punkt *A*	$E_A^G = 0$	$E_A^K = 0$
Punkt *C*	$E_C^G = -m\,g\,L$	$E_C^K = \frac{1}{2} m\, v_0^2$

Der Energieerhaltungssatz lautet:

$$E_C^G + E_C^K = 0 \;\rightarrow\; -m\,g\,L + \frac{1}{2} m\, v_0^2 = 0 \;\rightarrow\; v_0 = \sqrt{2\,g\,L}$$

Zahlenwert:

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 28{,}52\,\mathrm{m}} = \underline{23{,}66\,\mathrm{m/s}}$$

c) <u>Größte Verzögerung</u>

Zunächst wird der Zusammenhang zwischen Weg s und Geschwindigkeit $v(s)$ während des Abbremsens bestimmt. Punkt *D* ist ein beliebiger Punkt während des Abbremsens.

Für die Energien im Punkt *D* gilt:

- Lageenergie: $E_D^G = -m\,g\,(L+s)$
- Federenergie: $E_D^F = \frac{1}{2} c\, s^2$
- Kinetische Energie: $E_D^K = \frac{1}{2} m\, v^2(s)$

Der Energieerhaltungssatz lautet:

$$E_D^G + E_D^F + E_D^K = E_A^G + E_A^F + E_A^K = 0$$

$$\rightarrow \quad -m\,g\,(L+s) + \frac{1}{2} c\, s^2 + \frac{1}{2} m\, v^2(s) = 0 \quad \rightarrow \quad v^2(s) = 2\,g\,(L+s) - \frac{c}{m} s^2$$

Für die Beschleunigung gilt:

$$a(s) = v \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} v^2(s) = g - \frac{c}{m} s$$

Zum Verzögern muss die Beschleunigung negativ sein. Der betragsmäßig größte negative Wert tritt auf, wenn die maximale Auslenkung

$$s_{max} = H - h - L$$

erreicht ist.

Damit folgt für die größte Verzögerung:

$$a_{max} = \left| g - \frac{c}{m} (H - L - h) \right|$$

Zahlenwert:

$$a_{max} = \left| 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} - \frac{50\,\mathrm{kg/s^2}}{80\,\mathrm{kg}} \cdot (80\,\mathrm{m} - 28{,}52\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m}) \right| = 21{,}12\,\mathrm{m/s^2} = \underline{2{,}152\,\mathrm{g}}$$

Aufgabe 5

Ist Punkt *A* der Punkt, in dem der Körper losgelassen wird, und Punkt *B* der Punkt, in dem der Körper auf dem Erdboden auftrifft, so lautet der Arbeitssatz:

$$\left(E_B^K + E_B^G\right) - \left(E_A^K + E_A^G\right) = W_{AB}^D$$

Wird das Nullniveau für die Lageenergie in den Erdboden gelegt, so gilt für die Energien:

- Kinetische Energie: $E_A^K = 0,\ \ E_B^K = \frac{1}{2} m v^2$
- Lageenergie: $E_A^G = mg\,h\,,\ \ E_B^G = 0$

Damit folgt für die Arbeit der dissipativen Kräfte:

$$W_{AB}^D = \frac{1}{2} m v^2 - m\,g\,h = m\left(\frac{1}{2} v^2 - gh\right)$$

Zahlenwert:

$$W_{AB}^D = 5\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 15^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 - 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 20\,\mathrm{m}\right) = \underline{-418{,}5\,\mathrm{J}}$$

Aufgabe 6

a) Geschwindigkeit in Abhängigkeit von x

Die Aufgabe wird mit dem Energieerhaltungssatz gelöst. Dazu wird das Nullniveau für die Lageenergie in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt. Dann gilt für die Energien:

	Lageenergie	kinetische Energie
Punkt *A*	$E_A^G = m\,g\,H$	$E_A^K = 0$
Stelle x	$E_x^G = m\,g\,z(x) = m\,g\,H\left(1 - \frac{x}{L}\right)^3$	$E_x^K = \frac{1}{2} m\,v(x)^2$

Einsetzen in den Energieerhaltungssatz $E_x^G + E_x^K = E_A^G + E_A^K = 0$

ergibt:

$$m\,g\,H\left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 + \frac{1}{2} m\,v(x)^2 = m\,g\,H$$

Daraus folgt für die gesuchte Geschwindigkeit:

$$v(x) = \sqrt{2\,g\,H\left[1 - \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3\right]}$$

b) Geschwindigkeit im Punkt *B*

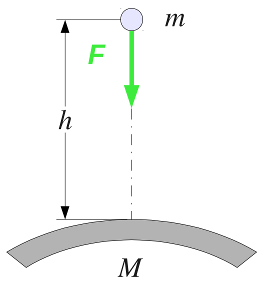
Im Punkt *B* ist $x = L$. Die Geschwindigkeit berechnet sich zu

$$v_B = v(L) = \sqrt{2\,g\,H}\ .$$

Zahlenwert: $v_B = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 5\,\mathrm{m}} = \underline{9{,}905\,\mathrm{m/s}}$

Aufgabe 7

a) Potenzielle Energie



Die potenzielle Energie einer konservativen Kraft ist die Arbeit, die die Kraft verrichtet, wenn der Körper in den Bezugspunkt verschoben wird. Im vorliegenden Fall entspricht das der Arbeit, die die Anziehungskraft verrichtet, wenn der Körper aus der Höhe h auf die Erdoberfläche verschoben wird.

Die Anziehungskraft ist stets zum Erdmittelpunkt hin gerichtet. Als Weg wird daher eine Gerade durch den Erdmittelpunkt gewählt. Dann sind Kraft und Wegelement stets parallel und gleich gerichtet.

Damit berechnet sich die potenzielle Energie zu

$$E^P(h) = \int_0^h F(s)\,ds = \gamma M m \int_0^h \frac{ds}{(R+h-s)^2} = \gamma M m \left[\frac{1}{R+h-s}\right]_{s=0}^{s=h}$$
$$= \gamma M m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \gamma M m \frac{h}{R(R+h)}.$$

Für die Höhe H ergibt sich der Zahlenwert

$$E^P(H) = 6{,}673 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kgs^2}} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot 500\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{1}{6371} - \frac{1}{16371}\right) \frac{1}{10^3\,\mathrm{m}}$$
$$= \underline{1{,}911 \cdot 10^7\,\mathrm{kJ}}.$$

b) Näherung für kleine Höhen

Für die potenzielle Energie gilt: $E^P(h) = \frac{\gamma M m}{R}\left(1 - \frac{1}{1+h/R}\right)$

Dieser Ausdruck wird bezüglich h/R in eine Taylorreihe um $h/R = 0$ entwickelt:

$$E^P(h) = E^P(0) + \frac{dE^P}{d(h/R)}(0)\frac{h}{R} + \frac{1}{2!}\frac{d^2E^P}{d(h/R)^2}(0)\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \ \ldots$$

Für $h/R \ll 1$ müssen nur die ersten beiden Glieder berücksichtigt werden.

Mit

$$E^P(0) = 0$$

und

$$\frac{dE^P}{d(h/R)} = \frac{\gamma M m}{R} \frac{1}{(1+h/R)^2}, \quad \frac{dE^P}{d(h/R)}(0) = \frac{\gamma M m}{R}$$

folgt:

$$\tilde{E}^P(h) = \frac{\gamma M m}{R} \frac{h}{R} = m \frac{\gamma M}{R^2} h = m g h, \quad h \ll R$$

c) <u>Erdbeschleunigung in Bodennähe</u>

Aus $\tilde{E}^P(h) = E^G(h) = m g h$ folgt für die Erdbeschleunigung g in Bodennähe:

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}$$

Zahlenwert:

$$g = \frac{6{,}673 \cdot 10^{-11} \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{\left(6371 \cdot 10^3\,\mathrm{m}\right)^2} = \underline{9{,}821\,\mathrm{m/s}^2}$$

<u>Anmerkung</u>

In dem allgemein verwendeten Wert von $9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ ist der Einfluss der Zentrifugalkraft bereits berücksichtigt. Dieser Wert gilt für eine geographische Breite von 50°. In Abhängigkeit von der geographischen Breite ϕ gilt in Meereshöhe:

$$g = \left(9{,}8063 - 0{,}0264 \cos(2\phi)\right) \mathrm{m/s}^2$$

Aufgabe 8

Der Energieerhaltungssatz lautet: $E^K(r_0) + E^P(r_0) = E^K(R) + E^P(R)$

Einsetzen der Ausdrücke für die Energien ergibt

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \gamma M m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{1}{2} m v_E^2 .$$

Daraus folgt: $v_E = \sqrt{v_0^2 + 2 \gamma M \left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r_0}\right)}$

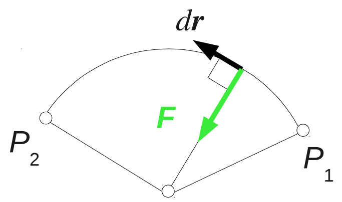
Zahlenwert:

$$v_E=\sqrt{\left(\frac{1000}{3,6}\right)^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}+2\cdot 6,670\cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}\cdot 5,974\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot\left(\frac{1}{6371}-\frac{1}{10000}\right)\frac{10^{-3}}{\mathrm{m}}}$$
$$=6743\,\mathrm{m/s}=\underline{24270\,\mathrm{km/h}}$$

Aufgabe 9

a) Arbeit entlang eines Kreisbogens um den Erdmittelpunkt

In jedem Punkt der Kreisbahn von P_1 nach P_2 steht die Schwerkraft senkrecht auf dem Wegelement $d\boldsymbol{r}$.

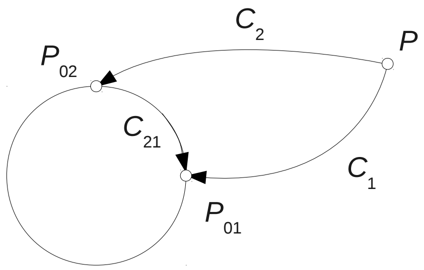


Daher gilt $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0$ und damit auch

$$\int_{P_1}^{P_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=0\,.$$

b) Erdoberfläche als Nullniveau

Seien P_{01} und P_{02} zwei verschiedene Bezugspunkte, die beide auf der Oberfläche der Erdkugel liegen. Die beiden Punkte sind durch einen Kreisbogen mit Radius R um den Erdmittelpunkt verbunden. Sei $E^P(P,\,P_{01})$ der Wert des Potenzials am Punkt P, wenn Punkt P_{01} als Bezugspunkt gewählt wird, und $E^P(P,\,P_{02})$ der Wert des Potentials, wenn P_{02} als Bezugspunkt gewählt wird.



Für das Potenzial $E^P(P,\,P_{01})$ gilt laut Definition:

$$E^P(P\,,P_{01})=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

Entsprechend gilt für das Potential $E^P(P,\,P_{02})$:

$$E^P(P\,,P_{02})=\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

Da bei einer konservativen Kraft das Arbeitsintegral unabhängig vom Weg ist, gilt aber auch:

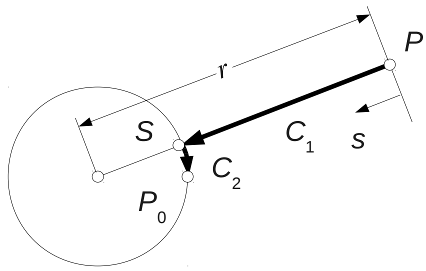
$$E^P(P\,,P_{01})=\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{C_{21}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=E^P(P\,,P_{02})+\int_{C_{21}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

Da der Weg C_{21} ein Kreisbogen um den Erdmittelpunkt ist, ist das Arbeitsintegral entlang dieses Weges nach Teilaufgabe a) null. Damit ist gezeigt:

$$E^P(P, P_{01}) = E^P(P, P_{02})$$

c) Berechnung des Potenzials

Der Wert des Potenzials am Punkte *P* kann über die Arbeit entlang eines beliebigen Weges vom Bezugspunkt *P* zum Punkt P_0 berechnet werden.



Der gewählte Weg besteht aus zwei Teilstücken:

1. Der Weg C_1 führt geradlinig vom Punkt *P* zum Punkt *S*, in dem die Gerade durch den Erdmittelpunkt und den Punkt *P* die Erdkugel schneidet. Für die Schwerkraft an der Stelle s gilt:

$$F(s) = \gamma \frac{M m}{(r-s)^2}$$

Die verrichtete Arbeit berechnet sich zu

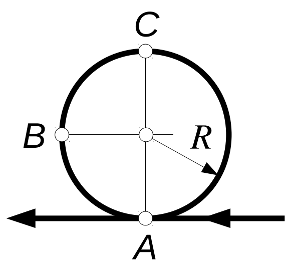
$$W_{PS} = \int_0^{r-R} \gamma \frac{M m}{(r-s)^2} ds = \gamma M m \left[\frac{1}{r-s} \right]_{s=0}^{s=r-R} = \gamma M m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

2. Der Weg C_2 führt vom Punkt *S* zum Bezugspunkt P_0. Die Arbeit entlang dieses Weges ist null.

Damit gilt für das Potenzial: $E^P(r) = W_{PS} = \gamma M m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$

Aufgabe 10

a) Differenz der Zentripetalbeschleunigungen



Für die Zentripetalbeschleunigungen gilt:

$$a_{nA} = \frac{v_A^2}{R}, \quad a_{nC} = \frac{v_C^2}{R} \quad \rightarrow \quad \Delta a_n = \frac{v_A^2 - v_C^2}{R}$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz kann mit dem Energieerhaltungssatz ermittelt werden. Wird das Nullniveau für die Lageenergie in Punkt *A* gelegt, dann gilt:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + 2 m g R$$

Daraus folgt: $v_A^2 - v_C^2 = 4 g R$

Damit gilt für die Differenz der Zentripetalbeschleunigungen: $\Delta a_n = 4g$

b) Geschwindigkeit im Punkt *A*

Aus der Forderung $a_{nC} = g$ folgt für Punkt *A*: $a_{nA} = a_{nC} + 4g = 5g$

Aus $v_A^2 = a_{nA} R$ folgt für die Geschwindigkeit: $v_A = \sqrt{5gR}$

Zahlenwert:

$$v_A = \sqrt{5 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 75\,\mathrm{m}} = 60{,}65\,\mathrm{m/s} = \underline{218{,}3\,\mathrm{km/h}}$$

c) Geschwindigkeit und Zentripetalbeschleunigung im Punkt *B*

Der Energieerhaltungssatz lautet:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g R \rightarrow v_B^2 = v_A^2 - 2gR = 5gR - 2gR = 3gR$$

Daraus folgt:

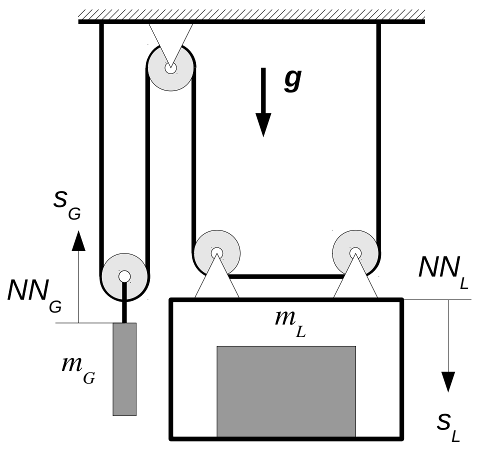
$$v_B = \sqrt{3gR}, \quad a_{nB} = \frac{v_B^2}{R} = 3g$$

Zahlenwert:

$$v_B = \sqrt{3 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 75\,\mathrm{m}} = 46{,}98\,\mathrm{m/s} = \underline{169{,}1\,\mathrm{km/h}}$$

Aufgabe 11

a) Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Weg



Als Bezugsniveau für die Lageenergie werden die jeweiligen Ruhelagen gewählt.

Der vom Förderkorb zurückgelegte Weg s_L wird ab der Ruhelage positiv nach unten gemessen.

Der vom Gegengewicht zurückgelegte Weg s_G wird ab der Ruhelage positiv nach oben gemessen.

Zwischen Förderkorb und Gegengewicht besteht die kinematische Bindung

$$s_L = s_G = s \; .$$

Da das System anfangs in Ruhe ist, lautet der Energieerhaltungssatz:

$$E^K(s)+E^G(s)=E_A^G$$

Dabei ist $E^K(s)$ die kinetische Energie und $E^G(s)$ die Lageenergie, wenn das System die Strecke s zurückgelegt hat. $E^G{}_A$ ist die Lageenergie im Ausgangszustand.

Lageenergie im Ausgangszustand:

$$E_A^G=0$$

Lageenergie nach Zurücklegen des Weges s:

$$E^G(s)=m_G\,g\,s_G-m_L\,g\,s_L=(m_G-m_L)\,g\,s$$

Kinetische Energie nach Zurücklegen des Weges s:

$$E^K(s)=\frac{1}{2}(m_G+m_L)\,v^2(s)$$

Damit lautet der Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2}(m_G+m_L)\,v^2(s)+(m_G-m_L)\,g\,s=0$

Daraus folgt: $v^2(s)=\frac{2\,g}{m_L+m_G}(m_L-m_G)\,s$

Für $m_L > m_G$ ist $s > 0$, d. h. der Förderkorb bewegt sich nach unten. Dann ist die Geschwindigkeit positiv:

$$v(s)=\sqrt{2\frac{m_L-m_G}{m_L+m_G}g\,s}$$

Für $m_L < m_G$ ist $s < 0$, d. h. der Förderkorb bewegt sich nach oben. Dann ist die Geschwindigkeit negativ:

$$v(s)=-\sqrt{2\frac{m_L-m_G}{m_L+m_G}g\,s}$$

b) Geschwindigkeit nach Zurücklegen des Weges s_1

Mit den gegebenen Zahlenwerten für die Massen ergibt sich eine positive Geschwindigkeit:

$$v(s_1)=\sqrt{2\,\frac{5\,\mathrm{t}-1\,\mathrm{t}}{5\,\mathrm{t}+1\,\mathrm{t}}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 5\,\mathrm{m}}=\underline{8{,}087\,\mathrm{m/s}}$$

c) Beschleunigung

Wenn die Geschwindigkeit in Abhängigkeit des Orts gegeben ist, lässt sich die Beschleunigung aus

$$a(s)=v(s)\frac{dv}{ds}(s)=\frac{1}{2}\frac{d\left(v^2(s)\right)}{ds}$$

berechnen. Daraus folgt:

$$a(s)=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(2\frac{m_L-m_G}{m_L+m_G}g\,s\right)=\frac{m_L-m_G}{m_L+m_G}g$$

Die Beschleunigung hat den konstanten Zahlenwert:

$$a=\frac{5\,\mathrm{t}-1\,\mathrm{t}}{5\,\mathrm{t}+1\,\mathrm{t}}g=\underline{0{,}6667\,\mathrm{g}=6{,}540\,\mathrm{m/s^2}}$$

Aufgabe 12

a) Geschwindigkeiten

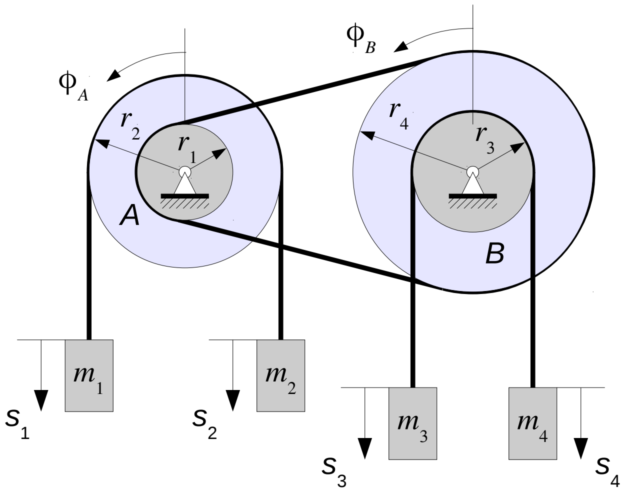
Energien

Die einzige äußere Kraft, die am System angreift, ist die Gewichtskraft.

Als Bezugsniveau für die Lageenergie werden die jeweiligen Ruhelagen gewählt. Dann gilt für die Energien:

		Zustand *A*: Ruhelage	Zustand *B*: Ausgelenkte Lage
Kinetische Energie	Masse 1	$E^G_{A1}=0$	$E^G_{B1}=-m_1 g\, s_1$
	Masse 2	$E^G_{A2}=0$	$E^G_{B2}=-m_2 g\, s_2$
	Masse 3	$E^G_{A3}=0$	$E^G_{B3}=-m_2 g\, s_2$
	Masse 4	$E^G_{A4}=0$	$E^G_{B4}=-m_2 g\, s_2$
Lage-energie	Masse 1	$E^K_{A1}=0$	$E^K_{B1}=\frac{1}{2}m_1 v_1^2$
	Masse 2	$E^K_{A2}=0$	$E^K_{B2}=\frac{1}{2}m_2 v_2^2$
	Masse 3	$E^K_{A3}=0$	$E^K_{B1}=\frac{1}{2}m_3 v_3^2$
	Masse 4	$E^K_{A4}=0$	$E^K_{B1}=\frac{1}{2}m_4 v_4^2$

Kinematische Beziehungen



Als Hilfsgrößen werden die Winkel ϕ_A und ϕ_B eingeführt, die die Drehung der Rollen beschreiben.

Es gilt:

$$s_2 = -s_1$$

$$s_1 = r_2 \phi_A \quad \rightarrow \quad \phi_A = \frac{s_1}{r_2}$$

$$r_1 \phi_A = r_4 \phi_B$$

$$\rightarrow \quad \phi_B = \frac{r_1}{r_4}\phi_A = \frac{r_1}{r_2 r_4} s_1$$

$$s_3 = r_3 \phi_B = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} s_1 \,,$$

$$s_4 = -s_3 = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} s_1$$

Für die Geschwindigkeiten folgt:

$$v_2 = -v_1 \,, \quad v_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} v_1 \,, \quad v_4 = -v_3 = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} v_1$$

Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + m_4 v_4^2\right) - g\left(m_1 s_1 + m_2 s_2 + m_3 s_3 + m_4 s_4\right) = 0$$

Mit den kinematischen Beziehungen folgt:

$$\frac{1}{2}\left[m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4)\right] v_1^2 = g\left[m_1 - m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)(m_3 - m_4)\right] s_1$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit v_1:

$$v_1(s_1) = \pm\sqrt{2 g s_1 \frac{m_1 - m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)(m_3 - m_4)}{m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4)}}$$

Die übrigen Geschwindigkeiten können mit den kinematischen Beziehungen ermittelt werden:

$$v_2(s_2) = -v_1(s_1) = \mp\sqrt{-2\,g\,s_2 \frac{m_1 - m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)(m_3 - m_4)}{m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4)}}$$

$$v_3(s_3) = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} v_1(s_1) = \pm\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\sqrt{2\,\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\,g\,s_3 \frac{m_1 - m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)(m_3 - m_4)}{m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4)}}$$

$$v_4(s_4) = -v_3(s_3) = \mp\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\sqrt{-2\,\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\,g\,s_3 \frac{m_1 - m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)(m_3 - m_4)}{m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4)}}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt:

$$\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = \frac{1}{4}\ ,\quad \frac{m_1 - m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)(m_3 - m_4)}{m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4)} = \frac{60 - 24 + (36 - 60)/4}{60 + 24 + (36 + 60)/4^2} = \frac{1}{3} > 0$$

Damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, muss s_1 positiv sein. Die Masse m_1 bewegt sich daher nach unten, und ihre Geschwindigkeit v_1 ist positiv:

$$v_1(s_1) = \sqrt{\frac{2}{3}\,g\,s_1}$$

Die Auslenkung s_2 ist negativ, und für die Geschwindigkeit v_2 gilt:

$$v_2(s_2) = -\sqrt{-\frac{2}{3}\,g\,s_2}$$

Entsprechend folgt für die Geschwindigkeiten v_3 und v_4:

$$v_3(s_3) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{3}\,g\,s_3},\quad v_4(s_4) = -\frac{1}{4}\sqrt{-\frac{8}{3}\,g\,s_4}$$

b) <u>Beschleunigungen</u>

$$a_1 = \frac{1}{2}\frac{dv_1^2}{s_1} = \frac{1}{3}\,g\ ,\quad a_2 = \frac{1}{2}\frac{dv_2^2}{s_2} = -\frac{1}{3}\,g$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\frac{dv_3^2}{s_3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\frac{d}{ds_3}\left(\frac{8}{3}g\,s_3\right) = \frac{1}{12}g$$

$$a_4 = \frac{1}{2}\frac{dv_4^2}{s_4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\frac{d}{ds_4}\left(-\frac{8}{3}g\,s_4\right) = -\frac{1}{12}g$$

Aufgabe 13

Wenn der PKW mit konstanter Geschwindigkeit fährt, ist die Antriebskraft F im Gleichgewicht mit den Widerstandskräften:

$$F = R_R + R_L = \mu_r m\,g + \frac{1}{2}c_W A\,\rho\,v^2$$

Die Antriebsleistung berechnet sich zu

$$P = F\,v = \mu_r m\,g\,v + \frac{1}{2}c_W A\,\rho\,v^3 .$$

Zahlenwerte:

$$\mu_r m\,g = 0{,}014\cdot 1500\,\text{kg}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = 206{,}0\,\text{N}$$

$$\frac{1}{2}c_W A\,\rho = \frac{1}{2}\cdot 0{,}26\cdot 2{,}2\,\text{m}^2\cdot 1{,}21\,\text{kg/m}^3 = 0{,}3461\,\text{kg/m}$$

v	$P_R = \mu_r m\,g\,v$	$P_L = \frac{1}{2}c_W A\,\rho\,v^3$	$P = P_R + P_L$
80	4,578	3,798	8,376
120	6,867	12,817	19,684
150	8,584	25,033	33,617
km/h	kW	kW	kW

Aufgabe 14

Wenn der PKW mit konstanter Geschwindigkeit fährt, kompensiert die Nutzleistung

$$P_N = \eta P$$

die Summe der Verlustleistungen der Gewichtskraft, des Rollwiderstands und des Luftwiderstands.

Leistung der Gewichtskraft:

$$\dot{W}^G = -m\,g\,\dot{z} = -m\,g\,v\sin(\alpha)$$

Leistung des Rollwiderstands:

$$\dot{W}^R = -R_R v = -\mu_r N v = -\mu_r m g v \cos(\alpha)$$

Leistung des Luftwiderstands:

$$\dot{W}^L = -R_L v = -\frac{1}{2} c_W \rho A v^3$$

Aus $P_N + \dot{W}^G + \dot{W}^R + \dot{W}_L = 0$ folgt:

$$\eta P = m g \left(\sin(\alpha) + \mu_r \cos(\alpha) \right) v + \frac{1}{2} c_W \rho A v^3$$

Für eine Steigung von 3 % gilt $\tan(\alpha) = 0{,}03$. Damit und mit den übrigen angegebenen Zahlenwerten lautet die zu lösende Gleichung:

$$0{,}3461 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \cdot v^3 + 647{,}2 \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} \cdot v - 80000 \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^3} = 0$$

Sie hat die Lösung $v = 51{,}32\,\mathrm{m/s} = \underline{185\,\mathrm{km/h}}$.

Aufgabe 15

Die Leistung der Gewichtskraft muss gleich der Leistung der Luftwiderstandskraft sein:

$$m g \frac{h}{t} = R_L v$$

Daraus folgt: $R_L = \dfrac{m g h}{v t}$

Zahlenwert: $R_L = \dfrac{280\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 220\,\mathrm{m}}{(100/3{,}6)\,\mathrm{m/s} \cdot 5 \cdot 60\,\mathrm{s}} = \underline{72{,}52\,\mathrm{N}}$

Aufgabe 16

Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist gleich der vom Motor zugeführten Leistung:

$$P_0 = \dot{E}^K$$

Da die kinetische Energie am Anfang null ist, folgt daraus durch Integration:

$$P_0 t = E^K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \rightarrow \quad v(t) = \sqrt{\frac{2 P_0}{m} t}$$

Ableiten nach der Zeit führt auf die Beschleunigung:

$$a(t)=\dot{v}(t)=\sqrt{\frac{2P_0}{m}}\frac{1}{2\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{P_0}{2mt}}$$

Die Geschwindigkeit nimmt ständig zu, während die Beschleunigung asymptotisch gegen null geht.

Aufgabe 17

Die Nutzleistung des Motors muss gleich der Leistung der Luftwiderstandskraft zuzüglich der zeitlichen Änderung der Lageenergie des Flugszeugs sein:

$$P_N=R_L v+m g v_S=m g\left(0{,}07 v+v_S\right)$$

Zahlenwert:

$$v=140\,\mathrm{km/h}=\frac{140\,\mathrm{km/h}}{3{,}6(\mathrm{km\,s})/(\mathrm{m\,h})}=38{,}89\,\mathrm{m/s}$$

$$P_N=900\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\left(0{,}07\cdot 38{,}89\,\mathrm{m/s}+3\,\mathrm{m/s}\right)=50520\,\mathrm{W}=\underline{50{,}52\,\mathrm{kW}}$$