3.1 Grundlagen der ebenen Kinematik

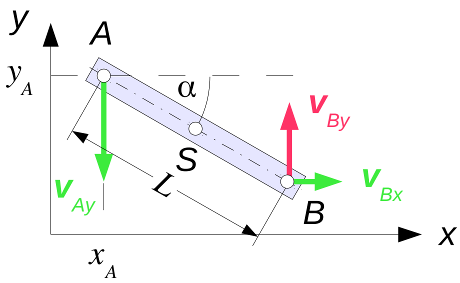
Lösungen

Aufgabe 1

a) Winkelgeschwindigkeit und Geschwindigkeit von Punkt *B*

Für die Komponenten der Geschwindigkeit von Punkt *B* gilt:

$$v_{Bx}=-\omega\left(y_B-y_A\right)=-\omega\left(-L\sin(\alpha)\right)$$
$$=\omega L\sin(\alpha)$$



$$\rightarrow \quad \omega=\frac{v_{Bx}}{L\sin(\alpha)}$$

$$v_{By}=v_{Ay}+\omega\left(x_B-x_A\right)=v_{Ay}+\omega L\cos(\alpha)$$
$$=v_{Ay}+v_{Bx}\cot(\alpha)$$

Zahlenwerte:

$$\omega=\frac{2\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{m}\cdot\sin(30°)}=\underline{2\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

$$v_{By}=-5\,\mathrm{m/s}+2\,\mathrm{m/s}\cdot\cot(30°)=\underline{-1{,}536\,\mathrm{m/s}}$$

b) Geschwindigkeit des Schwerpunkts

$$v_{Sx}=-\omega\left(y_S-y_A\right)=-\omega\left(-\frac{L}{2}\sin(\alpha)\right)=\frac{\omega}{2}L\sin(\alpha)=\frac{1}{2}v_{Bx}$$

$$v_{Sy}=v_{Ay}+\omega\left(x_S-x_B\right)=v_{Ay}+\omega\frac{L}{2}\cos(\alpha)=v_{Ay}+\frac{1}{2}v_{Bx}\cot(\alpha)$$

Zahlenwerte:

$$v_{Sx}=\frac{2\,\mathrm{m/s}}{2}=\underline{1\,\mathrm{m/s}}\ ,\quad v_{By}=-5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}+\frac{2\,\mathrm{m/s}}{2}\cdot\cot(30°)=\underline{-3{,}268\,\mathrm{m/s}}$$

c) Beschleunigung des Schwerpunkts

Wenn die Beschleunigung des Bezugspunkts *A* und die Winkelbeschleunigung null sind, dann gilt für die Komponenten der Beschleunigung des Schwerpunkts:

$$a_{Sx} = -\omega^2 (x_S - x_A) = -\omega^2 \frac{L}{2} \cos(\alpha) = -\frac{v_{Bx}^2}{2L} \frac{\cot(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$a_{Sy} = -\omega^2 (y_S - y_A) = \omega^2 \frac{L}{2} \sin(\alpha) = \frac{v_{Bx}^2}{2L \sin(\alpha)}$$

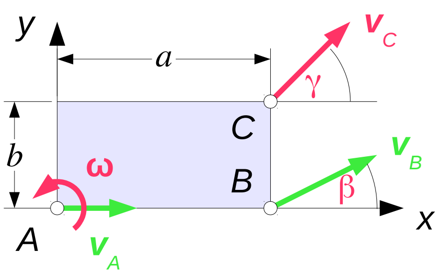
Zahlenwerte:

$$a_{Sx} = -\frac{2^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{2 \cdot 2\,\mathrm{m}} \frac{\cot(30°)}{\sin(30°)} = \underline{-3{,}464\,\mathrm{m/s^2}}\ ,\quad a_{Sy} = \frac{2^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{2 \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot \sin(30°)} = \underline{2\,\mathrm{m/s^2}}$$

Aufgabe 2

a) Richtung der Geschwindigkeit von Punkt *B* und Winkelgeschwindigkeit

Für die Geschwindigkeit von Punkt *B* gilt:



$$v_{Bx} = v_B \cos(\beta) = v_{Ax} = v_A$$

$$v_{By} = v_B \sin(\beta) = \omega a$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\cos(\beta) = \frac{v_A}{v_B}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\omega = \frac{v_B}{a} \sin(\beta)$$

Zahlenwerte:

$$\cos(\beta) = \frac{10\,\mathrm{m/s}}{15\,\mathrm{m/s}} = \frac{2}{3} \ \rightarrow\ \beta = \underline{48{,}19°}$$

$$\omega = \frac{15\,\mathrm{m/s}}{0{,}2\,\mathrm{m}} \cdot \sin(41{,}81°) = \underline{55{,}90\,\mathrm{s}^{-1}}$$

b) Geschwindigkeit von Punkt *C*

$$v_{Cx} = v_{Ax} - \omega b\ ,\quad v_{Cy} = \omega a\ ,\quad v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2}\ ,\quad \tan(\gamma) = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}}$$

Zahlenwerte:

$$v_{Cx} = 10\,\mathrm{m/s} - 55{,}90\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} = 4{,}41\,\mathrm{m/s}$$

$$v_{Cy} = 55{,}90\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}2\,\mathrm{m} = 11{,}18\,\mathrm{m/s}$$

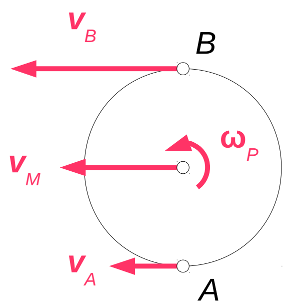
$$v_C = \sqrt{4{,}41^2 + 11{,}18^2}\,\mathrm{m/s} = \underline{12{,}02\,\mathrm{m/s}}$$

$$\tan(\gamma) = \frac{11{,}18\,\mathrm{m/s}}{4{,}41\,\mathrm{m/s}} = 2{,}535 \;\rightarrow\; \gamma = \underline{68{,}47\,°}$$

Aufgabe 3

a) <u>Formel für die Drehzahl des Hohlrads</u>

Geschwindigkeiten am Planetenrad:



$$v_M = r_T\,\omega_T$$

$$v_A = v_M - r_P\,\omega_P = r_T\,\omega_T - r_P\,\omega_P$$

$$v_B = v_M + r_P\,\omega_P = r_T\,\omega_T + r_P\,\omega_P$$

Im Punkt *A* ist das Planetenrad im Kontakt mit dem Sonnenrad:

$$v_A = r_S\,\omega_S \;\rightarrow\; r_T\,\omega_T - r_P\,\omega_P = r_S\,\omega_S$$

Daraus folgt für die Winkelgeschwindigkeit des Planetenrads:

$$\omega_P = \frac{r_T}{r_P}\,\omega_T - \frac{r_S}{r_P}\,\omega_S$$

Im Punkt *B* ist das Planetenrad im Kontakt mit dem Hohlrad:

$$v_B = r_H\,\omega_H \;\rightarrow\; r_T\,\omega_T + r_P\,\omega_P = r_H\,\omega_H$$

Daraus folgt für die Winkelgeschwindigkeit des Hohlrads:

$$\omega_H = \frac{r_T}{r_H}\,\omega_T + \frac{r_P}{r_H}\left(\frac{r_T}{r_P}\,\omega_T - \frac{r_S}{r_P}\,\omega_S\right) = 2\,\frac{r_T}{r_H}\,\omega_T - \frac{r_S}{r_H}\,\omega_S$$

Wegen $n = \omega/(2\pi)$ gilt für die Drehzahlen:

$$n_H = 2\,\frac{r_T}{r_H}\,n_T - \frac{r_S}{r_H}\,n_S$$

Diese Beziehung lässt sich einfach in einem sogenannten Nomogramm darstellen. Zunächst gilt

$$r_H\,n_H - 2\,r_T\,n_T + r_S\,n_S = 0\,.$$

Aus den geometrischen Bedingungen

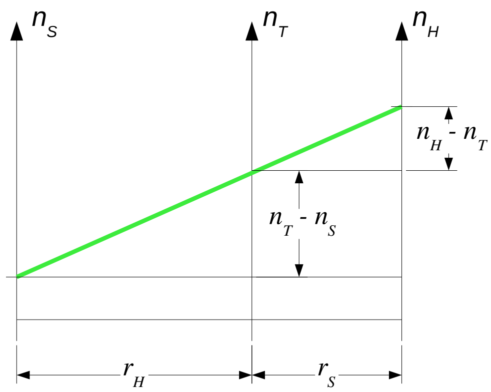
$$r_P + r_T = r_H \quad \text{und} \quad r_S + r_P = r_T$$

folgt

$$2\,r_T = r_S + r_H\,.$$

Einsetzen in die Beziehung zwischen den Drehzahlen führt auf

$$r_H n_H - (r_S + r_H) n_T + r_S n_S = 0 \, ,$$



woraus

$$r_H (n_H - n_T) + r_S (n_S - n_T) = 0$$

folgt. Also gilt:

$$\frac{n_H - n_T}{r_S} = \frac{n_T - n_S}{r_H}$$

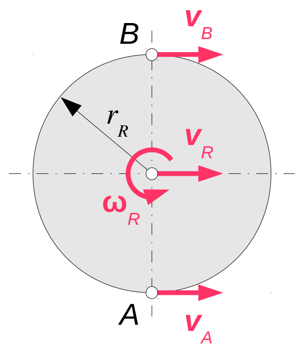
b) <u>Zahlenwert</u>

Mit den gegebenen Werten berechnet sich die Drehzahl des Hohlrads zu

$$n_H = 2 \cdot \frac{35}{50} \cdot 1000 \, \text{min}^{-1} + \frac{20}{50} \cdot 1600 \, \text{min}^{-1} = \underline{2040 \, \text{min}^{-1}} \, .$$

Aufgabe 4

Geometrie:



$$2 r_R = r_a - r_i \;\rightarrow\; r_R = \frac{r_a - r_i}{2}$$

Kinematik:

Außenring:	$v_A = r_a \omega_a$	(1)
Innenring:	$v_B = r_i \omega_i$	(2)
Rolle:	$v_B = v_R - r_R \omega_R$	(3)
	$v_A = v_R + r_R \omega_R$	(4)

Auflösen:

(3) + (4) $\rightarrow$ $v_A + v_B = 2 v_R$ $\rightarrow$ $v_R = \dfrac{v_A + v_B}{2} = \dfrac{r_a \omega_a + r_i \omega_i}{2}$

in (3): $r_R \omega_R = v_R - v_B = \dfrac{r_a \omega_a + r_i \omega_i - 2 r_i \omega_i}{2}$ $\rightarrow$ $\omega_R = \dfrac{r_a \omega_a - r_i \omega_i}{r_a - r_i}$

oder:

in (4): $r_R \omega_R = v_A - v_R = \dfrac{2 r_a \omega_a - r_a \omega_a - r_i \omega_i}{2}$ $\rightarrow$ $\omega_R = \dfrac{r_a \omega_a - r_i \omega_i}{r_a - r_i}$