2.3 Impuls und Drall

Lösungen

Aufgabe 1

a) Geschwindigkeit

Für die Wurfweite gilt: $d=\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$

Daraus folgt: $v_0=\sqrt{\frac{d\,g}{\sin(2\alpha)}}$

Zahlenwert: $v_0=\sqrt{\frac{15\,\mathrm{m}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{\sin(60°)}}=\underline{13{,}04\,\mathrm{m/s}}$

b) Kraftstoß

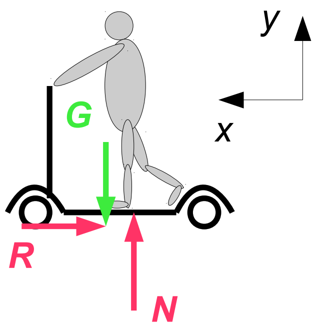
Vor dem Kraftstoß ist der Ball in Ruhe. Damit folgt aus dem integrierten Impulssatz:

$$\hat{F}=m\,v_0$$

Zahlenwert: $\hat{F}=0{,}2\,\mathrm{kg}\cdot 13{,}04\,\mathrm{m}/s=\underline{2{,}607\,\mathrm{Ns}}$

Aufgabe 2

a) Fahrt in der Ebene



Während des Rollens wirken die Gewichtskraft G, die Normalkraft N und die Rollreibungskraft R.

Kräftegleichgewicht in y-Richtung:

$$-G+N=0 \rightarrow N=G=(m_K+m_R)\,g$$

Rollreibungskraft:

$$R=\mu_R N=\mu_R(m_K+m_R)\,g$$

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Rollens ist v_1. Aus dem integrierten Impulssatz in x-Richtung folgt für die Geschwindigkeit v_2 am Ende des Rollens:

$$\left(m_K+m_R\right)\left(v_2-v_1\right)=-R\,\Delta t=-\mu_R\left(m_K+m_R\right)g\,\Delta t$$

Daraus folgt:

$$v_2=v_1-\mu_R\,g\,\Delta t$$

Damit die mittlere Geschwindigkeit konstant bleibt, muss nach dem Abstoßen wieder die Geschwindigkeit v_1 erreicht werden. Aus dem integrierten Impulssatz in x-Richtung folgt daher für den nötigen Kraftstoß:

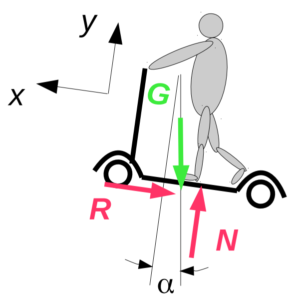
$$\hat{F}=\left(m_K+m_R\right)\left(v_1-v_2\right)=\left(m_K+m_R\right)\mu_R\,g\,\Delta t$$

Zahlenwert:

$$\hat{F}=\left(25+2\right)\text{kg}\cdot 0{,}1\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 3\,\text{s}=\underline{79{,}46\,\text{Ns}}$$

b) <u>Fahrt mit Steigung</u>

Während des Rollens wirken die Gewichtskraft G, die Normalkraft N und die Rollreibungskraft R.



Kräftegleichgewicht in y-Richtung:

$$-G\cos\left(\alpha\right)+N=0$$
$$\rightarrow\quad N=G\cos\left(\alpha\right)=\left(m_K+m_R\right)g\cos\left(\alpha\right)$$

Rollreibungskraft:

$$R=\mu_R\,N=\mu_R\left(m_K+m_R\right)g\cos\left(\alpha\right)$$

Der integrierte Impulssatz in x-Richtung liefert wieder einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v_1 zu Beginn des Rollens und der Geschwindigkeit v_2 am Ende des Rollens:

$$\left(m_K+m_R\right)\left(v_2-v_1\right)=-\left(\mu_R\left(m_K+m_R\right)g\cos\left(\alpha\right)+\left(m_K+m_R\right)g\sin\left(\alpha\right)\right)\Delta t$$

Daraus folgt:

$$v_2=v_1-\left(\mu_R\cos\left(\alpha\right)+\sin\left(\alpha\right)\right)g\,\Delta t$$

Der Kraftstoß beim Abstoßen muss so groß sein, dass die Geschwindigkeit nach dem Abstoßen wieder v_1 ist. Damit folgt aus dem integrierten Impulssatz in x-Richtung:

$$\hat{F}=\left(m_K+m_R\right)\left(v_1-v_2\right)=\left(m_K+m_R\right)\left(\mu_R\cos\left(\alpha\right)+\sin\left(\alpha\right)\right)g\,\Delta t$$

Die Steigung beträgt 5 %, d. h. $\tan\left(\alpha\right)=0{,}05$. Daraus folgt:

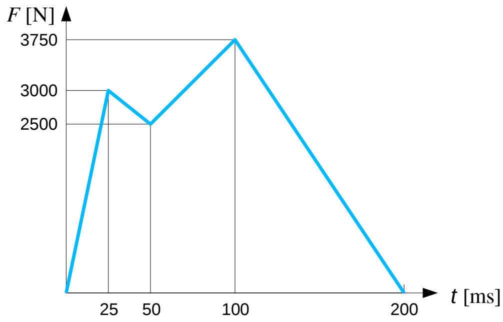
$$\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}=\frac{1}{\sqrt{1+0{,}05^2}}=0{,}9988\ ,$$
$$\sin(\alpha)=\cos(\alpha)\tan(\alpha)=0{,}9988\cdot 0{,}05=0{,}04994$$

Damit ergibt sich folgender Zahlenwert für den Kraftstoß:

$$\hat{F}=27\,\mathrm{kg}\cdot(0{,}1\cdot 0{,}9988+0{,}04994)\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 3\,\mathrm{s}=\underline{119{,}0\,\mathrm{Ns}}$$

Aufgabe 3

Der Kraftstoß berechnet sich aus $\hat{F}=\int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt$. Das Integral entspricht der Fläche unter dem *F*-*t*-Diagramm. Es berechnet sich zu



$$\hat{F}=\frac{1}{2}[3000\cdot 25+(2500+3000)\cdot 25+(2500+3750)\cdot 50+3750\cdot 100]\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Ns}=\underline{450\,\mathrm{Ns}}.$$

Aufgabe 4

a) <u>Strahlgeschwindigkeit</u>

Mit dem Massendurchsatz b gilt für die Schubkraft: $S=c_S b$

Daraus folgt: $c_S=\frac{S}{b}$

Wird der Massendurchsatz als konstant angenommen, so gilt

$$b=\frac{m_T}{t_B}.$$

Dabei ist m_T die Masse des Sprengstoffs und t_B die Brenndauer.

Zahlenwert:

$$c_S=\frac{4\cdot 10^3\,\mathrm{kgm/s^2}\cdot 24\,\mathrm{s}}{24\cdot 5\,\mathrm{kg}}=\underline{800\,\mathrm{m/s}}$$

b) <u>Maximal erreichbare Geschwindigkeit</u>

Für die Geschwindigkeit am Ende der Brenndauer gilt:

$$v_E = c_S \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right)$$

Dabei ist m_0 die Masse am Anfang und m_E die Masse bei Brennschluss.

Mit

$$m_0 = 560\,\mathrm{kg} + 80\,\mathrm{kg} + 24 \cdot 5\,\mathrm{kg} = 760\,\mathrm{kg}$$

und

$$m_E = 560\,\mathrm{kg} + 80\,\mathrm{kg} = 640\,\mathrm{kg}$$

ergibt sich:

$$v_E = 800\,\mathrm{m/s} \cdot \ln\left(\frac{760}{640}\right) = 137{,}5\,\mathrm{m/s} = \underline{495\,\mathrm{km/h}}$$

Aufgabe 5

a) <u>Schubkraft der 1. Stufe</u>

Der Massenstrom berechnet sich zu

$$b = \frac{2000\,\mathrm{t}}{150\,\mathrm{s}} = 13{,}33\,\mathrm{t/s}\ .$$

Damit folgt für die Schubkraft:

$$S = b\,c_S = 13{,}33\,\mathrm{t/s} \cdot 2500\,\mathrm{m/s} = 33330\,\mathrm{kN}$$

b) <u>Gesetze</u>

Auf die Rakete wirkt die Schubkraft nach oben und die Gewichtskraft nach unten. Aus

$$\sum F_x = m\,a_x \ :\ m(t)\,a(t) = S - m(t)\,g$$

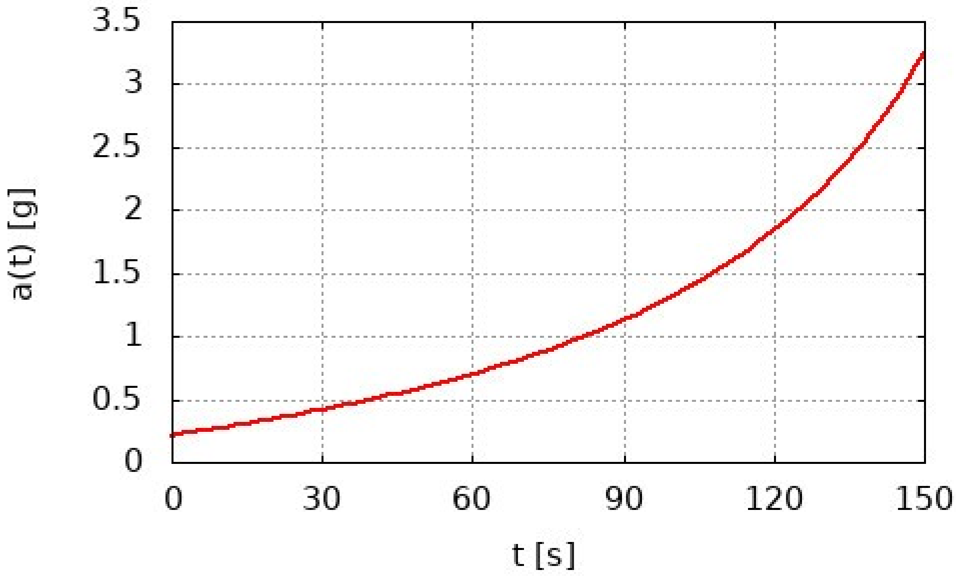
folgt für die Beschleunigung:

$$a(t) = \frac{S}{m(t)} - g\ .$$

Mit der Startmasse m_0 berechnet sich die Masse $m(t)$ zu

$$m(t) = m_0 - b\,t\ .$$

Damit gilt: $a(t) = \dfrac{S}{m_0 - b\,t} - g$

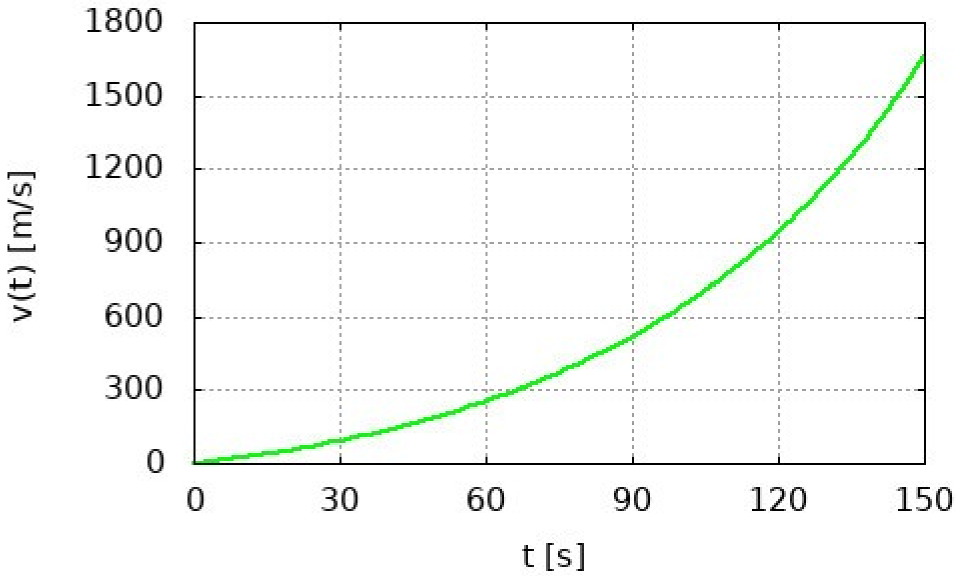


Für die Geschwindigkeit gilt: $v(t)=\int_0^t a(\bar{t})\,d\bar{t}=S\int_0^t \frac{d\bar{t}}{m(\bar{t})}-g\,t$

Mit der Substitution $dm=-b\,d\bar{t}$ folgt:

$$\int_0^t \frac{d\bar{t}}{m(\bar{t})}=-\frac{1}{b}\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dm}{m}=-\frac{1}{b}\left[\ln(m)\right]_{m=m_0}^{m=m(t)}=\frac{1}{b}\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

Damit gilt: $v(t)=\frac{S}{b}\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)-g\,t=c_S\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)-g\,t$



Eine weitere Integration ergibt den seit dem Start zurückgelegten Weg:

$$s(t)=\int_0^t v(\bar{t})\,d\bar{t}=c_S\int_0^t \ln\left(\frac{m_0}{m(\bar{t})}\right)d\bar{t}-g\int_0^t \bar{t}\,d\bar{t}$$

Mit der Substitution $dm=-b\,d\bar{t}$ folgt für das erste Integral:

$$\int_0^t \ln\left(\frac{m_0}{m(\bar{t})}\right)d\bar{t}=-\frac{1}{b}\int_{m_0}^{m(t)} \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)dm=\frac{1}{b}\int_{m_0}^{m(t)} \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)dm$$

Die weitere Substitution $dm=m_0\frac{dm}{m_0}=m_0\,d\left(\frac{m}{m_0}\right)$ führt auf

$$\frac{1}{b}\int_{m_0}^{m(t)} \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)dm=\frac{m_0}{b}\int_1^{m(t)/m_0} \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)d\left(\frac{m}{m_0}\right)=\frac{m_0}{b}\left[\frac{m}{m_0}\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)-\frac{m}{m_0}\right]_{m/m_0=1}^{m/m_0=m(t)/m_0}$$

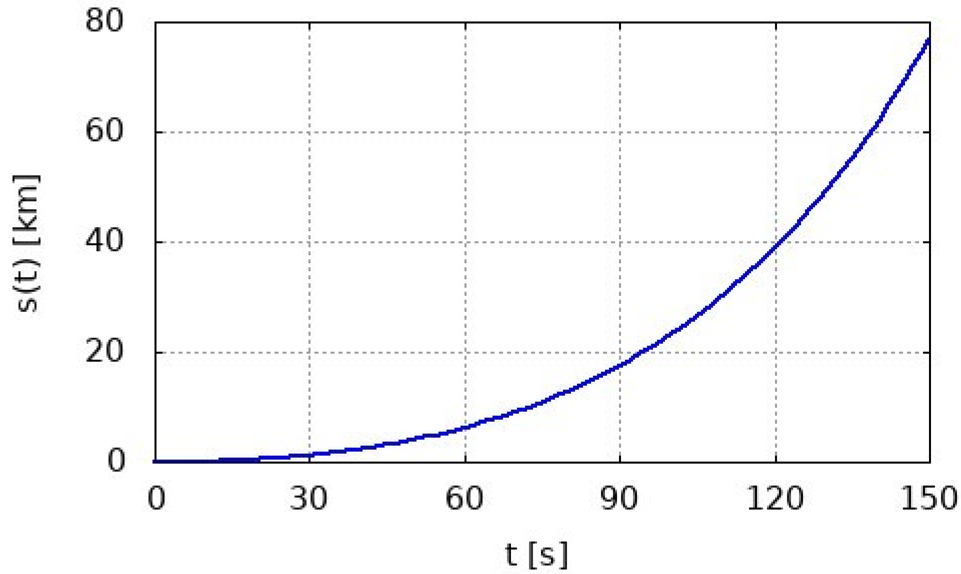
$$=\frac{m_0}{b}\left(\frac{m(t)}{m_0}\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)-\frac{m(t)}{m_0}+1\right)\ .$$

Das zweite Integral berechnet sich zu

$$\int_0^t \bar{t}\,d\bar{t}=\frac{1}{2}t^2.$$

Damit gilt:

$$s(t)=c_S\frac{m_0}{b}\left(\frac{m(t)}{m_0}\ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right)-\frac{m(t)}{m_0}+1\right)-\frac{1}{2}g\,t^2$$



c) Werte nach $10\,\mathrm{s}$

Masse:

$$m(10\,\mathrm{s}) = 2800\,\mathrm{t} - 13{,}33\,\mathrm{t/s}\cdot 10\,\mathrm{s} = 2667\,\mathrm{t}$$

Beschleunigung:

$$a(10\,\mathrm{s}) = \frac{33330\cdot 10^3\,\mathrm{N}}{2667\cdot 10^3\,\mathrm{kg}} - 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} = \underline{2{,}687\,\mathrm{m/s^2}}$$

Geschwindigkeit:

$$v(10\,\mathrm{s}) = 2500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\ln\left(\frac{2800}{2667}\right) - 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot 10\,\mathrm{s} = \underline{23{,}56\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Ort:

$$\frac{m(10\,\mathrm{s})}{m_0} = \frac{2667}{2800} = 0{,}9525$$

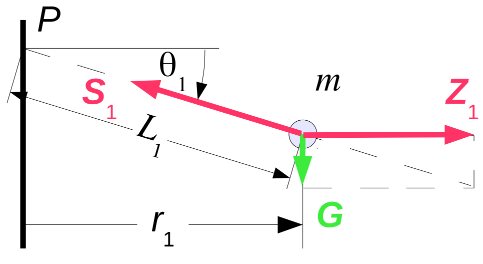
$$s(10\,\mathrm{s}) = 2500\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{2800\,\mathrm{t}}{13{,}33\,\mathrm{t/s}}\cdot\big(0{,}9525\cdot\ln(0{,}9525) - 0{,}9525 + 1\big) - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot 10^2\,\mathrm{s^2}$$
$$= \underline{111{,}5\,\mathrm{m}}$$

Aufgabe 6

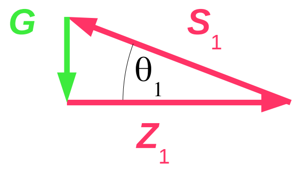
a) Seillänge L_1

An der freigeschnittenen Masse greifen die Seilkraft S_1, die Gewichtskraft G und die Fliehkraft Z_1 an.

Lageplan:



Kräfteplan:



Der Kräfteplan zeigt:

$$\tan(\theta_1)=\frac{G}{Z_1}\ ,\ \ S_1=\sqrt{G^2+Z_1^2}$$

Mit $G=mg$ und $Z_1=m\frac{v_1^2}{r_1}=m\frac{v_1^2}{L_1\cos(\theta_1)}$ folgt:

$$\tan(\theta_1)=\frac{g}{v_1^2}L_1\cos(\theta_1)\ \rightarrow\ \sin(\theta_1)=\frac{g\,L_1}{v_1^2}\cos^2(\theta_1)=\frac{g\,L_1}{v_1^2}\left(1-\sin^2(\theta_1)\right)$$

$$\sin^2(\theta_1)+\frac{v_1^2}{g\,L_1}\sin(\theta_1)-1=0$$

$$\rightarrow\ \sin(\theta_1)=-\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g\,L_1}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{v_1^2}{g\,L_1}\right)^2+1}$$

Die zweite Lösung scheidet aus, da der Wert des Sinus zwischen -1 und 1 liegen muss.

Zahlenwert:

$$\sin(\theta_1)=-\frac{1}{2}\frac{5^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{9{,}81\,\mathrm{m/s}^2\cdot 1\,\mathrm{m}}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{5^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{9{,}81\,\mathrm{m/s}^2\cdot 1\,\mathrm{m}}\right)^2+1}=0{,}3455$$

$$\rightarrow\ \theta_1=\underline{20{,}21\,°}$$

Der Radius r_1 berechnet sich zu

$$r_1=L_1\cos(\theta_1)=1\,\mathrm{m}\cdot\cos(20{,}21\,°)=\underline{0{,}9384\,\mathrm{m}}\ .$$

Für die Seilkraft gilt:

$$S_1=m\sqrt{g^2+\frac{v_1^4}{r_1^2}}=1\,kg\sqrt{9{,}81^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}+\frac{5^4\,\mathrm{m}^4/\mathrm{s}^4}{0{,}9384^2\,\mathrm{m}^2}}=\underline{28{,}39\,\mathrm{N}}$$

Schließlich berechnet sich die Winkelgeschwindigkeit zu

$$\omega_1=\frac{v_1}{r_1}=\frac{5\,\mathrm{m/s}}{0{,}9384\,\mathrm{m}}=\underline{5{,}328\,\mathrm{s}^{-1}}\ .$$

b) <u>Seillänge L_2</u>

Die Wirkungslinie der Kraft, die zur Verkürzung des Seils nötig ist, geht durch die Drehachse. Ihr Moment um die Drehachse ist daher null. Damit bleibt der Drall der Masse um die Drehachse konstant:

$$m r_2 v_2 = m r_1 v_1 \;\rightarrow\; r_2 v_2 = r_1 v_1$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit

$$v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2}$$

und für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = \frac{v_2}{r_2} = v_1 \frac{r_1}{r_2^2} .$$

Für die Zentrifugalkraft Z_2 gilt:

$$Z_2 = m \frac{v_2^2}{r_2} = m \frac{(v_2 r_2)^2}{r_2^3} = m \frac{(v_1 r_1)^2}{r_2^3}$$

Daraus folgt für den Winkel θ_2:

$$\tan(\theta_2) = \frac{G}{Z_2} = \frac{g r_2^3}{(v_1 r_1)^2}$$

Aus $L_2 \cos(\theta_2) = r_2$

folgt:

$$L_2 = \frac{r_2}{\cos(\theta_2)} = r_2 \sqrt{1 + \tan^2(\theta_2)} = r_2 \sqrt{1 + \frac{(g r_2^3)^2}{(v_1 r_1)^4}} = \frac{r_2}{(v_1 r_1)^2} \sqrt{(v_1 r_1)^4 + (g r_2^3)^2}$$

Die Seilkraft berechnet sich wie oben zu

$$S_2 = m \sqrt{g^2 + \left(\frac{v_2^2}{r_2}\right)^2} = m \sqrt{g^2 + \left(v_1^2 \frac{r_1^2}{r_2^3}\right)^2} .$$

Zahlenwerte:

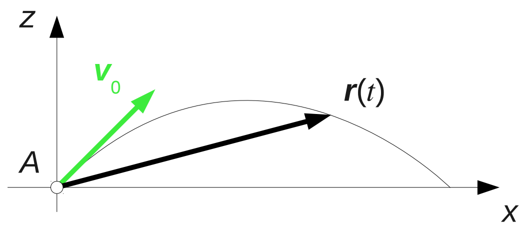
$$v_2 = 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{0{,}9384\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m}} = \underline{9{,}384\,\mathrm{m/s}} , \quad \omega_2 = 5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{0{,}9384\,\mathrm{m}}{(0{,}5\,\mathrm{m})^2} = \underline{18{,}77\,\mathrm{s}^{-1}}$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}5^3\,\mathrm{m^3}}{(5\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}9384\,\mathrm{m})^2} = 0{,}05570 \;\rightarrow\; \theta_2 = \underline{3{,}188\,°}$$

$$L_2 = \frac{0{,}5\,\mathrm{m}}{(5\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}9384\,\mathrm{m})^2} \sqrt{(5\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}9384\,\mathrm{m})^4 + (9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}5^3\,\mathrm{m^3})^2} = \underline{0{,}5008\,\mathrm{m}}$$

$$S_2 = 1\,\text{kg}\cdot\sqrt{9{,}81\,\text{m}^2/\text{s}^4 + \left(5^2\,\text{m}^2/\text{s}^2\cdot\frac{0{,}9384^2\,\text{m}^2}{0{,}5^3\,\text{m}^3}\right)^2} = \underline{176{,}4\,\text{N}}$$

Aufgabe 7



Im eingezeichneten Koordinatensystem lautet die vektorielle Form der Flugbahn:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v_0}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2\,\boldsymbol{e}_z$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{v_0} - g\,t\,\boldsymbol{e}_z$$

Für den Drall bezüglich Punkt A gilt:

$$\boldsymbol{L}^A(t) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} = m\left(\boldsymbol{v_0}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2\,\boldsymbol{e}_z\right)\times\left(\boldsymbol{v_0} - g\,t\,\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$= m\left(-\frac{1}{2}g\,t^2\,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{v_0} - g\,t^2\,\boldsymbol{v_0}\times\boldsymbol{e}_z\right) = \frac{1}{2}m\,g\,t^2\,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{v_0}$$

Mit

$$\boldsymbol{v_0} = v_0\left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_x + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{e}_z\right)$$

folgt

$$\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{v_0} = v_0\,\boldsymbol{e}_z\times\left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_x + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{e}_z\right) = v_0\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x = v_0\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_y\,.$$

Für den zeitlichen Verlauf des Dralls gilt also:

$$\boldsymbol{L}^A(t) = \frac{1}{2}mgt^2\,v_0\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_y$$

Die zeitliche Ableitung des Dralls berechnet sich zu

$$\dot{\boldsymbol{L}}^A(t) = mgt\,v_0\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_y\,.$$

Während des Flugs wirkt auf den Massenpunkt seine Gewichtskraft. Das Moment dieser Kraft bezüglich des Punktes A ist

$$\boldsymbol{M}^A(t) = \boldsymbol{r}(t)\times(-mg)\,\boldsymbol{e}_z = -m\,g\left(\boldsymbol{v_0}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2\,\boldsymbol{e}_z\right)\times\boldsymbol{e}_z = mgt\,\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{v_0}$$

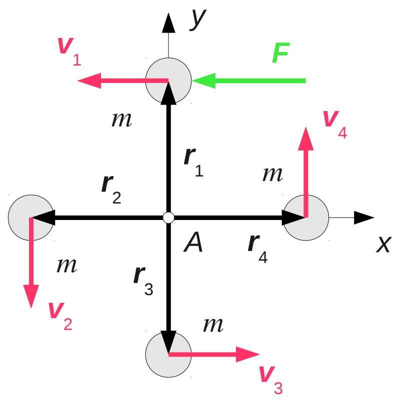
$$= mgt\,v_0\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_y\,.$$

Damit ist gezeigt: $\boldsymbol{M}^A(t) = \dot{\boldsymbol{L}}^A(t)$

Aufgabe 8

Jede Masse bewegt sich auf einer Kreisbahn um den Punkt *A*. Daher gilt für den Drall des Systems bezüglich Punkt *A*:

$$L_z^A = 4 m r^2 \omega$$



Das Moment der Kraft F bezüglich Punkt *A* berechnet sich zu

$$M_z^A = r F \ .$$

Der Drallsatz bezüglich Punkt *A* lautet:

$$\dot{L}_z^A = 4 \dot{\omega} m r^2 = M_{Az} = r F$$

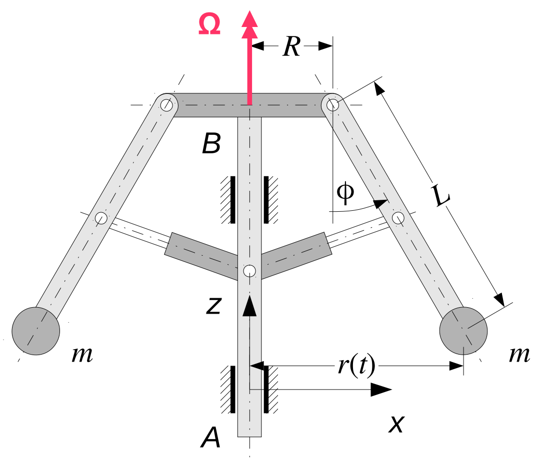
Daraus folgt für die Winkelbeschleunigung:

$$\dot{\omega} = \frac{r F}{4 m r^2} = \frac{F}{4 m r}$$

Zahlenwert: $\dot{\omega} = \dfrac{90\,\mathrm{N}}{4 \cdot 1\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}3\,\mathrm{m}} = \underline{75 \dfrac{1}{\mathrm{s}^2}}$

Aufgabe 9

An äußeren Kräfte wirken die Lagerkräfte und die Gewichtskräfte. Das Moment dieser Kräfte um einen beliebigen Punkt auf der *z*-Achse ist null. Daher ist die *z*-Komponente des Dralls bezüglich Punkt *A* konstant. Sie berechnet sich zu



$$L_z^A = 2 m \left(x v_y - y v_x \right) .$$

Mit $y = 0$, $x = r(t)$ und $v_y = \Omega(t) r(t)$ folgt:

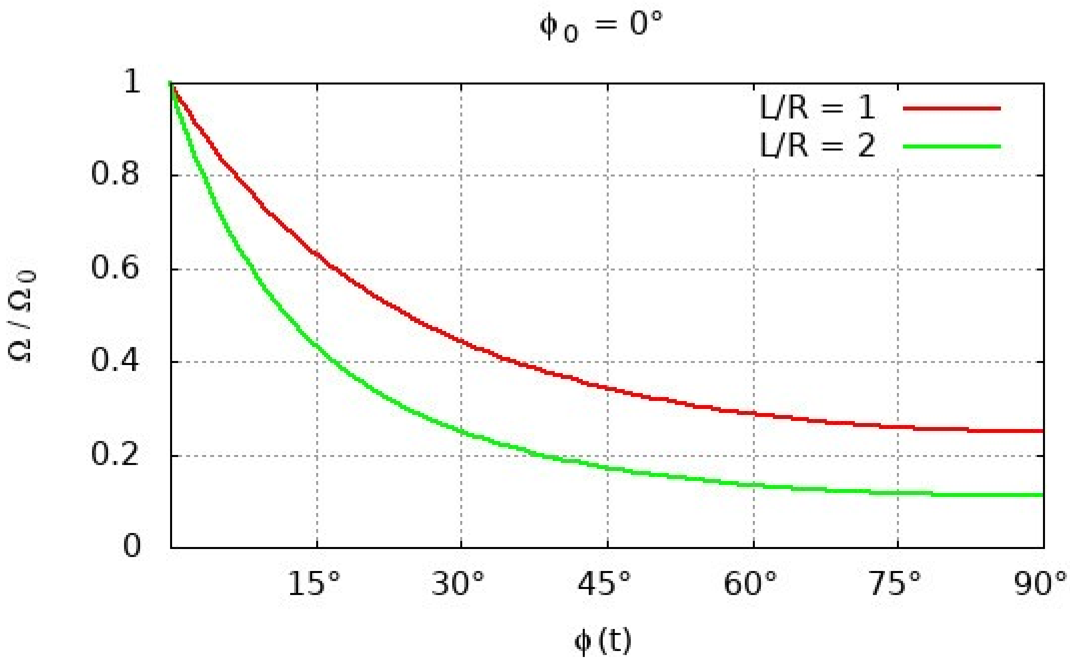
$$L_z^A = 2 m r^2(t) \Omega(t) = 2 m r_0^2 \Omega_0$$

Für den Radius gilt:

$$r(t) = R + L \sin\left(\phi(t)\right)$$
$$= R + L \sin\left(\phi_0 + \omega_0 t\right)$$

Damit folgt:

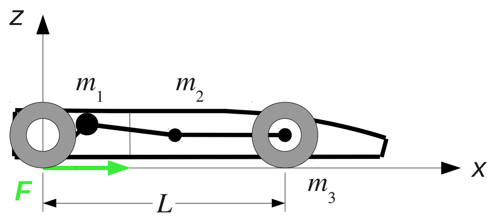
$$\Omega(t) = \Omega_0 \frac{r_0^2}{r^2(t)} = \Omega_0 \frac{\left(R + L \sin(\phi_0)\right)^2}{\left(R + L \sin(\phi_0 + \omega_0 t)\right)^2} = \Omega_0 \left(\frac{1 + (L/R) \sin(\phi_0)}{1 + (L/R) \sin(\phi_0 + \omega_0 t)} \right)^2$$



Aufgabe 10

a) <u>Beschleunigung</u>

Die einzige in *x*-Richtung auf das Massenpunktsystem wirkende äußere Kraft ist die Antriebskraft F. Aus dem Schwerpunktsatz folgt



$$m\,a = m\,\ddot{x} = F \ .$$

Dabei ist

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

die Gesamtmasse des Rennwagens.

Zahlenwerte:

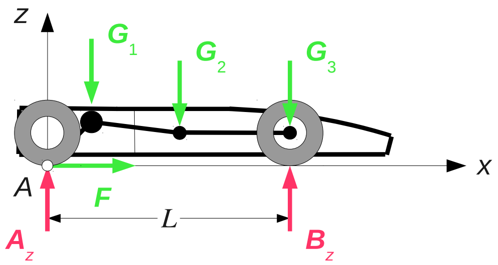
$$m = 100\,\text{kg} + 80\,\text{kg} + 70\,\text{kg} = 250\,\text{kg}\ ,\quad a = \frac{F}{m} = \frac{1000\,\text{N}}{250\,\text{kg}} = \underline{4\,\text{m/s}^2}$$

b) <u>Vertikalkräfte</u>

Die gesuchten Vertikalkräfte A_z und B_z können aus dem Kräftegleichgewicht in *z*-Richtung und dem Drallsatz um Punkt *A* berechnet werden.

Kräftegleichgewicht in *z*-Richtung:

$$\sum F_z=0 \quad : \quad A_z+B_z-G_1-G_2-G_3=0$$



Die *y*-Achse zeigt in die Zeichenebene. Da alle drei Massenpunkte starr miteinander verbunden sind, bewegen sie sich mit der gleichen Geschwindigkeit. Für die *y*-Komponente des Dralls um den Punkt *A* gilt daher:

$$L_y^A=\left(z_1 m_1+z_2 m_2+z_3 m_3\right) v$$

Der Bezugspunkt *A* bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit v wie der Schwerpunkt. Daher gilt $\boldsymbol{v}_A \times \boldsymbol{p}_S=\boldsymbol{v}\times m\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. Der Drallsatz bezüglich des bewegten Bezugspunkts *A* vereinfacht sich somit zu

$$\dot{\boldsymbol{L}}^A=\boldsymbol{M}^A .$$

In Komponenten lautet diese Gleichung

$$\dot{L}_y^A=\left(z_1 m_1+z_2 m_2+z_3 m_3\right) a=\left(x_1 m_1+x_2 m_2+x_3 m_3\right) g-L B_z .$$

Mit den Schwerpunktskoordinaten

$$x_S=\frac{1}{m}\left(x_1 m_1+x_2 m_2+x_3 m_3\right) \text{ und } z_S=\frac{1}{m}\left(z_1 m_1+z_2 m_2+z_3 m_3\right)$$

folgt

$$B_z=\frac{m}{L}\left(x_S g-z_S a\right) .$$

Die Vertikalkraft im Punkt *A* berechnet sich damit zu

$$A_z=m g-B_z=m\left(1-\frac{x_S}{L}+\frac{z_S}{L}\frac{a}{g}\right) g .$$

Zahlenwerte:

$$x_S=\frac{1}{250\,\text{kg}}\left(0{,}5\,\text{m}\cdot 100\,\text{kg}+1\,\text{m}\cdot 80\,\text{kg}+2\,\text{m}\cdot 70\,\text{kg}\right)=1{,}08\,\text{m}$$

$$z_S=\frac{1}{250\,\text{kg}}\left(0{,}5\,\text{m}\cdot 100\,\text{kg}+0{,}4\,\text{m}\cdot 80\,\text{kg}+0{,}3\,\text{m}\cdot 70\,\text{kg}\right)=0{,}412\,\text{m}$$

$$B_z=\frac{250\,\text{kg}}{2\,\text{m}}\left(1{,}08\,\text{m}\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}-0{,}412\,\text{m}\cdot 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)=\underline{1118\,\text{N}}$$

$$A_z = 250\,\mathrm{kg}\left(1 - \frac{1{,}08}{2} + \frac{0{,}412}{2}\cdot\frac{4}{9{,}81}\right)\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{1334\,\mathrm{N}}$$

c) Haftungskoeffizient

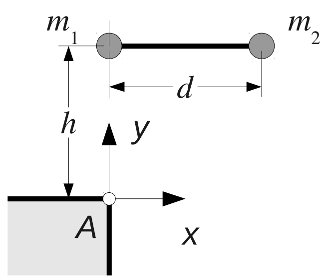
Die Haftbedingung lautet $F < \mu_0 A_z$.

Daraus folgt $\mu_0 > \dfrac{F}{A_z}$.

Zahlenwert: $\mu_0 > \dfrac{1000\,\mathrm{N}}{1334\,\mathrm{N}} = \underline{0{,}75}$

Aufgabe 11

a) Geschwindigkeit vor dem Aufprall



An jedem der beiden Massenpunkte greift die Gewichtskraft an. Damit lautet der Schwerpunktsatz

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g \ .$$

Der Schwerpunkt wird wie ein einzelner Massenpunkt mit der konstanten Beschleunigung g beschleunigt. Seine Geschwindigkeit am Ende der Fallhöhe h berechnet sich daher zu

$$v_S = \sqrt{2gh} \ .$$

Zahlenwert: $v_S = \sqrt{2\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 5\,\mathrm{m}} = \underline{9{,}90\,\mathrm{m/s^2}}$

b) Geschwindigkeit nach dem Aufprall

Die beim Aufprall im Punkt *A* wirkenden Kräfte verursachen kein Moment um Punkt *A*. Daher ist der Drall des Systems bezüglich Punkt *A* konstant.

Drall unmittelbar vor dem Aufprall: $L_1^A = -m_2\, d\, v_S$

Drall unmittelbar nach dem Aufprall: $L_2^A = -m_2\, d\, v_2$

Aus der Drallerhaltung $L_2^A = L_1^A$ folgt: $v_2 = v_S$