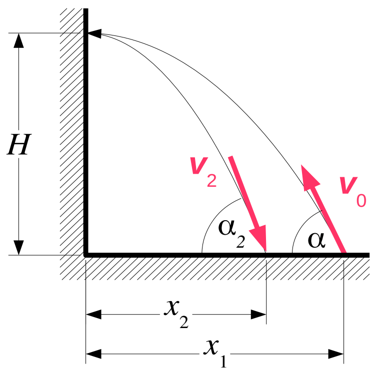
2.4 Stoßvorgänge

Lösungen

Aufgabe 1

a) <u>Geschwindigkeit und Winkel</u>



Für die Wurfhöhe gilt:

$$H=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2(\alpha)$$

Die zugehörige *x*-Koordinate ist:

$$x_1=\frac{v_0^2}{2g}2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich die Wurfgeschwindigkeit eliminieren, indem die erste Gleichung durch die zweite Gleichung geteilt wird:

$$\frac{H}{x_1}=\frac{\sin^2(\alpha)}{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}=\frac{1}{2}\tan(\alpha) \rightarrow \tan(\alpha)=2\frac{H}{x_1}$$

Die Wurfgeschwindigkeit kann jetzt aus der ersten Gleichung berechnet werden:

$$v_0=\frac{\sqrt{2gH}}{\sin(\alpha)}=\frac{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\tan(\alpha)}\sqrt{2gH}=\frac{x_1}{2H}\sqrt{2\left(1+4\frac{H^2}{x_1^2}\right)gH}$$
$$=\sqrt{\frac{x_1^2}{2}H^2\left(1+4\frac{H^2}{x_1^2}\right)gH}=\sqrt{2gH\left(1+\frac{x_1^2}{4H^2}\right)}$$

Zahlenwerte:

$$\tan(\alpha)=2\frac{5\,\text{m}}{5\,\text{m}}=2 \rightarrow \underline{\alpha=63{,}43°}$$

$$v_0=\sqrt{2\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 5\,\text{m}\left(1+\frac{5^2\,\text{m}^2}{4\cdot 5^2\,\text{m}^2}\right)}=\underline{11{,}07\,\text{m/s}}$$

b) <u>Stoßzahl</u>

Da die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit beim schiefen Wurf konstant ist, trifft der Ball mit der Geschwindigkeit

$$v_1 = v_0 \cos(\alpha)$$

auf die Wand. Nach dem Stoß hat er die Geschwindigkeit

$$v_2 \cos(\alpha_2) = -k\, v_1 = -k\, v_0 \cos(\alpha) \, .$$

Daraus folgt:

$$k = \frac{v_2 \cos(\alpha_2)}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Wegen der Symmetrie des schiefen Wurfes gilt

$$\tan(\alpha_2) = 2\frac{H}{x_2} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{\sqrt{2\, g\, H}}{\sin(\alpha_2)} \, .$$

Daraus folgt für die Stoßzahl:

$$k = \frac{\sqrt{2\, g\, H}\dfrac{\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_2)}}{\sqrt{2\, g\, H}\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{x_2}{x_1}$$

Zahlenwert:

$$k = \frac{4\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m}} = \underline{0{,}8}$$

Aufgabe 2

Der Sammelbehälter muss so weit entfernt sein, dass er von Bällen mit einer zu kleinen Stoßzahl nicht erreicht wird.

Für die Entfernung gilt: $D = D_1 + D_2 + D_3$

Dabei ist D_1 die Weite des ersten Wurfs. D_2 ist die Weite des zweiten Wurfs, wenn der Stoß am Ende des ersten Wurfs eine Stoßzahl von 0,8 hat. Entsprechend ist D_3 die Weite des dritten Wurfs, wenn der Stoß am Ende des zweiten Wurfs eine Stoßzahl von 0,8 hat.

<u>Weite des 1. Wurfs</u>

$$D_1 = \frac{v_1^2}{g}\sin(2\,\alpha_0) = \frac{5^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{9{,}81\,\mathrm{m/s}^2}\sin(90\,°) = 2{,}548\,\mathrm{m}$$

Am Ende des 1. Wurfs trifft der Ball unter einem Winkel von $45°$ mit der Geschwindigkeit v_1 auf.

Durch den Stoß ändert sich die Vertikalgeschwindigkeit, während die Horizontalgeschwindigkeit gleich bleibt:

$$v_{2x} = v_{1x} = v_1 \cos(\alpha_0) = 5\,\mathrm{m/s} \cdot \cos(45°) = 3{,}536\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{2z} = k\, v_{1z} = k\, v_1 \sin(\alpha_0) = 0{,}8 \cdot 5\,\mathrm{m/s} \cdot \sin(45°) = 2{,}828\,\mathrm{m/s}$$

Weite des 2. Wurfs

Die Abwurfgeschwindigkeit ist

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2z}^2} = \sqrt{3{,}536^2 + 2{,}828^2}\,\mathrm{m/s} = 4{,}528\,\mathrm{m/s}\,.$$

Für den Wurfwinkel gilt:

$$\tan(\alpha_2) = \frac{v_{2z}}{v_{2x}} = k\frac{v_{1z}}{v_{1x}} = k \tan(\alpha_0) = 0{,}8 \cdot \tan(45°) = 0{,}8 \;\rightarrow\; \alpha_2 = 38{,}66°$$

Damit folgt für die Wurfweite:

$$D_2 = \frac{v_2^2}{g}\sin(2\alpha_2) = \frac{4{,}528^2\,\mathrm{m^2/s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}\sin(2 \cdot 38{,}66°) = 2{,}039\,\mathrm{m}$$

Am Ende des 2. Wurfs trifft der Ball unter einem Winkel von $38{,}66°$ mit einer Geschwindigkeit von $4{,}528\ \mathrm{m/s}$ auf.

Für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß gilt:

$$v_{3x} = v_{2x} = 3{,}536\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{3z} = k\, v_{2z} = 0{,}8 \cdot 2{,}828\,\mathrm{m/s} = 2{,}262\,\mathrm{m/s}$$

Weite des 3. Wurfs

Die Abwurfgeschwindigkeit ist

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3z}^2} = \sqrt{3{,}536^2 + 2{,}262^2}\,\mathrm{m/s} = 4{,}198\,\mathrm{m/s}\,.$$

Für den Wurfwinkel gilt:

$$\tan(\alpha_3) = \frac{v_{3z}}{v_{3x}} = k \tan(\alpha_2) = k^2 \tan(\alpha_0) = 0{,}64 \;\rightarrow\; \alpha_3 = 32{,}62°$$

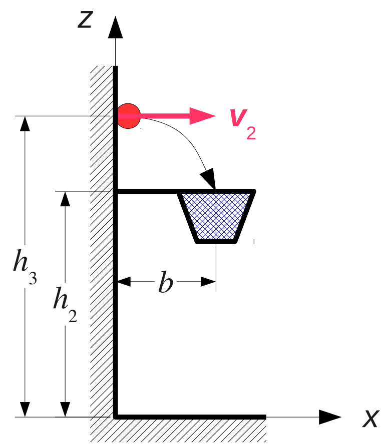
Damit folgt für die Wurfweite:

$$D_3 = \frac{v_3^2}{g}\sin(2\alpha_3) = \frac{4{,}198^2\,\mathrm{m^2/s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}\sin(2 \cdot 32{,}62°) = 1{,}631\,\mathrm{m}$$

Für die Entfernung D gilt: $D = 2{,}548\,\mathrm{m} + 2{,}039\,\mathrm{m} + 1{,}631\,\mathrm{m} = \underline{6{,}218\,\mathrm{m}}$

Aufgabe 3

a) Auftreffgeschwindigkeit



Der Ball trifft mit der Geschwindigkeit v_1 auf die Wand und hat nach dem Stoß die Geschwindigkeit v_2. Die Geschwindigkeit v_2 wird aus der Bedingung berechnet, dass der Ball in der Mitte des Korbes landet.

Der Wurfwinkel α_2 für den auf den Stoß folgenden Wurf ist 0°. Damit lautet die Gleichung der Flugbahn im eingezeichneten Koordinatensystem:

$$z(x)=h_3-\frac{g}{2\,v_2^2}\,x^2$$

Die Geschwindigkeit v_2 lässt sich aus der Bedingung $z(b)=h_2$ berechnen:

$$h_2=h_3-\frac{g}{2\,v_2^2}\,b^2$$

Daraus folgt:

$$\frac{g\,b^2}{2\,v_2^2}=h_3-h_2 \;\rightarrow\; 2\,v_2^2=\frac{g\,b^2}{h_3-h_2} \;\rightarrow\; v_2=b\sqrt{\frac{g}{2(h_3-h_2)}}$$

Aus $v_2=k\,v_1$ folgt für die Geschwindigkeit v_1:

$$v_1=\frac{1}{k}\,v_2=\frac{b}{k}\sqrt{\frac{g}{2(h_3-h_2)}}$$

Zahlenwerte:

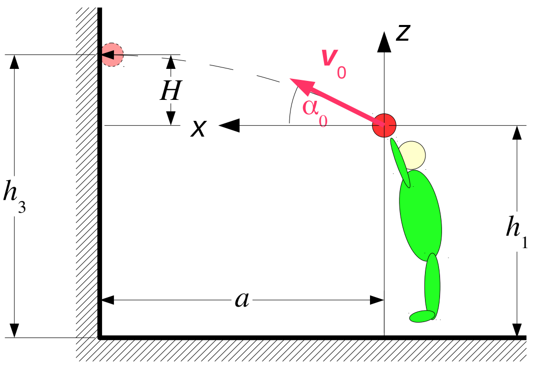
$$v_2=1\,\mathrm{m}\cdot\sqrt{\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{2(3\,\mathrm{m}-2{,}5\,\mathrm{m})}}=3{,}132\,\mathrm{m/s}\;,\quad v_1=\frac{3{,}1321\,\mathrm{m/s}}{0{,}7}=\underline{4{,}474\,\mathrm{m/s}}$$

b) Wurfhöhe, Wurfgeschwindigkeit und Wurfwinkel

Der schiefe Wurf wird im eingezeichneten Koordinatensystem betrachtet. Die Wurfhöhe H wird an der Wand erreicht, die sich an der Stelle $x = a$ befindet.

Die Gleichung für die Wurfbahn lautet:

$$z(x)=x\tan(\alpha_0)-\frac{g\,x^2}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}$$



Da die Geschwindigkeit in *x*-Richtung konstant ist, gilt

$$v_1 = v_0 \cos(\alpha_0) \ .$$

Einsetzen in die Gleichung für die Wurfbahn führt auf

$$z(x) = x \tan(\alpha_0) - \frac{g x^2}{2 v_1^2} .$$

Da der Ball senkrecht auf die Wand trifft, gilt:

$$0 = \frac{dz}{dx}(a) = \tan(\alpha_0) - g \frac{a}{v_1^2} \ \rightarrow \ \tan(\alpha_0) = \frac{g a}{v_1^2}$$

Damit berechnet sich die Höhe H zu

$$H = z(a) = a \tan(\alpha_0) - \frac{g a^2}{2 v_1^2} = \frac{g a^2}{v_1^2} - \frac{g a^2}{2 v_1^2} = \frac{g a^2}{2 v_1^2} .$$

Für die gesuchte Höhe h_1 gilt:

$$h_1 = h_3 - H = h_3 - \frac{g}{2} \left(\frac{a}{v_1} \right)^2$$

Für die Wurfgeschwindigkeit v_0 folgt:

$$v_0 = \frac{v_1}{\cos(\alpha_0)} = v_1 \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_0} = v_1 \sqrt{1 + \left(\frac{g a}{v_1^2} \right)^2}$$

Zahlenwerte:

$$\tan(\alpha_0) = \frac{9{,}81 \, \mathrm{m/s^2} \cdot 2 \, \mathrm{m}}{4{,}474^2 \, \mathrm{m^2/s^2}} = 0{,}9802 \ \rightarrow \ \alpha_0 = \underline{44{,}43\,°}$$

$$h_1 = 3 \, \mathrm{m} - \frac{9{,}81 \, \mathrm{m}/s^2}{2} \left(\frac{2 \, \mathrm{m}}{4{,}474 \, \mathrm{m/s}} \right)^2 = \underline{2{,}020 \, \mathrm{m}}$$

$$v_0 = 4{,}474 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \sqrt{1 + 0{,}9802^2} = \underline{6{,}265 \, \mathrm{m/s}}$$

Aufgabe 4

a) <u>Geschwindigkeiten nach dem Stoß</u>

Es handelt sich um einen geraden zentrischen Stoß. Mit $v_2 = 0$ gilt:

$$w_1 = \frac{m_1 v_1 - k\, m_2 v_1}{m_1 + m_2}, \quad w_2 = \frac{m_1 v_1 + k\, m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Zahlenwerte:

$$w_1 = \frac{10\,\mathrm{kg} - 0{,}8 \cdot 50\,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{kg} + 50\,\mathrm{kg}} \cdot 10\,\mathrm{m/s} = \underline{-5\,\mathrm{m/s}}$$

$$w_2 = \frac{10\,\mathrm{kg} + 0{,}8 \cdot 10\,\mathrm{kg}}{10\,\mathrm{kg} + 50\,\mathrm{kg}} \cdot 10\,\mathrm{m/s} = \underline{3\,\mathrm{m/s}}$$

b) <u>Maximaler Federweg</u>

Nach dem Stoß wirkt auf die Masse 2 nur die konservative Federkraft. Daher gilt der Energieerhaltungssatz.

Zustand *A*: Unmittelbar nach Stoß

Die Einfederung ist null: $E_A^K = \frac{1}{2} m_2 w_2^2$, $E_A^F = 0$

Zustand *B*: Maximale Einfederung

Die Geschwindigkeit ist null: $E_B^K = 0$, $E_B^F = \frac{1}{2} c\, s_{max}^2$

Energieerhaltungssatz: $E_B^K + E_B^F = E_A^K + E_A^F$

$$\frac{1}{2} c\, s_{max}^2 = \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \rightarrow s_{max} = \sqrt{\frac{m_2}{c}}\, w_2$$

Zahlenwert:

$$s_{max} = \sqrt{\frac{50\,\mathrm{kg}}{10^6\,\mathrm{kg/s^2}}} \cdot 3\,\mathrm{m/s} = \underline{0{,}02121\,\mathrm{m}}$$

Aufgabe 5

a) <u>Geschwindigkeit von Fahrzeug 1 nach dem Aufprall</u>

Die Geschwindigkeit w_1, die das Fahrzeug unmittelbar nach dem Aufprall hatte, kann mit dem Arbeitssatz ermittelt werden.

Während des Rutschens verrichtet nur die Reibungskraft Arbeit. Bezeichnet der Index *A* den Zustand unmittelbar nach dem Aufprall und der Index *B* den Zustand am Ende des Rutschens, so lautet der Arbeitssatz:

$$E_{1B}^K - E_{1A}^K = W_{1AB}^R$$

Für die kinetischen Energien gilt:

- Unmittelbar nach dem Aufprall: $E_{1A}^K = \frac{1}{2} m_1 w_1^2$
- Am Ende des Rutschens: $E_{1B}^K = 0$

Die Reibungsarbeit berechnet sich zu

$$W_{1AB}^R = -R\,s = -\mu\, m_1\, g\, s\ .$$

Einsetzen in den Arbeitssatz ergibt:

$$-\frac{1}{2} m_1 w_1^2 = -\mu\, m_1\, g\, s$$

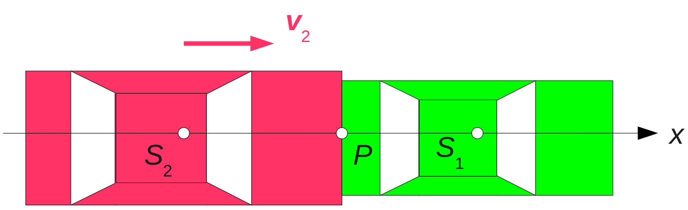
Daraus berechnet sich die gesuchte Geschwindigkeit zu

$$w_1 = \sqrt{2\mu\, g\, s}\ .$$

Zahlenwert: $w_1 = \sqrt{2 \cdot 0{,}7 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2\,\mathrm{m}} = \underline{5{,}241\,\mathrm{m/s}}$

b) <u>Geschwindigkeit von Fahrzeug *B* vor dem Aufprall</u>

Der Aufprall kann als gerader zentrischer Stoß betrachtet werden.



Die Geschwindigkeit v_1 von Fahrzeug 1 vor dem Stoß ist null. Für die Geschwindigkeit w_1 von Fahrzeug 1 nach dem Stoß gilt:

$$w_1 = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_1} + k \frac{m_2}{m_2 + m_1} v_2$$

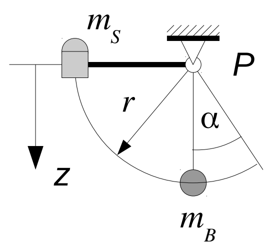
Daraus folgt: $(m_1 + m_2) w_1 = (1 + k) m_2 v_2 \rightarrow v_2 = \frac{m_1 + m_2}{(1+k) m_2} w_1$

Zahlenwert: $v_2 = \frac{1000\,\mathrm{kg} + 1200\,\mathrm{kg}}{(1 + 0{,}2) \cdot 1200\,\mathrm{kg}} \cdot 5{,}241\,\mathrm{m/s} = \underline{8{,}007\,\mathrm{m/s}}$

Aufgabe 6

a) Geschwindigkeit des Schlägers

Die Aufgabe wird mit dem Energieerhaltungssatz gelöst. Dazu wird Punkt *P* als Bezugspunkt für das Lageenergie gewählt.



In der Ruhelage sind kinetische Energie und Lageenergie des Schlägers null. Im tiefsten Punkt gilt für die Lageenergie:

$$E_S^G = -m_S g r$$

Der Energiesatz lautet:

$$E_S^K + E_S^G = \frac{1}{2} m_S v_S^2 - m_S g r = 0$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit des Schlägers: $v_S = \sqrt{2 g r}$

Zahlenwert: $v_S = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}} = \underline{5{,}425\,\mathrm{m/s}}$

b) Geschwindigkeit des Golfballs nach dem Schlag

Zwischen Schläger und Golfball findet ein gerader zentrischer Stoß statt. Die Geschwindigkeit des Golfballs vor dem Stoß ist null. Damit gilt für die Geschwindigkeit des Golfballs nach dem Stoß:

$$v_B = \frac{m_S v_S + k\, m_S v_S}{m_S + m_B} = (1+k)\, v_S \frac{m_S}{m_S + m_B}$$

Zahlenwert:

$$v_B = (1+0{,}9) \cdot 5{,}425 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{5\,\mathrm{kg}}{5\,\mathrm{kg} + 0{,}2\,\mathrm{kg}} = \underline{9{,}911\,\mathrm{m/s}}$$

c) Geschwindigkeit bei Verlassen der Maschine

Die Geschwindigkeit des Golfballs beim Verlassen der Maschine lässt sich ebenfalls mit dem Energieerhaltungssatz ermitteln. Bezugspunkt für die Lageenergie ist wieder Punkt *P*.

Unmittelbar nach dem Stoß hat der Golfball die kinetische Energie

$$E_B^K = \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

und die Lageenergie

$$E_B^G = -m_B g r \,.$$

Beim Verlassen der Maschine hat der Golfball die kinetische Energie

$$E_0^K = \frac{1}{2} m_B v_0^2$$

und die Lageenergie

$$E_0^G = -m_B g r \cos(\alpha) \,.$$

Aus dem Energieerhaltungssatz $E_0^K + E_0^G = E_B^K + E_B^G$

folgt:

$$E_0^K = \frac{1}{2} m_B v_0^2 = E_B^K + E_B^G - E_0^G = m_B \left[\frac{1}{2} v_B^2 - g r \left(1 - \cos(\alpha)\right) \right]$$

Auflösen nach der gesuchten Geschwindigkeit v_0 ergibt

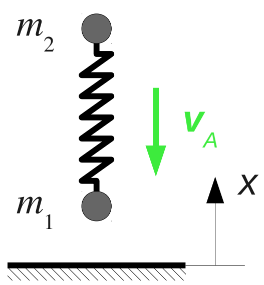
$$v_0 = \sqrt{v_B^2 - 2 g r \left(1 - \cos(\alpha)\right)} \,.$$

Zahlenwert: $v_0 = \sqrt{9{,}911^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 - 2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \cdot \left(1 - \cos(30°)\right)} = \underline{9{,}710\,\mathrm{m/s}}$

Aufgabe 7

a) Geschwindigkeit der Masse m_1 nach dem Stoß

Wegen der kurzen Stoßdauer kann der Kraftstoß der Gewichtskraft und der Kraftstoß der Federkraft vernachlässigt werden. Für die Geschwindigkeit nach dem Stoß gilt:



$$v_{B1} = -k\, v_A$$

Zahlenwert:

$$v_{B1} = -0{,}8 \cdot (-10\,\mathrm{m/s}) = \underline{8\,\mathrm{m/s}}$$

b) Geschwindigkeit des Schwerpunkts nach dem Stoß

Während des Stoßes wirken auf die Masse 2 die Gewichtskraft und die Federkraft. Beide Kräfte haben eine endliche Größe, so dass ihr Kraftstoß wegen der Kürze der Stoßdauer vernachlässigbar ist. Daher ändert sich der Impuls der Masse 2 während des Stoßes nicht. Mit $v_{B2} = v_A$ folgt für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts nach dem Stoß:

$$v_{BS} = \frac{m_1 v_{B1} + m_2 v_A}{m_1 + m_2}$$

Zahlenwert:

$$v_{BS}=\frac{2\,\text{kg}\cdot 8\,\text{m/s}-1\,\text{kg}\cdot 10\,\text{m/s}}{3\,\text{kg}}=\underline{2\,\text{m/s}}$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts nach dem Stoß kann auch aus dem integrierten Impulssatz für das Gesamtsystem berechnet werden:

$$(m_1+m_2)(v_{BS}-v_A)=\hat{F}$$

Auf das Gesamtsystem wirkt der Kraftstoß

$$\hat{F}=m_1(v_{B1}-v_A)\ .$$

Damit folgt:

$$(m_1+m_2)(v_{BS}-v_A)=m_1(v_{B1}-v_A)$$

Auflösen nach der gesuchten Geschwindigkeit v_{BS} ergibt:

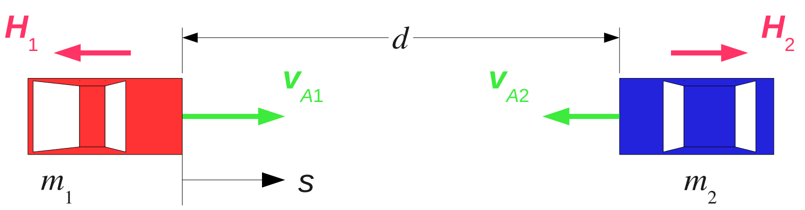
$$v_{BS}=v_A+\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_{B1}-v_A)=\frac{m_2 v_A+m_1 v_{B1}}{m_1+m_2}$$

c) Verhalten nach dem Stoß

Unmittelbar nach dem Stoß wirkt auf das Massenpunktsystem als einzige äußere Kraft die Gewichtskraft. Die beiden Massenpunkte schwingen um die Bahn des Schwerpunkts. Je nach Wert der Federkonstanten kann es zu weiteren Stößen zwischen Masse 1 und dem Boden kommen.

Aufgabe 8

a) Geschwindigkeiten vor dem Stoß



Die Zeit t wird ab dem Zeitpunkt gemessen, zu dem der Fahrer von Fahrzeug 1 Fahrzeug 2 bemerkt.

Die Ortskoordinate s wird ab dem Ort gemessen, an dem sich Fahrzeug 1 zum Zeitpunkt $t=0$ befindet. Geschwindigkeiten entgegen der eingezeichneten s-Achse sind negativ.

Beide Fahrzeuge bremsen mit einer konstanten Verzögerung, die durch die Haftkraft verursacht wird. Aus den Impulssätzen folgt für die Verzögerungen:

$$m_1 a_1 = -H_1 = -\mu_0 m_1 g \rightarrow a_1 = -\mu_0 g$$

$$m_2 a_2 = H_2 = \mu_0 m_2 g \rightarrow a_2 = \mu_0 g$$

Für die während des Bremsens zurückgelegten Wege gilt:

$$s_1(t) = v_{A1} t + \frac{1}{2} a_1 t^2 = v_{A1} t - \frac{1}{2}\mu_0 g t^2$$

$$s_2(t) = d + v_{A2} t + \frac{1}{2} a_2 t^2 = d + v_{A2} t + \frac{1}{2}\mu_0 g t^2$$

Zum Zeitpunkt t_S befinden sich beide Fahrzeuge am gleichen Ort:

$$s_1(t_S) = s_2(t_S) \rightarrow v_{A1} t_S - \frac{1}{2}\mu_0 g t_S^2 = d + v_{A2} t_S + \frac{1}{2}\mu_0 g t_S^2$$

$$(v_{A1} - v_{A2}) t_S - \mu_0 g t_S^2 = d \rightarrow t_S^2 - \frac{v_{A1} - v_{A2}}{\mu_0 g} t_S + \frac{d}{\mu_0 g} = 0$$

$$t_S = \frac{v_{A1} - v_{A2}}{2\mu_0 g} - \sqrt{\left(\frac{v_{A1} - v_{A2}}{2\mu_0 g}\right)^2 - \frac{d}{\mu_0 g}}$$

Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung scheidet aus, da sie größer ist.

Zahlenwerte:

$$v_{A1} = 120\,\mathrm{km/h} = 33{,}33\,\mathrm{m/s}\,,\quad v_{A2} = -100\,\mathrm{km/h} = -27{,}78\,\mathrm{m/s}$$

$$\frac{v_{A1} - v_{A2}}{2\mu_0 g} = \frac{33{,}33\,\mathrm{m/s} + 27{,}78\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 0{,}8 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 3{,}893\,\mathrm{s}$$

$$t_S = 3{,}893\,\mathrm{s} - \sqrt{3{,}893\,\mathrm{s}^2 - \frac{100\,\mathrm{m}}{0{,}8 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}} = 2{,}340\,\mathrm{s}$$

Für die Geschwindigkeiten gilt:

$$v_{B1} = v_{A1} - \mu_0 g t_S\,,\quad v_{B2} = v_{A2} + \mu_0 g t_S$$

Zahlenwerte:

$$v_{B1} = 33{,}33\,\mathrm{m/s} - 0{,}8 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}340\,\mathrm{s} = \underline{14{,}97\,\mathrm{m/s}} = \underline{53{,}89\,\mathrm{km/h}}$$

$$v_{B2} = -27{,}78\,\mathrm{m/s} + 0{,}8 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}340\,\mathrm{s} = \underline{-9{,}416\,\mathrm{m/s}} = \underline{-33{,}90\,\mathrm{km/h}}$$

b) <u>Geschwindigkeiten nach dem Stoß</u>

Die Gleichungen für den geraden zentrischen Stoß lauten:

$$w_1 = \frac{m_1 v_{B1} + m_2 v_{B2} - k\, m_2 \left(v_{B1} - v_{B2}\right)}{m_1 + m_2}$$

$$w_2 = \frac{m_1 v_{B1} + m_2 v_{B2} + k\, m_1 \left(v_{B1} - v_{B2}\right)}{m_1 + m_2}$$

Zahlenwerte:

$$\frac{m_1 v_{B1} + m_2 v_{B2}}{m_1 + m_2} = \frac{1000\,\text{kg} \cdot 14{,}97\,\text{m/s} - 1500\,\text{kg} \cdot 9{,}416\,\text{m/s}}{1000\,\text{kg} + 1500\,\text{kg}} = 0{,}3384\,\text{m/s}$$

$$k\,\frac{v_{B1} - v_{B2}}{m_1 + m_2} = 0{,}3 \cdot \frac{14{,}97\,\text{m/s} + 9{,}416\,\text{m/s}}{2500\,\text{kg}} = 2{,}926 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{kg s}}$$

$$w_1 = 0{,}3384\,\text{m/s} - 1500\,kg \cdot 2{,}926 \cdot 10^{-3}\,\text{m/kgs} = \underline{-4{,}051\,\text{m/s}} = \underline{-14{,}58\,\text{km/h}}$$

$$w_2 = 0{,}3384\,\text{m/s} + 1000\,\text{kg} \cdot 2{,}926 \cdot 10^{-3}\,\text{m/kgs} = \underline{3{,}264\,\text{m/s}} = \underline{11{,}75\,\text{km/h}}$$

c) <u>Verlust an mechanischer Energie</u>

Der Verlust an mechanischer Energie berechnet sich zu

$$\Delta E = \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(1 - k^2\right)\left(v_{B1} - v_{B2}\right)^2$$

Zahlenwert:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1000\,\text{kg} \cdot 1500\,\text{kg}}{2500\,\text{kg}} \cdot \left(1 - 0{,}3^2\right)\left(14{,}97\,\text{m/s} + 9{,}416\,\text{m/s}\right)^2 = \underline{162300\,\text{J}}$$

Aufgabe 9

Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$

Stoßbedingung: $k\left(v_2 - v_1\right) = w_1 - w_2$

Multiplikation des Impulserhaltungssatzes mit k und der Stoßbedingung mit m_1 und anschließende Addition ergibt:

$$k\left(m_1 + m_2\right) v_2 = \left(1 + k\right) m_1 w_1 + \left(k\, m_2 - m_1\right) w_2$$

Daraus folgt:

$$v_2 = \frac{k\left(m_1 w_1 + m_2 w_2\right) + m_1\left(w_1 - w_2\right)}{k\left(m_1 + m_2\right)}$$

Multiplikation des Impulserhaltungssatzes mit k und der Stoßbedingung mit m_2 und anschließende Subtraktion ergibt:

$$k\left(m_1 + m_2\right) v_1 = \left(k\, m_1 - m_2\right) w_1 + \left(1 + k\right) m_2 w_2$$

Daraus folgt:

$$v_1 = \frac{k\left(m_1 w_1 + m_2 w_2\right) - m_2\left(w_1 - w_2\right)}{k\left(m_1 + m_2\right)}$$

Aufgabe 10

a) Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Stoß

Die Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Stoß können mit dem Arbeitssatz aus den Rutschstrecken ermittelt werden.

Fahrzeug A: $-\frac{1}{2} m_A w_A^2 = -\mu_2 m_A g s_{A2} \rightarrow w_A = \sqrt{2\mu_2 g s_{A2}}$

Fahrzeug B: $-\frac{1}{2} m_B w_B^2 = -\mu_2 m_B g s_{B2} \rightarrow w_B = \sqrt{2\mu_2 g s_{B2}}$

Zahlenwerte:

$$w_A = \sqrt{2 \cdot 0{,}7 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = \underline{16{,}57\,\mathrm{m/s}}$$

$$w_B = \sqrt{2 \cdot 0{,}7 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 15\,\mathrm{m}} = \underline{14{,}35\,\mathrm{m/s}}$$

b) Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß

Am einfachsten lassen sich die Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß aus dem Impulserhaltungssatz und der Stoßbedingung ermitteln.

Impulserhaltungssatz: $m_A v_A + m_B v_B = m_A w_A + m_B w_B$

Stoßbedingung: $k = -\frac{w_A - w_B}{v_A - v_B} \rightarrow v_A - v_B = -\frac{1}{k}\left(w_A - w_B\right)$

Multiplikation der Stoßbedingung mit m_B und Addition zum Impulserhaltungssatz ergibt:

$$\left(m_A + m_B\right) v_A = m_A w_A + m_B w_B - \frac{m_B}{k}\left(w_A - w_B\right)$$

$$\rightarrow \quad v_A = \frac{m_A w_A + m_B w_B - m_B\left(w_A - w_B\right)/k}{m_A + m_B}$$

Für die Geschwindigkeit v_B folgt:

$$v_B = v_A + \frac{w_A - w_B}{k}$$

Zahlenwerte:

$$v_A = \frac{1500\,\text{kg}\cdot 16{,}57\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} + 2000\,\text{kg}\cdot 14{,}35\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} - \dfrac{2000\,\text{kg}}{0{,}3}\cdot\left(16{,}57\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} - 14{,}35\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{1500\,\text{kg} + 2000\,\text{kg}}$$

$$= \underline{11{,}07\,\text{m/s}}$$

$$v_B = 11{,}07\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{16{,}57\,\text{m/s} - 14{,}35\,\text{m/s}}{0{,}3} = \underline{18{,}47\,\text{m/s}}$$

c) <u>Geschwindigkeit von Fahrzeug *B* bei Bremsbeginn</u>

Die Geschwindigkeit von Fahrzeug *B* bei Bremsbeginn kann mit dem Arbeitssatz ermittelt werden:

$$\frac{1}{2} m_B v_B^2 - \frac{1}{2} m_B v_{B0}^2 = -\mu_1 m_B g s_{B1} \quad \rightarrow \quad v_{B0} = \sqrt{v_B^2 + 2\mu_1 g s_{B1}}$$

Zahlenwert:

$$v_{B0} = \sqrt{18{,}47^2\,\text{m}^2/\text{s}^2 + 2\cdot 0{,}9\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 10\,\text{m}} = \underline{22{,}75\,\text{m/s}}$$

Aufgabe 11

Umrechnung der Geschwindigkeiten:

$$v_{1A} = 540\,\text{km/h} = (540/3{,}6)\,\text{m/s} = 150\,\text{m/s}$$

$$v_{2A} = 630\,\text{km/h} = (630/3{,}6)\,\text{m/s} = 175\,\text{m/s}$$

a) <u>Abschusswinkel für Geschoss 2</u>

Damit sich die Geschosse treffen, müssen sie sich zum gleichen Zeitpunkt t_s an der gleichen Stelle x_s befinden und die gleiche Höhe h haben.

Daraus folgt:

$$h = v_{1A} t_s \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_s^2 = v_{2A} t_s \sin(\beta) - \frac{1}{2} g t_s^2 \quad \rightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{v_{1A}}{v_{2A}} \sin(\alpha)$$

Zahlenwert:

$$\sin(\beta) = \frac{150\,\text{m/s}}{175\,\text{m/s}} \sin(45\,°) = 0{,}6061 \quad \rightarrow \quad \beta = \underline{37{,}31\,°}$$

Bemerkung: Wenn Geschoss 2 unter diesem Winkel abgeschossen wird, dann haben die Geschosse zu jedem beliebigen Zeitpunkt die gleiche Höhe.

b) <u>Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Zusammenprall</u>

Die Horizontalgeschwindigkeiten sind konstant. Es gilt:

$$v_{1Bx} = v_{1A}\cos(\alpha)$$
$$v_{2Bx} = -v_{2A}\cos(\beta)$$

Die Geschwindigkeitskomponente v_{2Bx} ist negativ, da sie entgegen der *x*-Achse gerichtet ist.

Mit

$$\cos(\beta) = \sqrt{1-\sin^2(\beta)} = \sqrt{1-\frac{v_{1A}^2}{v_{2A}^2}\sin^2(\alpha)}$$

folgt:

$$v_{2Bx} = -v_{2A}\sqrt{1-\frac{v_{1A}^2}{v_{2A}^2}\sin^2(\alpha)} = -\sqrt{v_{2A}^2 - v_{1A}^2\sin^2(\alpha)}$$

Zahlenwerte:

$$v_{1Bx} = 150\,\mathrm{m/s}\cdot\cos(45°) = 106{,}1\,\mathrm{m/s} = \underline{381{,}8\,\mathrm{km/h}}$$
$$v_{2Bx} = -\sqrt{175^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 - 150^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2\sin^2(45°)} = -139{,}2\,\mathrm{m/s} = \underline{-501{,}1\,\mathrm{km/h}}$$

Die Zeit bis zum Zusammenprall berechnet sich aus der Bedingung

$$x_s = v_{1A}t_s\cos(\alpha) = D - v_{2A}t_s\cos(\beta)$$

zu

$$t_s = \frac{D}{v_{1A}\cos(\alpha) + v_{2A}\cos(\beta)}$$

Zahlenwert:

$$t_s = \frac{2000\,\mathrm{m}}{150\,\mathrm{m/s}\cdot\cos(45°) + 175\,\mathrm{m/s}\cdot\cos(37{,}31°)} = 8{,}155\,\mathrm{s}$$

Für die Vertikalgeschwindigkeiten gilt:

$$v_{1Bz} = v_{1A}\sin(\alpha) - g\,t_s$$
$$v_{2Bz} = v_{2A}\sin(\beta) - g\,t_s = v_{2A}\frac{v_{1A}}{v_{2A}}\sin(\alpha) - g\,t_s = v_{1A}\sin(\alpha) - g\,t_s = v_{1Bz}$$

Zahlenwert:

$$v_{1Bz} = v_{2Bz} = 150\,\mathrm{m/s}\cdot\sin(45°) - 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot 8{,}155\,\mathrm{s} = 26{,}07\,\mathrm{m/s} = \underline{93{,}85\,\mathrm{km/h}}$$

c) <u>Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Zusammenprall</u>

Da es sich um einen glatten Stoß handelt, ändern sich die Vertikalgeschwindigkeiten nicht:

$$v_{1Cz} = v_{1Bz} = \underline{93{,}85\,\text{km/h}}\ ,\quad v_{2Cz} = v_{2Bz} = \underline{93{,}85\,\text{km/h}}$$

Für die Horizontalgeschwindigkeiten nach dem Stoß gilt:

$$v_{1Cx} = \frac{m_1 v_{1Bx} + m_2 v_{2Bx} - k\, m_2 \left(v_{1Bx} - v_{2Bx}\right)}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2Cx} = \frac{m_1 v_{1Bx} + m_2 v_{2Bx} + k\, m_1 \left(v_{1Bx} - v_{2Bx}\right)}{m_1 + m_2}$$

Zahlenwerte:

$$v_{1Cx} = \frac{100\,\text{kg}\cdot 106{,}1\,\text{m/s} - 75\,\text{kg}\cdot 139{,}2\,\text{m/s}}{175\,\text{kg}} - 0{,}4\cdot\frac{75}{175}\cdot\left(106{,}1 + 139{,}2\right)\text{m/s}$$
$$= 0{,}9714\,\text{m/s} - 42{,}05\,\text{m/s} = -41{,}08\,\text{m/s} = \underline{-147{,}9\,\text{km/h}}$$

$$v_{2Cx} = 0{,}9714\,\text{m/s} + 0{,}4\cdot\frac{100}{175}\cdot 245{,}3\,\text{m/s} = 57{,}04\,\text{m/s} = \underline{205{,}3\,\text{km/h}}$$

Geschoss 1 fliegt nach dem Stoß nach links und Geschoss 2 nach rechts.

d) <u>Auftreffen auf dem Boden</u>

Für den Ort des Zusammenpralls gilt: $x_s = v_{1Bx} t_s$

Zahlenwert: $x_s = 106{,}1\,\text{m/s}\cdot 8{,}155\,\text{s} = 865{,}2\,\text{m}$

Die Höhe h, in der sich der Zusammenprall ereignet, berechnet sich zu

$$h = v_{1A} t_s \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_s^2\ .$$

Zahlenwert: $h = 150\,\text{m/s}\cdot 8{,}155\,s\cdot\sin\left(45°\right) - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2\cdot 8{,}155^2\,\text{s}^2 = 538{,}8\,\text{m}$

<u>Auftreffpunkt von Geschoss 1</u>

Wird die Zeit ab dem Zusammenprall gemessen, so gilt für die Vertikalkomponente des von Geschoss 1 bis zum Zeitpunkt t_1 des Auftreffens zurückgelegten Weges:

$$z_1(t_1) = h + v_{1Cz} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$$

Daraus folgt:

$$g t_1^2 - 2 v_{1Cz} t_1 - 2h = 0 \ \rightarrow\ t_1 = \frac{1}{g}\left(v_{1Cz} + \sqrt{v_{1Cz}^2 + 2hg}\right)$$

Zahlenwert:

$$t_1 = \frac{1}{9{,}81}\frac{\text{s}^2}{\text{m}}\cdot\left(26{,}07\,\text{m/s} + \sqrt{26{,}07^2\,\text{m}^2/\text{s}^2 + 2\cdot 538{,}8\,\text{m}\cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2}\right) = \underline{13{,}47\,\text{s}}$$

Für den Auftreffpunkt von Geschoss 1 gilt:

$$x_1 = x_s + v_{1Cx} t_1$$

Zahlenwert: $x_1 = 865{,}2\,\mathrm{m} - 41{,}08\,\mathrm{m/s} \cdot 13{,}47\,\mathrm{s} = \underline{311{,}8\,\mathrm{m}}$

Auftreffpunkt von Geschoss 2

Wegen $v_{2Cz} = v_{1Cz}$ gilt für die Zeitspanne t_2 vom Zusammenprall bis zum Auftreffen von Geschoss 2: $t_2 = t_1$

Für den Auftreffpunkt von Geschoss 2 gilt:

$$x_2 = x_s + v_{2Cx} t_2$$

Zahlenwert: $x_2 = 865{,}2\,\mathrm{m} + 57{,}04\,\mathrm{m/s} \cdot 13{,}47\,\mathrm{s} = \underline{1633\,\mathrm{m}}$

Aufgabe 12

a) Geschwindigkeit nach dem Stoß

$$w_B = \frac{m_A v_A + k m_A v_A}{m_A + m_B} = (1+k) \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A = 1{,}75 \cdot \frac{4}{5} v_A = 1{,}4\, v_A$$

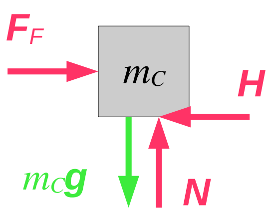
b) Mindeststrecke s_B

Massenpunkt *C* gleitet, wenn gilt:

$$F_F = H > \mu_0 N = \mu_0 m_C g$$

Mit $F_F = c s_B$ folgt: $s_B > \mu_0 \frac{m_C}{c} g = 2 \mu_0 \frac{m}{c} g$

Zahlenwert: $s_B > \frac{2 \cdot 0{,}9 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{400\,\mathrm{s^{-2}}} = 4{,}415\,\mathrm{cm}$



c) Mindestgeschwindigkeit w_B

Die Mindestgeschwindigkeit wird mit dem Arbeitssatz für Massenpunkt *B* bestimmt.

Zustand 1: unmittelbar nach Stoß

Zustand 2: Massenpunkt *B* hat die Strecke s_B zurückgelegt

Im Grenzfall kommt Massenpunkt B nach Zurücklegen der Strecke s_B zum Stillstand.

Zustand 1: $E_1^K = \frac{1}{2} m_B w_B^2$, $E_1^F = 0$

Zustand 2: $E_2^K = 0$, $E_2^F = \frac{1}{2} c\, s_B^2$

Arbeit der Reibungskraft: $W_{12}^R = -\mu\, m_B\, g\, s_B$

Arbeitssatz: $E_2^K + E_2^F - \left(E_1^K + E_1^F \right) = W_{12}^R$

$$\frac{1}{2} c\, s_B^2 - \frac{1}{2} m_B w_B^2 = -\mu\, m_B\, g\, s_B \quad \rightarrow \quad \frac{c}{m_B} s_B^2 + 2\mu\, g\, s_B = w_B^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{c}{m} \left(2\mu_0 \frac{m}{c} g \right)^2 + 2\mu\, g \left(2\mu_0 \frac{m}{c} g \right) = w_B^2$$

$$\rightarrow \quad w_B^2 = \left(2\mu_0 \frac{m}{c} g \right) \left(2\mu_0 g + 2\mu\, g \right) = 4\mu_0 \left(\mu_0 + \mu \right) \frac{m}{c} g^2$$

Das ist die untere Grenze für w_B. Damit gilt:

$$w_B > 2\sqrt{\mu_0 \left(\mu_0 + \mu \right) \frac{m}{c}}\, g$$

Zahlenwert:

$$w_B > 2\sqrt{\frac{0{,}9 \cdot 1{,}5}{400\,\mathrm{s}^{-2}}} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{2{,}324 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2}{20\,\mathrm{s}^{-1}} = 1{,}140\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$