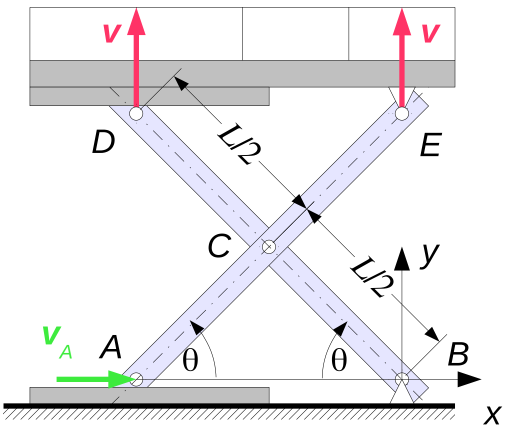
3.3 Analytische Kinematik

Lösungen

Aufgabe 1



Das Koordinatensystem wird in den feststehenden Punkt *B* gelegt.

Für die *x*-Koordinate von Punkt A gilt:

$$x_A = -2 \cdot \frac{L}{2} \cos(\theta) = -L\cos(\theta)$$

Ableiten führt auf die Geschwindigkeit:

$$v_A = \dot{x}_A = L\sin(\theta)\dot{\theta}$$

Daraus folgt:

$$\dot{\theta} = \frac{v_A}{L\sin(\theta)}$$

Die Geschwindigkeit v der Bühne ist gleich der Geschwindigkeit von v_E Punkt *E*. Aus

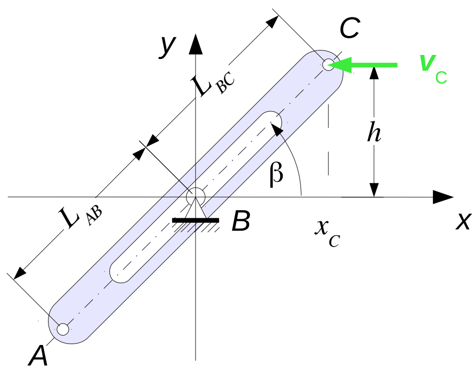
$$y_E = L\sin(\theta)$$

folgt durch Ableiten nach der Zeit:

$$v = v_E = \dot{y}_E = L\cos(\theta)\dot{\theta} = \cot(\theta)\, v_A$$

Aufgabe 2

a) <u>Winkelgeschwindigkeit</u>



Es gilt: $\omega_{AC} = \dot{\beta}$

Aus

$$\cot(\beta) = \frac{x_C}{h}$$

folgt durch Ableiten nach der Zeit:

$$-\frac{\dot{\beta}}{\sin^2(\beta)}=\frac{\dot{x}_C}{h}=-\frac{v_C}{h} \rightarrow \dot{\beta}=\frac{v_C}{h}\sin^2(\beta)$$

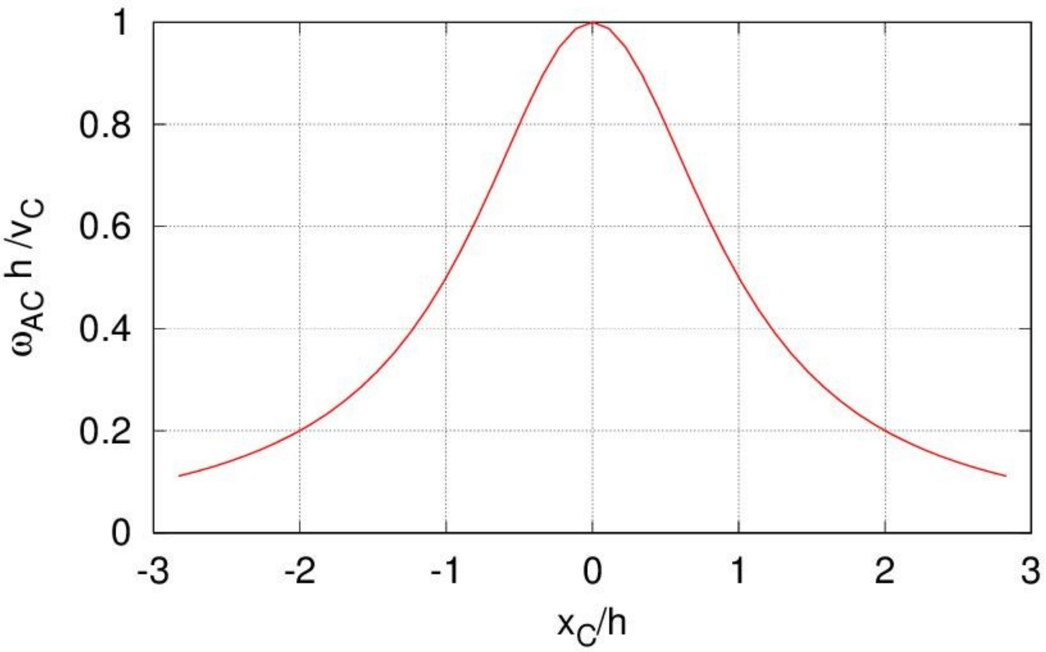
Mit

$$\sin(\beta)=\frac{h}{L_{BC}}=\frac{h}{\sqrt{x_C^2+h^2}}$$

gilt:

$$\omega_{AC}=\frac{v_C}{h}\frac{h^2}{x_C^2+h^2}=\frac{h\,v_C}{x_C^2+h^2}=\frac{1}{1+(x_C/h)^2}\frac{v_C}{h}$$

Graphische Darstellung:



b) <u>Geschwindigkeit von Punkt *A*</u>

Für die Koordinaten von Punkt *A* gilt:

$$x_A=-L_{AB}\cos(\beta),\quad y_A=-L_{AB}\sin(\beta)$$

Ableiten nach der Zeit ergibt:

$$v_{Ax}=\dot{x}_A=-\dot{L}_{AB}\cos(\beta)+L_{AB}\sin(\beta)\dot{\beta}$$

$$v_{Ay}=\dot{y}_A=-\dot{L}_{AB}\sin(\beta)-L_{AB}\cos(\beta)\dot{\beta}$$

Aus $L_{AB}=L-L_{BC}=L-\sqrt{x_C^2+h^2}$

folgt:

$$\dot{L}_{AB}=-\frac{x_C\,\dot{x}_C}{\sqrt{x_C^2+h^2}}=\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+h^2}}\,v_C$$

Mit

$$\cos(\beta)=\frac{x_C}{L_{BC}}=\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+h^2}}$$

folgt für die Geschwindigkeiten:

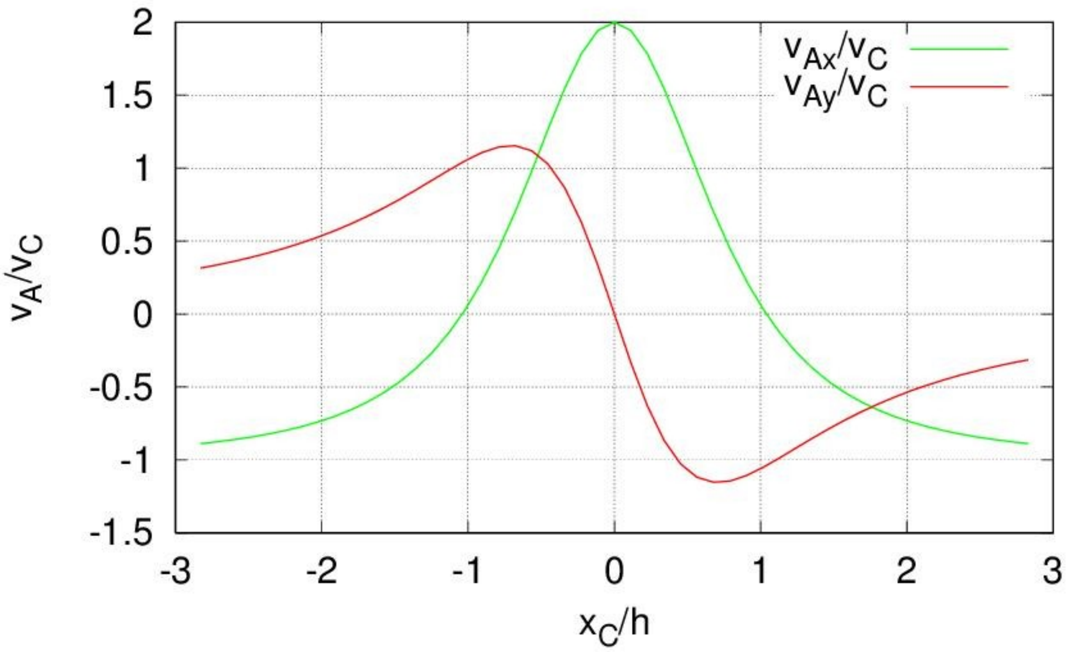
$$v_{Ax}=-\frac{x_C\,v_C}{\sqrt{x_C^2+h^2}}\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+h^2}}+\left(L-\sqrt{x_C^2+h^2}\right)\frac{h}{\sqrt{x_C^2+h^2}}\frac{h\,v_C}{x_C^2+h^2}$$

$$=\left(\left(\frac{L}{\sqrt{x_C^2+h^2}}-1\right)h^2-x_C^2\right)\frac{v_C}{x_C^2+h^2}=\left(\frac{L}{h}\frac{1}{\sqrt{1+(x_C/h)^2}}-1-\left(\frac{x_C}{h}\right)^2\right)\frac{v_C}{1+(x_C/h)^2}$$

$$v_{Ay}=-\frac{x_C\,v_C}{\sqrt{x_C^2+h^2}}\frac{h}{\sqrt{x_C^2+h^2}}-\left(L-\sqrt{x_C^2+h^2}\right)\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2+h^2}}\frac{h\,v_C}{x_C^2+h^2}$$

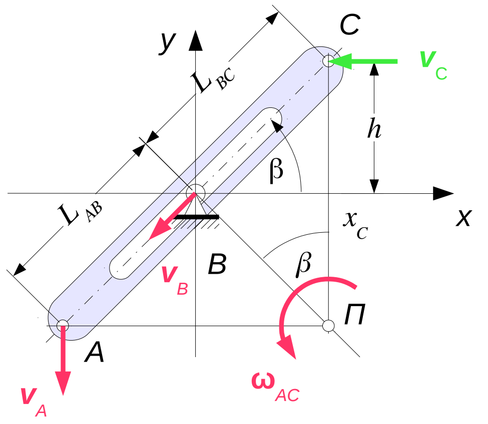
$$=-\left(1+\frac{L}{\sqrt{x_C^2+h^2}}-1\right)\frac{x_C\,h\,v_C}{x_C^2+h^2}=-\frac{L}{h}\frac{x_C/h}{\sqrt{\left(1+(x_C/h)^2\right)^3}}\,v_C$$

Graphische Darstellung für $L/h=3$:



c) Überprüfung mit Momentanpol

Koordinaten des Momentanpols:



$$x_\Pi = x_C$$

$$\frac{-y_\Pi}{x_C} = \cot(\beta) = \frac{x_C}{h} \rightarrow y_\Pi = -\frac{x_C^2}{h}$$

Winkelgeschwindigkeit:

$$v_C = (h - y_\Pi)\,\omega_{AC} = \left(h + \frac{x_C^2}{h}\right)\omega_{AC}$$

$$\rightarrow \omega_{AC} = \frac{h\, v_C}{h^2 + x_C^2}$$

Geschwindigkeiten:

$$v_{Ax} = -(y_A - y_\Pi)\,\omega_{AC} = -\left(-L_{AB}\sin(\beta) + \frac{x_C^2}{h}\right)\omega_{AC}$$

$$= \left(\left(L - \sqrt{x_C^2 + h^2}\right)\frac{h}{\sqrt{x_C^2 + h^2}} - \frac{x_C^2}{h}\right)\omega_{AC} = \left(\frac{L}{h}\frac{1}{\sqrt{1 + (x_C/h)^2}} - 1 - \left(\frac{x_C}{h}\right)^2\right)\frac{v_C}{1 + (x_C/h)^2}$$

$$v_{Ay} = (x_A - x_\Pi)\,\omega_{AC} = (-L_{AB}\cos(\beta) - x_C)\,\omega_{AC}$$

$$= -\left(\left(L - \sqrt{x_C^2 + h^2}\right)\frac{x_C}{\sqrt{x_C^2 + h^2}} + x_C\right)\omega_{AC} = -\frac{L}{h}\frac{x_C/h}{\sqrt{\left(1 + (x_C/h)^2\right)^3}}\, v_C$$

Aufgabe 3

a) Geometrie

Der Kosinussatz für das Dreieck *ABC* lautet:

$$L_{BC}^2(t) = L_{AB}^2 + L_{AC}^2 - 2\, L_{AB}\, L_{AC} \cos(\alpha(t))$$

Daraus folgt:

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{L_{AB}^2 + L_{AC}^2 - L_{BC}^2(t)}{2\, L_{AB}\, L_{AC}}$$

b) Winkelgeschwindigkeit des Kranarms

Ableiten der Beziehung für den Kosinus des Winkels α ergibt:

$$-\sin(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)=\frac{-2L_{BC}(t)\dot{L}_{BC}(t)}{2L_{AB}L_{AC}}=\frac{-L_{BC}(t)v_0}{L_{AB}L_{AC}}$$

Daraus folgt:

$$\omega_{AD}(t)=\frac{v_0}{L_{AB}L_{AC}}\frac{L_{BC}(t)}{\sin(\alpha(t))}$$

c) <u>Geschwindigkeiten</u>

Punkt *D* bewegt sich auf einer Kreisbahn um Punkt *A*. Daher gilt für seine Bahngeschwindigkeit:

$$v_D(t)=\omega_{AD}(t)L_{AD}=v_0\frac{L_{AD}L_{BC}(t)}{L_{AB}L_{AC}\sin(\alpha(t))}$$

Für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors gilt:

$$v_{Dx}(t)=-\omega_{AD}L_{AD}\sin(\alpha)=-v_0\frac{L_{AD}L_{BC}(t)}{L_{AB}L_{AC}}$$

$$v_{Dy}(t)=\omega_{AD}L_{AD}\cos(\alpha)=v_0\frac{L_{AD}L_{BC}(t)}{L_{AB}L_{AC}}\cot(\alpha(t))$$

d) <u>Beschleunigungen</u>

Die Bahnbeschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Bahngeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}a_{Dt}(t)=\dot{v}_D(t)&=v_0\frac{L_{AD}}{L_{AB}L_{AC}}\frac{\dot{L}_{BC}\sin(\alpha)-L_{BC}\cos(\alpha)\dot{\alpha}}{\sin^2(\alpha)}\\&=v_0\frac{L_{AD}}{L_{AB}L_{AC}}\frac{v_0\sin(\alpha(t))-\omega_{AD}L_{BC}(t)\cos(\alpha(t))}{\sin^2(\alpha(t))}\end{aligned}$$

Die Normalbeschleunigung ist gleich der Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{Dn}(t)=\omega_{AD}^2L_{AD}=\frac{v_0^2L_{AD}}{L_{AB}^2L_{AC}^2}\frac{L_{BC}^2(t)}{\sin^2(\alpha(t))}$$

Aufgabe 4

a) <u>Koordinaten</u>

$$x_C=2\cdot 2a\cos(\phi)=4a\cos(\phi),\quad y_C=0$$

$$x_E=a\cos(\phi)+2a\cos(\phi)=3a\cos(\phi),\quad y_E=a\sin(\phi)$$

b) Geschwindigkeiten

$$2\,a\cos(\phi)=L_{DE}(t)=L_0+v_0\,t$$

$$-2\,a\sin(\phi)\dot{\phi}=v_0 \;\rightarrow\; \omega=\dot{\phi}=-\frac{v_0}{2\,a}\frac{1}{\sin(\phi)}$$

$$v_{Cx}=\dot{x}_C=-4\,a\sin(\phi)\dot{\phi}=2\,v_0\;,\;\; v_{Cy}=\dot{y}_C=0$$

$$v_{Ex}=\dot{x}_E=-3\,a\sin(\phi)\dot{\phi}=\frac{3}{2}v_0$$

$$v_{Ey}=\dot{y}_E=a\cos(\phi)\dot{\phi}=-\frac{1}{2}v_0\cot(\phi)$$

c) Beschleunigungen

$$\dot{\omega}=\frac{v_0}{2\,a}\frac{\cos(\phi)}{\sin^2(\phi)}\dot{\phi}=-\frac{v_0^2}{4\,a^2}\frac{\cos(\phi)}{\sin^3(\phi)}$$

$$a_{Ex}=0\;,\;\; a_{Ey}=\dot{v}_{Ey}=\frac{v_0}{2}\frac{\dot{\phi}}{\sin^2(\phi)}=-\frac{v_0^2}{4\,a}\frac{1}{\sin^3(\phi)}$$