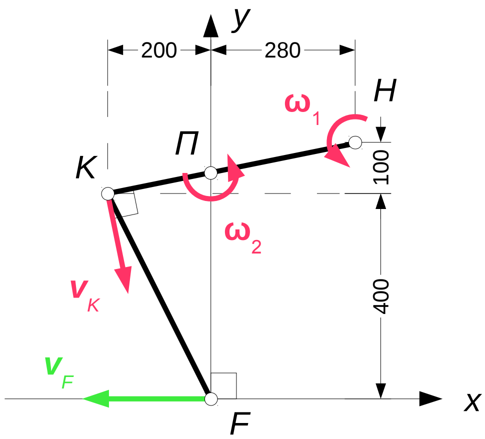
3.2 Momentanpol

Lösungen

Aufgabe 1

a) Momentanpol des Unterschenkels



Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_F$ von Punkt *F* zeigt in Richtung der negativen *x*-Achse.

Punkt *K* bewegt sich auf einer Kreisbahn um Punkt *H*. Seine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_K$ steht daher senkrecht auf der Geraden *KH*.

Der Momentanpol ist der Schnittpunkt der *y*-Achse, die senkrecht auf $\boldsymbol{v}_F$ steht, und der Geraden *KH*, die senkrecht auf $\boldsymbol{v}_K$ steht.

Die *y*-Koordinate des Momentanpols berechnet sich aus

$$\frac{100}{480}=\frac{y_\Pi-400}{200}$$

zu

$$y_\Pi=400+200\cdot\frac{100}{480}=\underline{441{,}67}.$$

b) Winkelgeschwindigkeiten

In der gezeichneten Lage dreht sich der Unterschenkel mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 um den Momentanpol *Π*. Für die Geschwindigkeit v_F von Punkt *F* gilt daher:

$$v_F=-y_\Pi\omega_2$$

Der Punkt *F* dreht sich aber auch mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um den Mittelpunkt *M* des Kettenrads. Daher gilt auch:

$$v_F=\Omega\, r_{MF}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt für die Winkelgeschwindigkeit des Unterschenkels:

$$\omega_2 = -\frac{r_{MF}}{y_\Pi}\Omega$$

Zahlenwert: $\omega_2 = -\frac{200}{441{,}67} \cdot 3\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{-1{,}358\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$

Als Teil des Unterschenkels dreht sich das Knie mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 um den Momentanpol *Π* des Unterschenkels. Daher gilt für seine Geschwindigkeit:

$$v_K = \omega_2\, r_{\Pi K}$$

Als Teil des Oberschenkels dreht sich das Knie mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um Punkt *H*. Daher gilt für seine Geschwindigkeit auch:

$$v_K = \omega_1\, r_{HK}$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnet sich die Winkelgeschwindigkeit des Oberschenkels zu

$$\omega_1 = \frac{r_{\Pi K}}{r_{HK}}\omega_2 \ .$$

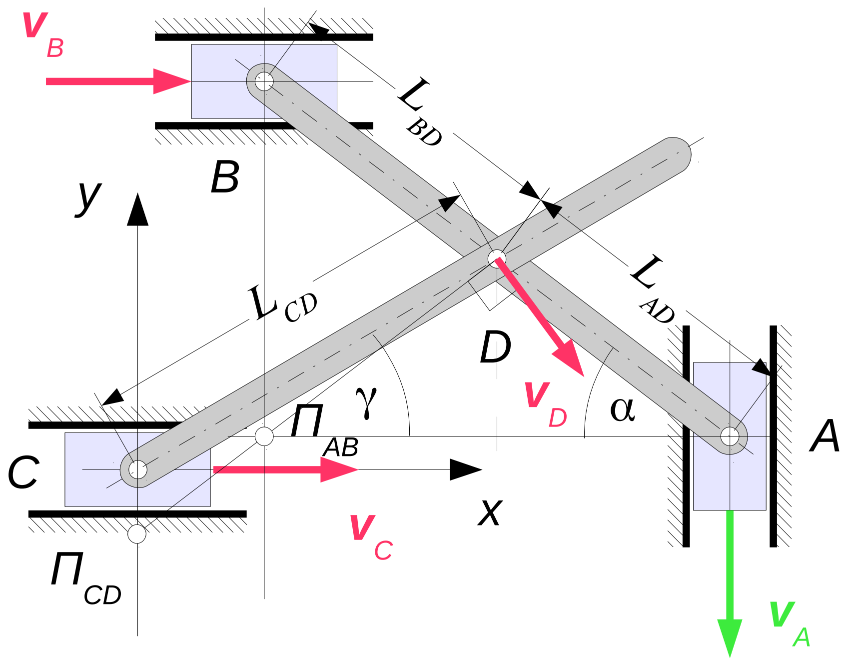
Aus Ähnlichkeitsbetrachtungen folgt: $\frac{r_{\Pi K}}{r_{HK}} = \frac{200}{480}$

Zahlenwert: $\omega_1 = -\frac{200}{480} \cdot 1{,}358\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{-0{,}566\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$

Aufgabe 2

a) <u>Lage der Momentanpole</u>

Für die Punkte *A* und *B* sind die Richtungen der Geschwindigkeiten bekannt. Damit kann die Lage des Momentanpols des Trägers *AB* bestimmt werden. Wenn die Lage des Momentanpols des Trägers *AB* bekannt ist, kann die Richtung der Geschwindigkeit von Punkt *D* angegeben werden. Damit kann dann auch die Lage des Momentanpols des Trägers *CD* bestimmt werden.



Koordinaten der Punkte *A*, *B* und *D*:

$$x_A = L_{CD}\cos(\gamma) + L_{AD}\cos(\alpha)\ ,\ \ y_A = L_{CD}\sin(\gamma) - L_{AD}\sin(\alpha)$$

$$x_B = L_{CD}\cos(\gamma) - L_{BD}\cos(\alpha)\ ,\ \ y_B = L_{CD}\sin(\gamma) + L_{BD}\sin(\alpha)$$

$$x_D = L_{CD}\cos(\gamma)\ ,\ \ y_D = L_{CD}\sin(\gamma)$$

Koordinaten der Momentanpole:

$$x_{AB} = x_B\ ,\ \ y_{AB} = y_A$$

$$x_{CD} = 0$$

$$\frac{y_D - y_{AB}}{x_D - x_{AB}} = \frac{y_{AB} - y_{CD}}{x_{AB}} \ \rightarrow\ y_{CD} = y_{AB} - \frac{x_{AB}}{x_D - x_{AB}}(y_D - y_{AB})$$

Zahlenwerte:

$$x_A = 400\,\text{mm}\cdot\cos(30°) + 300\,\text{mm}\cdot\cos(36{,}87°) = 586{,}4\,\text{mm}$$

$$y_A = 400\,\text{mm}\cdot\sin(30°) - 300\,\text{mm}\cdot\sin(36{,}87°) = 20{,}00\,\text{mm}$$

$$x_B = 400\,\text{mm}\cdot\cos(30°) - 250\,\text{mm}\cdot\cos(36{,}87°) = 146{,}4\,\text{mm}$$

$$y_B = 400\,\text{mm}\cdot\sin(30°) + 250\,\text{mm}\cdot\sin(36{,}87°) = 350\,\text{mm}$$

$$x_D = 400\,\text{mm}\cdot\cos(30°) = 346{,}1\,\text{mm}\ ,\ \ y_D = 400\,\text{mm}\cdot\sin(30°) = 200\,\text{mm}$$

$$x_{AB} = x_B = \underline{146{,}4\,\text{mm}}\ ,\ \ y_{AB} = y_A = \underline{20\,\text{mm}}$$

$$x_{CD} = \underline{0\,\text{mm}}$$

$$y_{CD} = 20\,\text{mm} - \frac{146{,}4\,\text{mm}}{346{,}1\,\text{mm} - 146{,}4\,\text{mm}}\left(200\,\text{mm} - 20\,\text{mm}\right) = \underline{-112{,}0\,\text{mm}}$$

b) Winkelgeschwindigkeiten und Geschwindigkeiten

In der dargestellten Lage drehen sich beide Träger im Uhrzeigersinn. Daher werden Winkelgeschwindigkeiten im Uhrzeigersinn positiv gewählt.

Träger *AB*:

$$v_A = \left(x_A - x_{AB}\right)\omega_{AB} \;\rightarrow\; \omega_{AB} = \frac{v_A}{x_A - x_{AB}}$$

$$v_B = \left(y_B - y_{AB}\right)\omega_{AB} = v_A \frac{y_B - y_{AB}}{x_A - x_{AB}} = v_A \tan(\alpha)$$

$$v_{Dx} = \left(y_D - y_{AB}\right)\omega_{AB} = v_A \frac{y_D - y_{AB}}{x_A - x_{AB}}$$

$$v_{Dy} = -\left(x_D - x_{AB}\right)\omega_{AB} = -v_A \frac{x_D - x_{AB}}{x_A - x_{AB}}$$

Träger *CD*:

$$v_{Dy} = -x_D\,\omega_{CD} \;\rightarrow\; \omega_{CD} = -\frac{v_{Dy}}{x_D} = \frac{v_A}{x_D}\,\frac{x_D - x_{AB}}{x_A - x_{AB}}$$

$$v_C = -y_{CD}\,\omega_{CD} = -v_A \frac{y_{CD}}{x_D}\,\frac{x_D - x_{AB}}{x_A - x_{AB}}$$

Zahlenwerte:

$$\omega_{AB} = \frac{4000\,\text{mm/s}}{586{,}4\,\text{mm} - 146{,}4\,\text{mm}} = \frac{100}{11}\,\frac{1}{\text{s}} = \underline{9{,}091\,\text{s}^{-1}}$$

$$v_B = 4\,\text{m/s} \cdot \tan\left(36{,}87\,°\right) = \underline{3\,\text{m/s}}$$

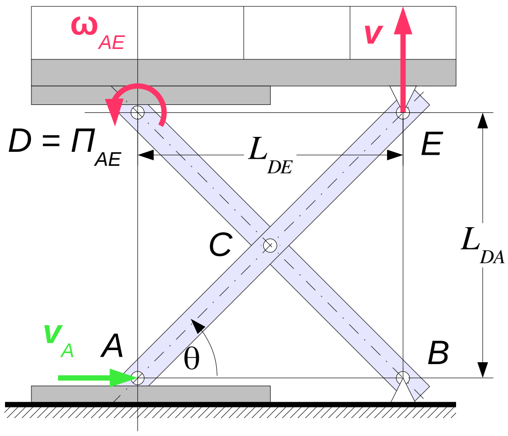
$$\omega_{CD} = \frac{4000\,\text{mm/s}}{346{,}1\,\text{mm}} \cdot \frac{346{,}1\,\text{mm} - 146{,}4\,\text{mm}}{586{,}4\,\text{mm} - 146{,}4\,\text{mm}} = \underline{5{,}245\,\text{s}^{-1}}$$

$$v_C = 4\,\text{m/s} \cdot \frac{112{,}0\,\text{mm}}{346{,}1\,\text{mm}} \cdot \frac{346{,}1\,\text{mm} - 146{,}4\,\text{mm}}{586{,}4\,\text{mm} - 146{,}4\,\text{mm}} = \underline{0{,}5875\,\text{m/s}}$$

Aufgabe 3

a) Zusammenhang zwischen Winkel und Geschwindigkeit

Lösung mit Momentanpol



Der Momentanpol des Trägers *AE* liegt im Punkt *D*.

Für die Geschwindigkeiten der Punkte *E* und *A* gilt daher:

$$v = \omega_{AE} L_{DE}$$

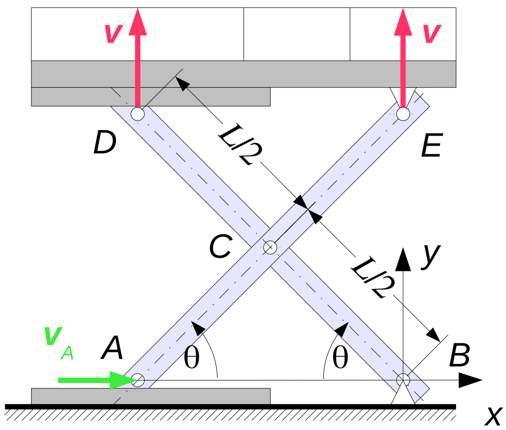
$$v_A = \omega_{AE} L_{DA}$$

Division der beiden Gleichungen ergibt:

$$\frac{v}{v_A} = \frac{L_{DE}}{L_{DA}} = \cot(\theta)$$

Also gilt: $v = v_A \cot(\theta)$

Lösung über Geschwindigkeiten



Das Koordinatensystem wird in den feststehenden Punkt *B* gelegt.

Für die Geschwindigkeit von Punkt *C* gilt:

$$v_{Cx} = v_{Ax} - \dot{\theta}(y_C - y_A) = \dot{\theta}(y_C - y_B)$$

Daraus folgt:

$$v_{Ax} = v_A = 2\dot{\theta} y_C$$

$$\rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v_A}{2 y_C} = \frac{v_A}{L\sin(\theta)}$$

Für die Geschwindigkeit von Punkt *E* gilt:

$$v = v_{Ey} = \dot{\theta}(x_E - x_A) = \dot{\theta} L \cos(\theta) \quad \rightarrow \quad v = v_A \cot(\theta)$$

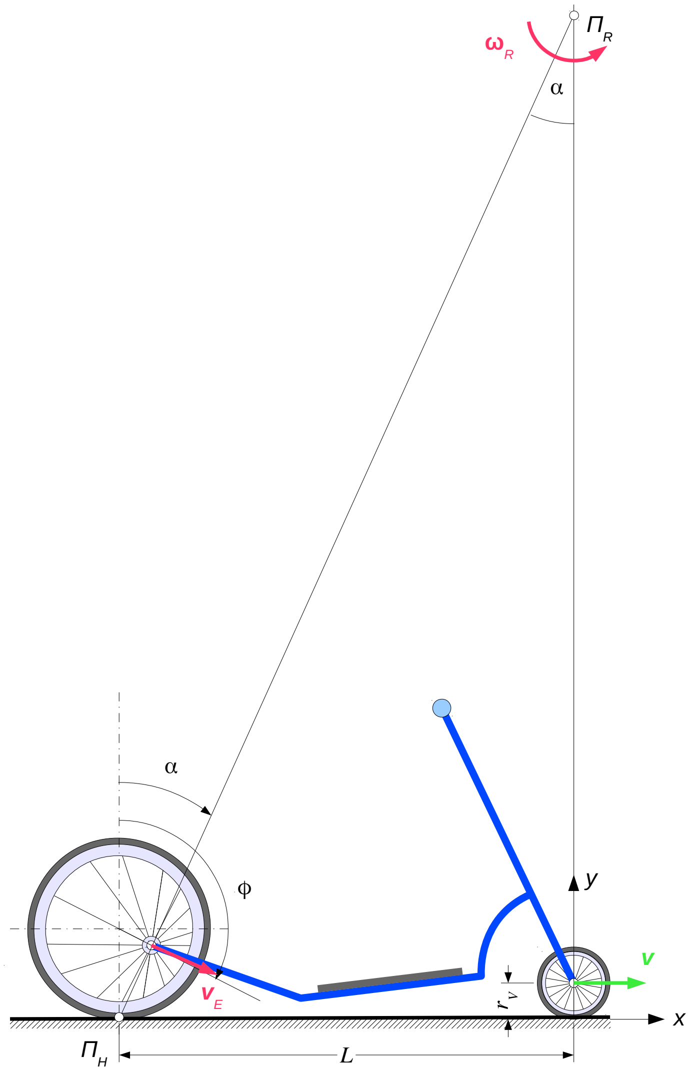
b) Zahlenwerte

$$v(\theta_1) = 0{,}6\,\mathrm{m/s} \cdot \cot(40°) = \underline{0{,}7151\,\mathrm{m/s}}$$

$$v(\theta_2)=0{,}6\,\mathrm{m/s}\cdot\cot(50°)=\underline{0{,}5035\,\mathrm{m/s}}$$

Aufgabe 4

a) <u>Momentanpol</u>



Die hintere Nabe des Rahmens bewegt sich um den Momentanpol Π_H des Hinterrads, d. h. um den Aufstandspunkt des Hinterrads. Ihr Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht auf der Verbindung der Nabe mit dem Aufstandspunkt. Der Momentanpol Π_R des Rahmens liegt im Schnittpunkt der Verlängerung dieser Verbindungslinie mit der *y*-Achse.

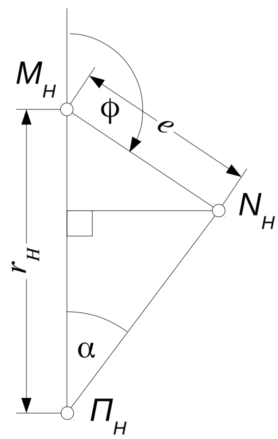
Aus der Zeichnung kann abgelesen werden:

$$\cot(\alpha)=\frac{y_\Pi}{L}$$

$$\rightarrow\quad y_\Pi=L\cot(\alpha)$$

Zu ermitteln sind noch der Winkel α und die Länge L in Abhängigkeit vom Winkel ϕ.

Der Winkel α kann aus einer Betrachtung der Geometrie am Hinterrad bestimmt werden. In der Zeichnung ist M_H der Mittelpunkt des Hinterrads und N_H die hintere Nabe.



Es kann abgelesen werden:

$$\cot(\alpha)=\frac{r_H-e\cos(180°-\phi)}{e\sin(180°-\phi)}$$

Mit

$$\sin(180°-\phi)=\sin(\phi),\quad \cos(180°-\phi)=-\cos(\phi)$$

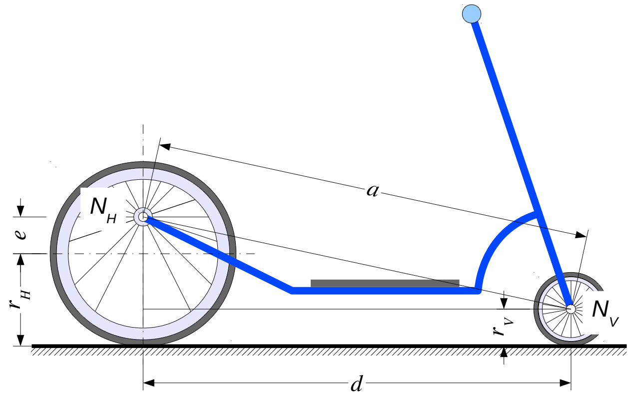
folgt:

$$\cot(\alpha)=\frac{r_H+e\cos(\phi)}{e\sin(\phi)}$$

Zur Berechnung von L wird zunächst der Abstand a der beiden Naben berechnet. In der Ausgangslage gilt:

$$a=\sqrt{(r_H+e-r_V)^2+d^2}$$

Da der Rahmen starr ist, ändert sich dieser Abstand nicht.



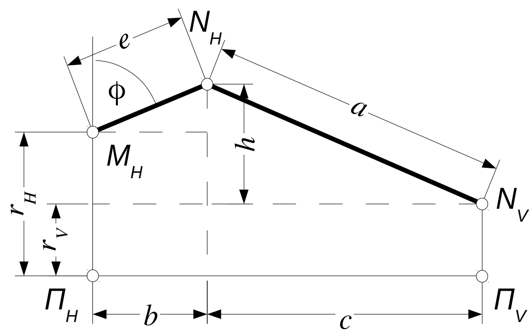
In einer beliebigen Lage gilt:

$$b=e\sin(\phi)$$

$$h=r_H+e\cos(\phi)-r_V$$

$$c=\sqrt{a^2-h^2}$$

$$L=b+c$$



Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}c^2&=(r_H+e-r_V)^2+d^2-(r_H+e\cos(\phi)-r_V)^2\\&=e^2(1-\cos^2(\phi))+2(r_H-r_V)e(1-\cos(\phi))+d^2\end{aligned}$$

$$L=e\sin(\phi)+\sqrt{e^2\sin^2(\phi)+2(r_H-r_V)e(1-\cos(\phi))+d^2}$$

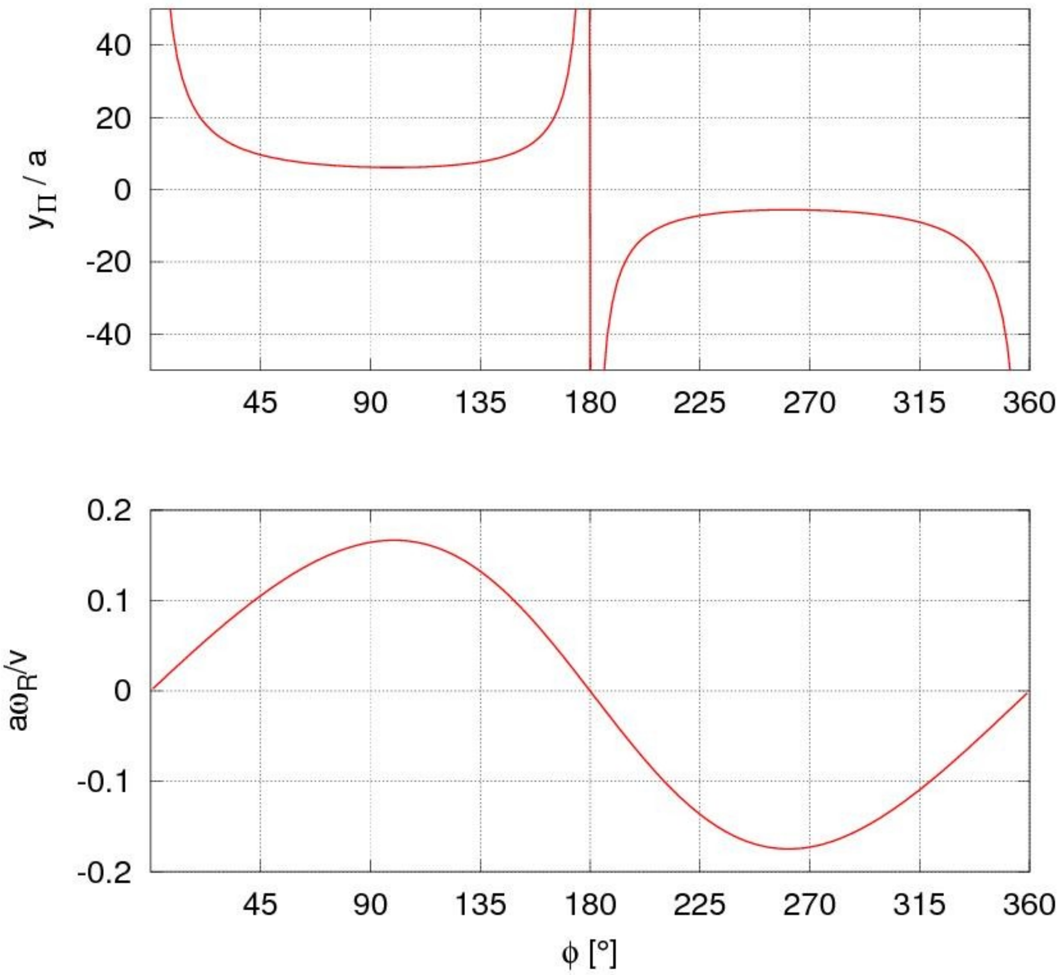
Damit gilt für die y-Koordinate des Momentanpols des Rahmens:

$$\begin{aligned}y_\Pi&=\left(e\sin(\phi)+\sqrt{e^2\sin^2(\phi)+2(r_H-r_V)e(1-\cos(\phi))+d^2}\right)\frac{r_H+e\cos(\phi)}{e\sin(\phi)}\\&=(r_H+e\cos(\phi))\left(1+\frac{\sqrt{e^2\sin^2(\phi)+2(r_H-r_V)e(1-\cos(\phi))+d^2}}{e\sin(\phi)}\right)\end{aligned}$$

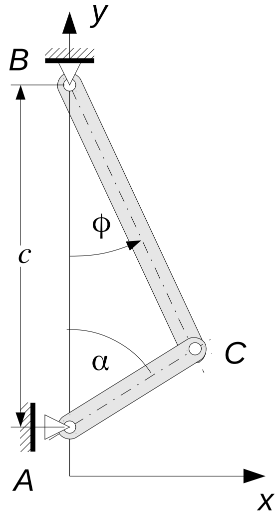
b) <u>Winkelgeschwindigkeit des Rahmens</u>

Aus $v=\omega_R(y_\Pi-r_V)$ folgt: $\omega_R=\dfrac{v}{y_\Pi-r_V}$

Für $r_H = 0{,}3$ m, $r_V = 0{,}15$ m, $e = 0{,}05$ m und $d = 1$ m ergeben sich folgende Verläufe:



Aufgabe 5



a) Koordinate y_A

Mit $|\overline{AC}|=3a$, $|\overline{BC}|=6a$ und $c=|\overline{AB}|$ gilt:

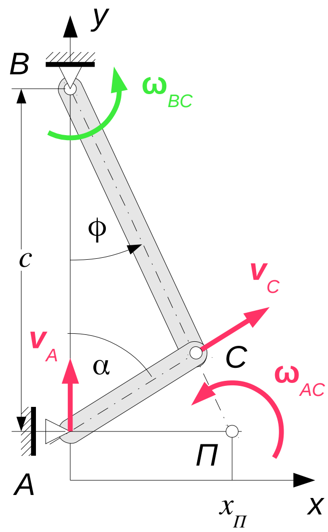
$$y_A = 8a - c$$

$$\frac{\sin(\phi)}{3a} = \frac{\sin(\alpha)}{6a} \quad \rightarrow \quad \sin(\alpha) = 2\sin(\phi)$$

$$\frac{c}{\sin(180° - \alpha - \phi)} = \frac{3a}{\sin(\phi)}$$

$$\rightarrow\ c=3a\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\sin(\phi)}$$
$$=3a\frac{\sin(\alpha)\cos(\phi)+\cos(\alpha)\sin(\phi)}{\sin(\phi)}$$
$$=3a\left(2\cos(\phi)+\cos(\alpha)\right)$$
$$=3a\left(2\cos(\phi)+\sqrt{1-4\sin^2(\phi)}\right)$$
$$y_A=8a-3a\left(2\cos(\phi)+\sqrt{1-4\sin^2(\phi)}\right)$$

b) <u>Momentanpol der Stange *AC*</u>



Aus der Zeichnung kann abgelesen werden:

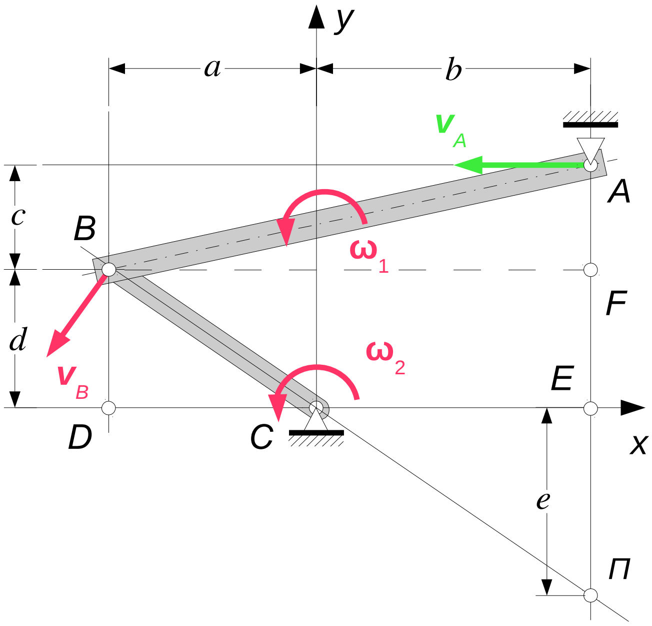
$$y_\Pi=y_A$$
$$x_\Pi=c\tan(\phi)$$
$$=3a\left(2\sin(\phi)+\tan(\phi)\sqrt{1-4\sin^2(\phi)}\right)$$

c) <u>Winkelgeschwindigkeit der Stange *AC*</u>

$$v_C=6a\,\omega_{BC}=-|\overline{\Pi C}|\,\omega_{AC}$$
$$|\overline{\Pi C}|=|\overline{\Pi B}|-6a\ ,\quad |\overline{\Pi B}|=\frac{c}{\cos(\phi)}$$
$$|\overline{\Pi C}|=3a\left(2+\frac{\sqrt{1-4\sin^2(\phi)}}{\cos(\phi)}-2\right)=3a\frac{\sqrt{1-4\sin^2(\phi)}}{\cos(\phi)}$$
$$\omega_{AC}=\frac{-6a}{|\overline{\Pi C}|}\omega_{BC}=-\frac{2\cos(\phi)}{\sqrt{1-4\sin^2(\phi)}}\omega_{BC}$$

Aufgabe 6

a) Momentanpol



Aus der Zeichnung kann abgelesen werden: $x_\Pi = b,\ y_\Pi = -e$

Die Dreiecke *CDB* und *CEΠ* sind ähnlich. Daher gilt:

$$\frac{e}{b} = \frac{d}{a} \rightarrow e = b\frac{d}{a}$$

Zahlenwerte:

$$x_\Pi = 169\,\mathrm{cm}\ ,\quad y_\Pi = -169\,\mathrm{cm}\cdot\frac{85}{124} = -115{,}8\,\mathrm{cm}$$

b) Winkelgeschwindigkeiten

Garagentor *AB*:

$$v_A = \omega_1 (c+d+e) \rightarrow \omega_1 = \frac{v_A}{c+d+e}$$

Stütze *BC*:

$$v_B = r_{\Pi B}\omega_1 = r_{CB}\omega_2 \quad \rightarrow \omega_2 = \frac{r_{\Pi B}}{r_{CB}}\omega_1$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke *CDB* und *BFΠ* folgt: $\dfrac{r_{\Pi B}}{r_{CB}} = \dfrac{a+b}{a}$

Damit gilt: $\omega_2 = \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)\omega_1$

Zahlenwerte:

$$\omega_1 = \frac{20\,\mathrm{cm/s}}{65\,\mathrm{cm} + 85\,\mathrm{cm} + 115{,}8\,\mathrm{cm}} = 0{,}07524\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\omega_2 = \left(1 + \frac{169}{124}\right) \cdot 0{,}07524\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 0{,}1778\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$