4.2 Allgemeine ebene Bewegung

Lösungen

Aufgabe 1

a) Massenträgheitsmoment

Für das Massenträgheitsmoment einer homogenen Kugel gilt:

$$J^S = \frac{2}{5} m r^2$$

Zahlenwert:

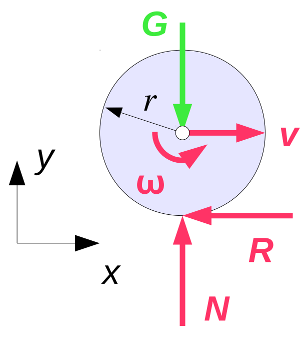
$$J^S = \frac{2}{5} \cdot 8\,\text{kg} \cdot 0{,}1125^2\,\text{m}^2 = \underline{0{,}0405\,\text{kgm}^2}$$

b) Gleitstrecke

Schwerpunktsatz:

$$\sum F_x = m a_x \; : \; -R = m\dot{v}$$

$$\sum F_y = 0 \; : \; N - G = 0 \;\rightarrow\; N = G = m g$$



Drallsatz bezüglich Schwerpunkt:

$$\sum M^S = J^S \dot{\omega} \; : \; -r R = J^S \dot{\omega}$$

Reibungsgesetz:

$$R = \mu N = \mu m g$$

Die Reibungskraft bremst die Geschwindigkeit der Kugel ab und versetzt gleichzeitig die Kugel in Drehung. Die Kugel gleitet solange, bis die Geschwindigkeit des Punktes, in dem die Kugel die Bahn berührt, verschwindet, d. h. bis die Rollbedingung

$$v + \omega r = 0$$

erfüllt ist.

Aus dem Schwerpunktsatz folgt: $a = \dot{v} = -\dfrac{R}{m} = -\mu g$

Werden Zeit und Ort ab dem Aufsetzen gemessen, so gilt für die Geschwindigkeit der Kugel:

$$v(t)=v_0+a\,t=v_0-\mu\,g\,t$$

Für den zurückgelegten Weg folgt:

$$s(t)=v_0\,t-\frac{1}{2}\mu\,g\,t^2$$

Aus dem Drallsatz folgt:

$$\dot{\omega}=-\frac{r\,R}{J}=-\frac{r\,\mu\,m\,g}{\frac{2}{5}m\,r^2}=-\frac{5}{2}\frac{\mu\,g}{r}$$

Die Winkelbeschleunigung ist konstant. Da die Winkelgeschwindigkeit am Anfang null ist, gilt:

$$\omega(t)=\dot{\omega}\,t=-\frac{5}{2}\frac{\mu\,g}{r}t$$

Die Zeit t_G, die vergeht, bis die Kugel rollt, lässt sich aus der Rollbedingung berechnen:

$$v_0-\mu\,g\,t_G-\frac{5}{2}\mu\,g\,t_G=0 \rightarrow v_0=\frac{7}{2}\mu\,g\,t_G \rightarrow t_G=\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu\,g}$$

Der zurückgelegte Weg berechnet sich zu

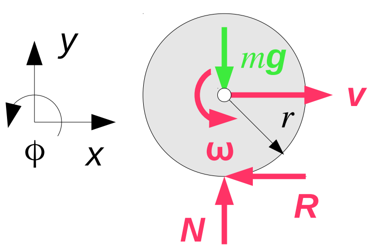
$$s_G=s(t_G)=\frac{2}{7}\frac{v_0^2}{\mu\,g}-\frac{1}{2}\mu\,g\left(\frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu\,g}\right)^2=\frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu\,g} \quad .$$

Zahlenwert:

$$s_G=\frac{12}{49}\cdot\frac{2{,}4^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{0{,}12\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2}=\underline{1{,}198\,\mathrm{m}}$$

Aufgabe 2

a) Zeit, während der die Münze gleitet



Schwerpunktsatz:

$$\sum F_x=m\,a_x \;:\; -R=m\,\dot{v}$$

$$\sum F_y=0 \;:\; N-m\,g=0 \rightarrow N=m\,g$$

Drallsatz bezüglich Schwerpunkt:

$$\sum M^S=J^S\,\ddot{\phi} \;:\; -r\,R=J^S\,\dot{\omega}$$

Reibungsgesetz: $R=\mu\,N=\mu\,m\,g$

Massenträgheitsmoment der homogenen Scheibe: $J^S = \frac{1}{2} m r^2$

Einsetzen von Reibungsgesetz und Massenträgheitsmoment in den Schwerpunktsatz und den Drallsatz ergibt:

$$m \dot{v} = -\mu m g \quad \rightarrow \quad \dot{v} = -\mu g$$

$$\frac{1}{2} m r^2 \dot{\omega} = -r \mu m g \quad \rightarrow \quad \dot{\omega} = -2 \frac{\mu g}{r}$$

Die Münze führt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und Drehbewegung aus. Mit den gegebenen Anfangsbedingungen folgt für Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit:

$$v(t) = v_0 - \mu g t$$

$$\omega(t) = \omega_0 - 2 \frac{\mu g}{r} t$$

Die Münze gleitet so lange, bis die Rollbedingung

$$v(t_G) + \omega(t_G) r = 0$$

erfüllt ist. Einsetzen ergibt

$$v_0 - \mu g t_G + \omega_0 r - 2 \mu g t_G = 0 \, .$$

Daraus folgt: $t_G = \frac{v_0 + \omega_0 r}{3 \mu g}$

b) <u>Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_G</u>

Einsetzen der Beziehung für t_G in das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz ergibt

$$v_G = v(t_G) = v_0 - \mu g \frac{v_0 + \omega_0 r}{3 \mu g} = v_0 - \frac{1}{3} v_0 - \frac{1}{3} \omega_0 r = \frac{1}{3} (2 v_0 - \omega_0 r) \, .$$

Entsprechend folgt für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_G = \omega(t_G) = \omega_0 - 2 \frac{\mu g}{r} \frac{v_0 + \omega_0 r}{3 \mu g} = \omega_0 - \frac{2}{3} \frac{v_0}{r} - \frac{2}{3} \omega_0 = \frac{1}{3} \left(\omega_0 - 2 \frac{v_0}{r} \right)$$

Fall 1: $\omega_G > 0$

Der Fall tritt ein für $\omega_0 > 2 \frac{v_0}{r}$.

Für die Geschwindigkeit folgt: $v_G < \frac{1}{3} (2 v_0 - 2 v_0) = 0$

Die Münze rollt zurück.

Fall 2: $\omega_G = 0$

Der Fall tritt ein für $\omega_0 = 2\dfrac{v_0}{r}$.

Für die Geschwindigkeit folgt: $v_G = \dfrac{1}{3}\left(2 v_0 - 2 v_0\right) = 0$

Die Münze bleibt stehen.

Fall 3: $\omega_G < 0$

Der Fall tritt ein für $\omega_0 < 2\dfrac{v_0}{r}$.

Für die Geschwindigkeit folgt: $v_G > \dfrac{1}{3}\left(2 v_0 - 2 v_0\right) = 0$

Die Münze rollt weiter.

c) <u>Zahlenwerte</u>

Für die gegebenen Zahlenwerte gilt:

$$2\frac{v_0}{r} = \frac{2\cdot 1\,\mathrm{m/s}}{0{,}0125\,\mathrm{m}} = 160\,\mathrm{s}^{-1} < 200\,\mathrm{s}^{-1} = \omega_0$$

Die Münze rollt zurück.

Die Zeit, während der die Münze gleitet, berechnet sich zu

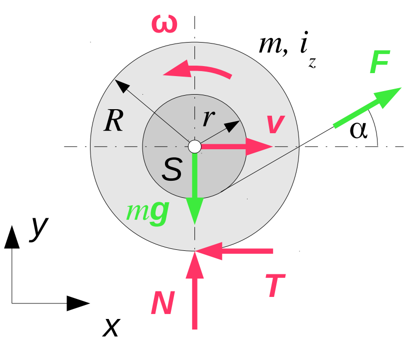
$$t_G = \frac{1\,\mathrm{m/s} + 200\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 0{,}0125\,\mathrm{m}}{3\cdot 0{,}4\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2} = \underline{0{,}2973\,\mathrm{s}} .$$

Aufgabe 3

Schwerpunktsatz:

$$\sum F_x = m\,a_x \quad : \quad F\cos(\alpha) - T = m\,\dot{v}$$

$$\sum F_y = 0 \quad : \quad N - m\,g + F\sin(\alpha) = 0$$



Drallsatz:

$$\sum M^S = J_z^S\,\dot{\omega} \quad : \quad r\,F - R\,T = m\,i_z^2\,\dot{\omega}$$

Aus dem Schwerpunktsatz folgt:

$$T = F\cos(\alpha) - m\,\dot{v}\ , \quad N = m\,g - F\sin(\alpha)$$

a) Jo-Jo hebt ab

Das Jo-Jo hebt ab, wenn für das Kräftegleichgewicht in *y*-Richtung eine negative Normalkraft nötig ist:

$$N = m\,g - F\sin(\alpha) < 0 \quad \rightarrow \quad F > \frac{m\,g}{\sin(\alpha)}$$

Für $F\sin(\alpha) < m\,g$ kann das Jo-Jo rollen oder rutschen.

b) Jo-Jo rollt

Winkelgeschwindigkeit ω und Schwerpunktsgeschwindigkeit v sind über die Rollbedingung gekoppelt:

$$v + \omega R = 0 \quad \rightarrow \quad v = -\omega R$$

Damit gilt für die Tangentialkraft:

$$T = F\cos(\alpha) - m\,\dot{v} = F\cos(\alpha) + m\,R\,\dot{\omega}$$

Einsetzen in den Drallsatz ergibt:

$$m\,i_z^2\,\dot{\omega} = r\,F - R\left(F\cos(\alpha) + m\,R\,\dot{\omega}\right)$$

Daraus kann die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ bestimmt werden:

$$m\left(i_z^2 + R^2\right)\dot{\omega} = \left(r - R\cos(\alpha)\right)F \quad \rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{F}{m}\,\frac{r - R\cos(\alpha)}{i_z^2 + R^2}$$

Für die Beschleunigung des Schwerpunkts folgt aus der Rollbedingung:

$$a_S = \dot{v} = -\dot{\omega}\,R = \frac{F}{m}\,\frac{R^2\cos(\alpha) - R\,r}{i_z^2 + R^2} = \frac{F}{m}\,\frac{\cos(\alpha) - r/R}{i_z^2/R^2 + 1}$$

Für $r/R < \cos(\alpha)$, d. h. für $r < R\cos(\alpha)$, rollt das Jo-Jo nach rechts, sonst nach links.

Damit das Jo-Jo rollt, muss die Haftbedingung erfüllt sein:

$$H = |T| < \mu_0 N$$

Einsetzen der aus dem Schwerpunktsatz und der Rollbedingung gefundenen Beziehungen für T und N ergibt:

$$\left|F\cos(\alpha) + m\,R\,\dot{\omega}\right| < \mu_0\left(m\,g - F\sin(\alpha)\right)$$

Einsetzen für die Winkelbeschleunigung führt auf:

$$F\cos(\alpha)+mR\dot{\omega}=F\left(\cos(\alpha)+R\frac{r-R\cos(\alpha)}{i_z^2+R^2}\right)=F\left(\cos(\alpha)+R^2\frac{r/R-\cos(\alpha)}{1+i_z^2/R^2}\right)$$

$$=\frac{F}{1+(i_z/R)^2}\left(\left(\frac{i_z}{R}\right)^2\cos(\alpha)+\frac{r}{R}\right)>0$$

Damit lautet die Haftbedingung:

$$\frac{F}{1+(i_z/R)^2}\left(\left(\frac{i_z}{R}\right)^2\cos(\alpha)+\frac{r}{R}\right)<\mu_0(m\,g-F\sin(\alpha))$$

Auflösen nach F ergibt:

$$F\left(\frac{r/R+(i_z/R)^2\cos(\alpha)}{1+(i_z/R)^2}+\mu_0\sin(\alpha)\right)<\mu_0\,m\,g$$

$$\rightarrow\quad F<\frac{\mu_0\,m\,g}{\dfrac{r/R+(i_z/R)^2\cos(\alpha)}{1+(i_z/R)^2}+\mu_0\sin(\alpha)}$$

c) <u>Jo-Jo rutscht</u>

Wenn die Haftbedingung nicht erfüllt ist, aber kein Abheben erfolgt, dann rutscht das Jo-Jo. In diesem Fall gilt für die Tangentialkraft T das Reibungsgesetz:

$$T=\mu\,N=\mu(m\,g-F\sin(\alpha))$$

Einsetzen in den Schwerpunktsatz ergibt:

$$m\,a_S=m\,\dot{v}=F\cos(\alpha)-\mu(m\,g-F\sin(\alpha))=F(\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha))-\mu\,m\,g$$

$$\rightarrow\quad a_S=\frac{F}{m}(\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha))-\mu\,g$$

Einsetzen in den Drallsatz ergibt:

$$m\,i_z^2\dot{\omega}=r\,F-R\mu(m\,g-F\sin(\alpha))=F(r+\mu\,R\sin(\alpha))-\mu\,m\,g\,R$$

$$\rightarrow\quad \dot{\omega}=\frac{F}{m}\frac{r+\mu\,R\sin(\alpha)}{i_z^2}-\mu\frac{g\,R}{i_z^2}$$

d) Ergebnis

$F>\dfrac{m\,g}{\sin(\alpha)}$		Jo-Jo hebt ab.
$F<\dfrac{m\,g}{\sin(\alpha)}$	$F<\dfrac{\mu_0 m\,g}{\dfrac{r/R+(i_z/R)^2\cos(\alpha)}{1+(i_z/R)^2}+\mu_0\sin(\alpha)}$ $\dot{\omega}=\dfrac{F}{m}\dfrac{r-R\cos(\alpha)}{i_z^2+R^2}$, $a_S=\dfrac{F}{m}\dfrac{\cos(\alpha)-r/R}{i_z^2/R^2+1}$	Jo-Jo rollt.
	$F>\dfrac{\mu_0 m\,g}{\dfrac{r/R+(i_z/R)^2\cos(\alpha)}{1+(i_z/R)^2}+\mu_0\sin(\alpha)}$ $\dot{\omega}=\dfrac{F}{m}\dfrac{r+\mu R\sin(\alpha)}{i_z^2}-\mu\dfrac{g\,R}{i_z^2}$, $a_S=\dfrac{F}{m}\left(\cos(\alpha)+\mu\sin(\alpha)\right)-\mu\,g$	Jo-Jo rutscht.

Aufgabe 4

a) Beschleunigung

Kinematik

Das Jo-Jo rollt auf dem Seil ab. Daher gilt für die Winkelgeschwindigkeit ω die Rollbedingung

$$\omega=\frac{v}{r} \text{ mit } r=\frac{d}{2}.$$

Kinetik

Die einzige äußere Kraft, die auf das System wirkt, ist die Gewichtskraft. Daher kann zunächst die Geschwindigkeit aus dem Energieerhaltungssatz ermittelt werden und daraus dann die Beschleunigung.

Das Nullniveau für die Lageenergie wird in Punkt *P* gelegt. Dann gilt für die Energien:

	Ruhelage	Ausgelenkte Lage
Lageenergie	$E_0^G=0$	$E^G(s)=-m\,g\,s$

	Ruhelage	Ausgelenkte Lage
Kinetische Energie	$E_0^K = 0$	$E^K(s) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J^S \omega^2$

Mit der Rollbedingung und $J^S = m i_S^2$ folgt:

$$E^K(s) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m i_S^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} m v^2 \left[1 + \left(\frac{i_S}{r}\right)^2\right]$$

Der Energieerhaltungssatz lautet: $E^K(s) + E^G(s) = E_0^K + E_0^G$

Einsetzen ergibt:

$$\frac{1}{2} m v^2(s) \left[1 + \left(\frac{i_S}{r}\right)^2\right] - m g s = 0$$

Daraus folgt:

$$v^2(s) = \frac{2 g s}{1 + (i_s / r)^2}$$

Die Beschleunigung berechnet sich zu

$$a = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} = \frac{g}{1 + (i_S / r)^2} .$$

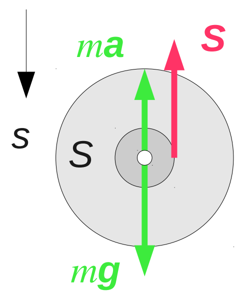
Zahlenwert: $a = \frac{g}{1 + (15/5)^2} = \frac{g}{1+9} = \frac{g}{10} = \underline{0{,}981\,\text{m/s}^2}$

b) Seilkraft

Dynamisches Gleichgewicht:

$$\sum F_s^D = 0 \;:\; m g - m a - S = 0$$

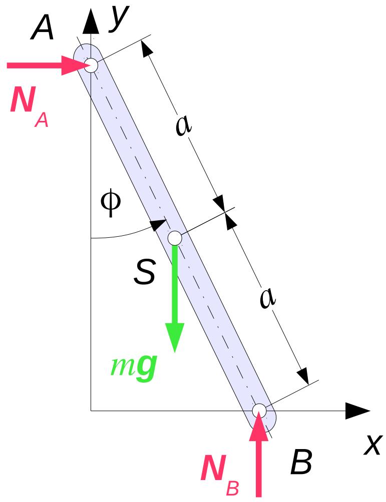
$$\rightarrow \; S = m(g - a) = \frac{9}{10} m g$$



Zahlenwert:

$$S = 0{,}9 \cdot 0{,}01\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 = \underline{0{,}08829\,\text{N}}$$

Aufgabe 5



Kinematik:

$$x_S = a\sin(\phi),\quad y_S = a\cos(\phi)$$

$$v_{Sx} = \dot{x}_S = a\cos(\phi)\dot{\phi} = a\omega\cos(\phi)$$

$$v_{Sy} = \dot{y}_S = -a\sin(\phi)\dot{\phi} = -a\omega\sin(\phi)$$

$$a_{Sx} = \dot{v}_{Sx} = -a\omega^2\sin(\phi) + a\dot{\omega}\cos(\phi)$$

$$a_{Sy} = \dot{v}_{Sy} = -a\omega^2\cos(\phi) - a\dot{\omega}\sin(\phi)$$

a) <u>Winkelgeschwindigkeit</u>

Die einzige Kraft, die Arbeit verrichtet, ist die konservative Gewichtskraft. Daher kann die Winkelgeschwindigkeit mit dem Energieerhaltungssatz berechnet werden.

Das Nullniveau für die Lageenergie wird bei $y = 0$ gewählt. Dann gilt für die Energien:

	Kinetische Energie	Lageenergie
$\phi = \phi_0$	$E^K(\phi_0) = 0$	$E^G(\phi_0) = m\,g\,y_S(\phi_0)$
ϕ	$E^K(\phi) = \frac{1}{2}m\left(v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2\right) + \frac{1}{2}J^S\omega^2$	$E^G(\phi) = m\,g\,y_S(\phi)$

Der Energieerhaltungssatz lautet: $E^K(\phi) + E^G(\phi) = E^K(\phi_0) + E^G(\phi_0)$

$$\frac{1}{2}m\left(v_{Sx}^2 + v_{Sy}^2 + i_S^2\omega^2\right) + m\,g\,y_S(\phi) = m\,g\,y_S(\phi_0)$$

Einsetzen der kinematischen Beziehungen ergibt:

$$\frac{1}{2}m\,a^2\omega^2\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) + \frac{i_S^2}{a^2}\right) + m\,g\,a\cos(\phi) = m\,g\,a\cos(\phi_0)$$

Daraus folgt:

$$\omega^2 = \frac{2\,g/a}{1 + (i_S/a)^2}\left(\cos(\phi_0) - \cos(\phi)\right)$$

Mit $(i_S/a)^2 = 1/3$ ergibt sich:

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{a}\left(\cos(\phi_0) - \cos(\phi)\right)}$$

b) Winkelbeschleunigung

Aus

$$\dot{\omega}=\frac{d\omega}{d\phi}\frac{d\phi}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\phi}=\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\phi}$$

folgt:

$$\dot{\omega}=\frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin(\phi)$$

c) Führungskräfte

Die Führungskräfte können mit dem Schwerpunktsatz berechnet werden:

$$\sum F_x=m\,a_{Sx}\quad:\quad N_A=m\,a_{Sx}$$
$$\sum F_y=m\,a_{Sy}\quad:\quad -m\,g+N_B=m\,a_{Sy}$$

Mit den kinematischen Beziehungen für die Beschleunigungen folgt:

$$N_A=m\,a\left(\dot{\omega}\cos(\phi)-\omega^2\sin(\phi)\right),\quad N_B=m\,g-m\,a\left(\dot{\omega}\sin(\phi)+\omega^2\cos(\phi)\right)$$

Einsetzen der Beziehungen für die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung ergibt:

$$\begin{aligned}N_A&=m\,a\left(\frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin(\phi)\cos(\phi)-\frac{3}{2}\frac{g}{a}\left(\cos(\phi_0)-\cos(\phi)\right)\sin(\phi)\right)\\&=\frac{3}{4}m\,g\sin(\phi)\left(3\cos(\phi)-2\cos(\phi_0)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_B&=m\,g-m\,a\left(\frac{3}{4}\frac{g}{a}\sin^2(\phi)+\frac{3}{2}\frac{g}{a}\left(\cos(\phi_0)-\cos(\phi)\right)\cos(\phi)\right)\\&=\frac{1}{4}m\,g\left(4-3\sin^2(\phi)+6\cos^2(\phi)-6\cos(\phi_0)\cos(\phi)\right)\\&=\frac{1}{4}m\,g\left(1+9\cos^2(\phi)-6\cos(\phi_0)\cos(\phi)\right)\end{aligned}$$

Die Normalkraft im Punkt *A* wird negativ für

$$\cos(\phi)<\frac{2}{3}\cos(\phi_0).$$

Die Normalkraft im Punkt *B* bleibt positiv.

Aufgabe 6

a) <u>Geschwindigkeit des Zylinders vor dem Stoß</u>

Für das Rollen von *A* nach *B* gilt der Energieerhaltungssatz. Wird das Nullniveau für die Lageenergie in Punkt *B* gelegt, gilt für die Energien des Zylinders:

- Punkt *A*: $E_A^G = m_Z g h$, $E_A^K = 0$
- Punkt *B*: $E_B^G = 0$, $E_B^K = \frac{1}{2} m_Z v_Z^2 + \frac{1}{2} J_Z \omega_Z^2$

Der Energieeerhaltungssatz lautet:

$$m_Z g h = \frac{1}{2} m_Z v_Z^2 + \frac{1}{2} J_Z \omega_Z^2$$

Aus der Rollbedingung folgt: $\omega_Z = \frac{v_Z}{r}$

Für das Massenträgheitsmoment eines homogenen Zylinders gilt:

$$J_Z = \frac{1}{2} m_Z r^2$$

Einsetzen in den Energieerhaltungssatz ergibt:

$$m_Z g h = \frac{1}{2} m_Z \left(1 + \frac{1}{2} \right) v_Z^2 = \frac{3}{4} m_Z v_z^2 \rightarrow v_Z = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{g h}$$

b) <u>Geschwindigkeit des Klotzes nach dem Stoß</u>

Es gilt:

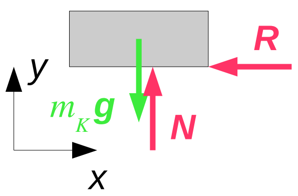
$$v_K = \frac{m_Z v_Z + k m_Z v_Z}{m_Z + m_K} = \frac{(1+k) m_Z}{m_Z + m_K} v_Z$$

Mit $k = 0{,}8$ und $m_K = 5 m_Z$ folgt:

$$v_K = \frac{1{,}8}{6} v_Z = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{g h} = \frac{\sqrt{3}}{5} \sqrt{g h}$$

c) <u>Vom Klotz zurückgelegte Strecke</u>

Kräfte am Klotz:



$$\sum F_y = 0 \; : \; N - m_K g = 0$$

$$\rightarrow N = m_K g$$

Reibungsgesetz: $R=\mu N=\mu m_K g$

Die zurückgelegte Strecke kann mit dem Arbeitssatz berechnet werden. Ist C der Punkt, an dem der Klotz zum Stillstand kommt, gilt:

$$E_C^K-E_B^K=W_{BC}^R$$

Mit

$$E_C^K=0,\quad E_B^K=\frac{1}{2}m_K v_K^2=\frac{1}{2}m_K\cdot\frac{3}{25}g\,h=\frac{3}{50}m_K g\,h$$

und

$$W_{BC}^R=-\mu\,m_K g\,s$$

folgt:

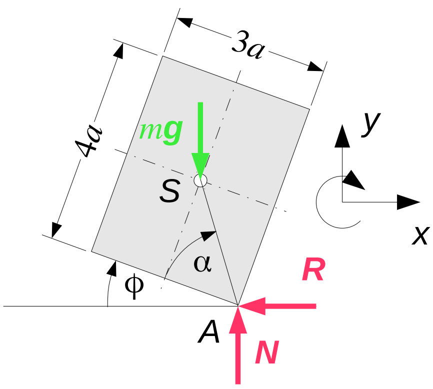
$$-\frac{3}{50}m_K g\,h=-\mu\,m_K g\,s\;\rightarrow\;s=\frac{3h}{50\mu}$$

Aufgabe 7

a) Massenträgheitsmoment

$$J^S=\frac{1}{12}m\left(4^2a^2+3^2a^2\right)=\frac{25}{12}m\,a^2$$

b) Kinetik



Geometrie:

$$|\overline{AS}|=\sqrt{\frac{9}{4}+4}\,a=\frac{5}{2}a$$

$$\cos(\alpha)=\frac{3}{5},\quad\sin(\alpha)=\frac{4}{5}$$

Schwerpunktsatz:

$$\sum F_x=m\,a_{Sx}\;:\;-R=m\,a_{Sx}$$

$$\sum F_y=m\,a_{Sy}\;:\;N-m\,g=m\,a_{Sy}$$

Drallsatz bezüglich Schwerpunkt:

$$\sum M^S=J^S\dot{\omega}\;:\;\frac{5}{2}a\sin(\alpha+\phi)R-\frac{5}{2}a\cos(\alpha+\phi)N=J^S\dot{\omega}$$

Mit

$$\sin(\alpha+\phi)=\sin(\alpha)\cos(\phi)+\cos(\alpha)\sin(\phi)=\frac{4}{5}\cos(\phi)+\frac{3}{5}\sin(\phi)$$

und

$$\cos(\alpha+\phi)=\cos(\alpha)\cos(\phi)-\sin(\alpha)\sin(\phi)=\frac{3}{5}\cos(\phi)-\frac{4}{5}\sin(\phi)$$

folgt:

$$\left(4\cos(\phi)+3\sin(\phi)\right)R-\left(3\cos(\phi)-4\sin(\phi)\right)N=\frac{25}{6}m\,a\,\dot{\omega}$$

Reibungsgesetz:

$$R=\mu N$$

c) Geschwindigkeit des Schwerpunkts

Bezugspunkt für die Bewegung ist Punkt *A*.

$$v_{Sx}=v_A+\frac{5}{2}a\,\omega\sin(\alpha+\phi)=v_A+\frac{1}{2}\omega\,a\left(4\cos(\phi)+3\sin(\phi)\right)$$

$$v_{Sy}=\frac{5}{2}a\,\omega\cos(\alpha+\phi)=\frac{1}{2}\omega\,a\left(3\cos(\phi)-4\sin(\phi)\right)$$

d) Beschleunigung des Schwerpunkts

$$\begin{aligned}a_{Sx}=\dot{v}_{Sx}&=a_A+\frac{5}{2}\dot{\omega}\,a\sin(\alpha+\phi)+\frac{5}{2}\omega^2 a\cos(\alpha+\phi)\\&=a_A+\frac{1}{2}\dot{\omega}\,a\left(4\cos(\phi)+3\sin(\phi)\right)+\frac{1}{2}\omega^2 a\left(3\cos(\phi)-4\sin(\phi)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{Sy}=\dot{v}_{Sy}&=\frac{5}{2}\dot{\omega}\,a\cos(\alpha+\phi)-\frac{5}{2}\omega^2 a\sin(\alpha+\phi)\\&=\frac{1}{2}\dot{\omega}\,a\left(3\cos(\phi)-4\sin(\phi)\right)-\frac{1}{2}\omega^2 a\left(4\cos(\phi)+3\sin(\phi)\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 8

a) Geschwindigkeiten nach dem Stoß

Mit $v_B = 0$ folgt aus den Gleichungen für den geraden zentrischen Stoß:

$$w_A=\frac{m_A v_A-k\,m_B v_A}{m_A+m_B}=\frac{\left(m-2\,k\,m\right)v_A}{3\,m}=\frac{1-2\,k}{3}v_A$$

$$w_B = \frac{m_A v_A + k\, m_A v_A}{m_A + m_B} = \frac{(m + k\, m) v_A}{3\, m} = \frac{1+k}{3} v_A$$

Mit $k = 0{,}8$ folgt:

$$w_A = -\frac{1}{5} v_A = -0{,}2\, v_A \; , \quad w_B = \frac{3}{5} v_A = 0{,}6\, v_A$$

b) <u>Weg des Klotzes</u>

Lösung mit Arbeitssatz:

Zustand 1: Zustand unmittelbar nach Stoß

Zustand 2: Klotz ist in Ruhe

Arbeit der Reibungskraft:

$$W_{12}^R = -\mu\, R\, s_B = -\mu\, m_B\, g\, s_B = -2\mu\, m\, g\, s_B$$

Energien:

	Zustand 1	Zustand 2
E^K	$\frac{1}{2} m_B w_B^2$	0
E^F	0	$\frac{1}{2} c\, s_B^2$

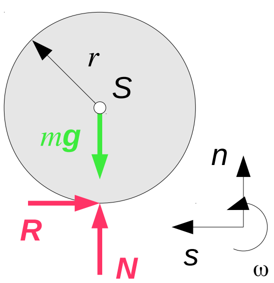
Arbeitssatz: $\left(E_2^K + E_2^F\right) - \left(E_1^K + E_1^F\right) = W_{12}^R$

$$\frac{1}{2} c\, s_B^2 - \frac{1}{2} m_B w_B^2 = -2\mu\, m\, g\, s_B$$

$$c\, s_B^2 + 4\mu\, m\, g\, s_B - 2\, m\, w_B^2 = 0$$

$$s_B = -\frac{2\mu\, m\, g}{c} + \sqrt{\left(\frac{2\mu\, m\, g}{c}\right)^2 + 2\frac{m}{c} w_B^2} = \sqrt{\left(\frac{2\mu\, m\, g}{c}\right)^2 + \frac{18}{25}\frac{m}{c} v_A^2} - \frac{2\mu\, m\, g}{c}$$

c) <u>Ortskoordinate für Übergang zum Rollen</u>



Schwerpunktsatz:

$$\sum F_s = m\ddot{s} \;:\; -R = m\ddot{s}$$

$$\sum F_n = 0 \;:\; N - m\, g = 0$$

Reibungsgesetz:

$$R = \mu\, N$$

Daraus folgt: $a = \ddot{s} = -\dfrac{R}{m} = -\mu\, g$

Drallsatz: $\sum M^S = J^S \dot{\omega}$: $r\, R = J^S \dot{\omega}$

Massenträgheitsmoment der homogenen Kugel: $J^S = \dfrac{2}{5} m\, r^2$

Damit folgt: $\dot{\omega} = \dfrac{r\, R}{J^S} = \dfrac{5}{2} \dfrac{\mu\, g}{r}$

Beschleunigung und Winkelbeschleunigung sind konstant. Die Kugel führt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus.

Anfangsbedingungen:

$$\dot{s}(0) = v(0) = w_A \ , \ \omega(0) = -\frac{v_A}{r}$$

Kinematische Gleichungen:

$$v(t) = w_A - \mu\, g\, t \ , \ \omega(t) = -\frac{v_A}{r} + \frac{5}{2} \frac{\mu\, g}{r} t$$

Rollbedingung:

$$v(t_R) - r\, \omega(t_R) = 0$$

$$\frac{1}{5} v_A - \mu\, g\, t_R + v_A - \frac{5}{2} \mu\, g\, t_R = 0$$

$$\frac{6}{5} v_A = \frac{7}{2} \mu\, g\, t_R \ \rightarrow \ t_R = \frac{12}{35} \frac{v_A}{\mu\, g}$$

Zurückgelegte Strecke:

$$s_B = w_A t_R - \frac{1}{2} \mu\, g\, t_R^2 = \frac{12}{35} \frac{v_A}{\mu\, g} \left(\frac{v_A}{5} - \frac{6}{35} v_A \right) = \frac{12}{1225} \frac{v_A^2}{\mu\, g}$$

Aufgabe 9

a) <u>Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung</u>

Wenn das Nullniveau für die Lageenergie in die *xy*-Ebene gelegt wird, gilt für die Energien:

	Punkt *A*	beliebiger Punkt
E^G	$m\, g\, H$	$m\, g\, z(s)$

	Punkt A	beliebiger Punkt
E^K	0	$\frac{1}{2} m v^2(s)+\frac{1}{2} J \omega^2(s)$

Damit lautet der Energieerhaltungssatz:

$$m\,g\,H = m\,g\,z(s)+\frac{1}{2} m v^2(s)+\frac{1}{2} J \omega^2(s)$$

Mit dem Massenträgheitsmoment

$$J=\frac{2}{5} m r^2 \text{ ,}$$

der Rollbedingung

$$\omega=\frac{v}{r}$$

und

$$z(s)=H-\frac{3}{5} s$$

folgt:

$$m\,g\,H=m\,g\left(H-\frac{3}{5} s\right)+\frac{1}{2} m\left(1+\frac{2}{5}\right) v^2(s)$$

Auflösen ergibt:

$$\frac{3}{5} g\,s=\frac{7}{10} v^2(s) \;\rightarrow\; v^2(s)=\frac{6}{7} g\,s \;\rightarrow\; v(s)=\sqrt{\frac{6}{7} g\,s}$$

Für die Bahnbeschleunigung folgt:

$$a_t(s)=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}=\frac{3}{7} g$$

b) <u>Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und Ort-Zeit-Gesetz</u>

Die Bahnbeschleunigung ist konstant. Damit handelt es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Also gilt:

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v(t)=\frac{3}{7} g\,t$

Ort-Zeit-Gesetz: $s(t)=\frac{3}{14} g\,t^2$

c) Einheitstangentektor

$$\boldsymbol{e}_t(s)=\frac{d\,\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{1}{5}\left(-4\sin\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_x+4\cos\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_y-3\,\boldsymbol{e}_z\right)$$

d) Normalbeschleunigung

Für den Vektor der Normalbeschleunigung gilt:

$$\boldsymbol{a}_n(s)=v(s)\,\dot{\boldsymbol{e}}_t(s)=v(s)\,\frac{d\,\boldsymbol{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt}=v^2(s)\,\frac{d\,\boldsymbol{e}_t}{ds}$$

Mit

$$\frac{d\,\boldsymbol{e}_t}{ds}=-\frac{4}{5\,R}\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_z\right)$$

folgt für den Betrag der Normalbeschleunigung:

$$a_n(s)=\frac{6}{7}\,g\,s\cdot\frac{4}{5\,R}=\frac{24}{35}\,\frac{g\,s}{R}$$

Alternativer Lösungsweg

Aus

$$\boldsymbol{e}_t(t)=\boldsymbol{e}_t(s(t))=\frac{1}{5}\left(-4\sin\left(\frac{3\,g\,t^2}{14\,R}\right)\boldsymbol{e}_x+4\cos\left(\frac{3\,g\,t^2}{14\,R}\right)\boldsymbol{e}_z-3\,e_z\right)$$

folgt:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t(t)=\frac{6\,g\,t}{70\,R}\left(-4\cos\left(\frac{3\,g\,t^2}{14\,R}\right)\boldsymbol{e}_x-4\sin\left(\frac{3\,g\,t^2}{14\,R}\right)\boldsymbol{e}_y\right)$$

Mit

$$\frac{6\,g\,t}{70\,R}=\frac{2}{10}\,\frac{1}{R}\,\frac{3}{7}\,g\,t=\frac{2}{10\,R}\,v=\frac{1}{5\,R}\sqrt{\frac{6}{7}\,g\,s}$$

und

$$\frac{3\,g\,t^2}{14\,R}=\frac{s}{R}$$

folgt:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t(s)=-\frac{4}{5\,R}\sqrt{\frac{6}{7}\,g\,s}\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_y\right)$$

Damit gilt für den Vektor der Normalbeschleunigung:

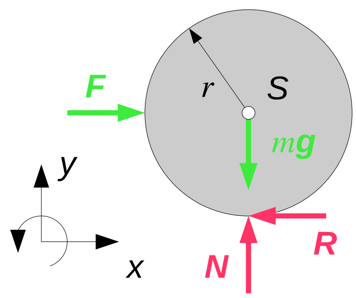
$$\boldsymbol{a}_n(s) = v(s)\dot{\boldsymbol{e}}_t(s) = -\frac{24\,g\,s}{35\,R}\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_x + \sin\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_y\right)$$

Für den Betrag folgt:

$$a_n(s) = \frac{24\,g\,s}{35\,R}$$

Aufgabe 10

a) <u>Beschleunigungen</u>



$$\sum F_x = m\,a_x \;:\; F - R = m\,a \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \;:\; N - m\,g = 0$$

$$\rightarrow\; N = m\,g$$

$$\sum M^S = J^S\,\dot{\omega} \;:\; -r\,R = J^S\,\dot{\omega} \qquad (2)$$

Massenträgheitsmoment: $J^S = \frac{2}{5}m\,r^2$

Kräfte: $F = c(s_0 - s)$, $R = \mu\,N = \mu\,m\,g$

Einsetzen der Kräfte in (1):

$$m\,a = c(s_0 - s) - \mu\,m\,g \;\rightarrow\; a(s) = \frac{c}{m}(s_0 - s) - \mu\,g$$

Einsetzen der Kräfte in (2):

$$\frac{2}{5}m\,r^2\,\dot{\omega} = -r\,\mu\,m\,g \;\rightarrow\; \dot{\omega} = -\frac{5}{2}\mu\frac{g}{r}$$

b) <u>Geschwindigkeit</u>

Mit $v_0 = v(0) = 0$ gilt: $v(s) = \sqrt{2\int_0^s a(\bar{s})\,d\bar{s}}$

Mit

$$\int_0^s a(\bar{s})\,d\bar{s} = \frac{c}{m}\int_0^s (s_0 - \bar{s})\,d\bar{s} - \mu\,g\,s = \frac{c}{m}\left[-\frac{1}{2}(s_0 - \bar{s})^2\right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=s} - \mu\,g\,s$$

$$= -\frac{c}{2\,m}\left((s_0 - s)^2 - s_0^2\right) - \mu\,g\,s = \frac{c}{2\,m}(2\,s_0\,s - s^2) - \mu\,g\,s$$

folgt:

$$v(s)=\sqrt{\frac{c}{m}\left(2 s_0 s-s^2\right)-2\mu g s}$$