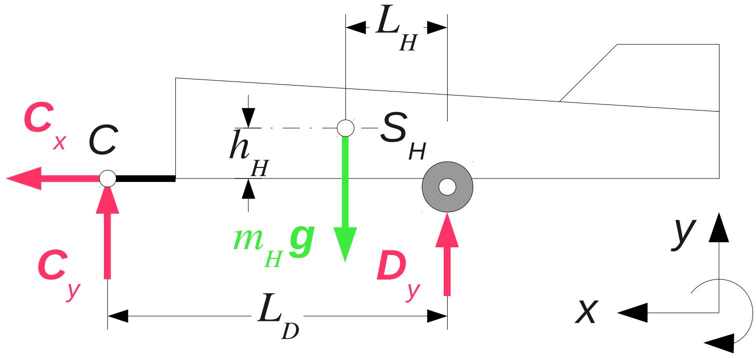
4.3 Systeme von starren Körpern

Lösungen

Aufgabe 1

<u>Anhänger</u>



$$\sum F_x = m\, a_{Sx} \ : \ C_x = m_H a \tag{1}$$

$$\sum F_y = m\, a_{Sy} \ : \ C_y - m_H g + D_y = 0 \ \rightarrow \ C_y = m_H g - D_y \tag{2}$$

$$\sum M^{S_H} = J^S \dot{\omega} \ : \ h_H C_x + (L_D - L_H) C_y - L_H D_y = 0 \tag{3}$$

Einsetzen von (1) und (2) in (3) ergibt:

$$h_H m_H a + (L_D - L_H)(m_H g - D_y) - L_H D_y = 0$$

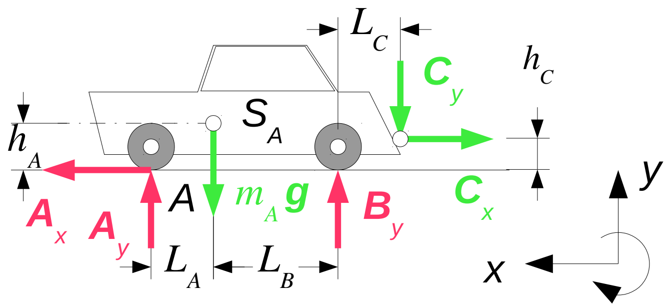
$$\rightarrow \ (h_H a + (L_D - L_H) g) m_H = L_D D_y \quad \rightarrow \ D_y = m_H \left(\frac{h_H}{L_D} a + \left(1 - \frac{L_H}{L_D} \right) g \right) \tag{4}$$

Einsetzen von (4) in (2) ergibt: $C_y = \frac{m_H}{L_D} (L_H g - h_H a)$ (5)

Zahlenwerte:

	a) a = 0 m/s²	b) a = 0,5 m/s²	c) a = -1 m/s²	
C_x	0	0,250	-0,500	kN
C_y	1,226	1,164	1,351	kN
D_y	3,679	3,741	3,554	kN

PKW



$$\sum F_x = m a_{Sx} \;:\; A_x - C_x = m_A a \;\rightarrow\; A_x = C_x + m_A a \tag{6}$$

$$\sum F_y = m a_{Sy} \;:\; A_y - m_A g + B_y - C_y = 0 \;\rightarrow\; A_y = m_A g - B_y + C_y \tag{7}$$

$$\sum M^{S_A} = J^S \dot{\omega} \;:\; h_A A_x + L_A A_y - L_B B_y - (h_A - h_C) C_x + (L_B + L_C) C_y = 0 \tag{8}$$

Einsetzen von (7) in (8) ergibt:

$$h_A A_x + L_A m_A g - (L_A + L_B) B_y + (L_A + L_B + L_C) C_y - (h_A - h_C) C_x = 0$$

Mit (6) folgt:

$$h_C C_x + (h_A a + L_A g) m_A + (L_A + L_B + L_C) C_y = (L_A + L_B) B_y$$

$$\rightarrow\; B_y = \frac{(h_A a + L_A g) + h_C C_x + (L_A + L_B + L_C) C_y}{L_A + L_B} \tag{9}$$

Zahlenwerte:

	a) a = 0 m/s²	b) a = 0,5 m/s²	c) a = -1 m/s²	
A_x	0	1,250	-2,500	kN
A_y	12,60	12,31	13,19	kN
B_y	8,243	8,476	7,778	kN

Aufgabe 2

a) Geschwindigkeit als Funktion des Weges

Die einzige Kraft, die Arbeit verrichtet, ist die Gewichtskraft. Daher lässt sich die Aufgabe mit dem Energieerhaltungssatz lösen.

Das Nullniveau für die Lageenergie wird in den Startpunkt gelegt. Dann sind die kinetische und die potenzielle Energie beim Start null. Der Energieerhaltungssatz lautet:

$$E^K(s)+E^G(s)=0$$

Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der translatorischen kinetischen Energie der Seifenkiste und der Räder sowie der rotatorischen kinetischen Energie der Räder:

$$E^K(s)=\frac{1}{2g}\left(G_S+4G_R\right)v^2(s)+\frac{1}{2g}\cdot 4G_R i_R^2\,\omega^2(s)$$

Da die Räder rollen, gilt die Rollbedingung

$$v(s)=r\,\omega(s) \;\rightarrow\; \omega(s)=\frac{v(s)}{r}\,.$$

Damit gilt für die kinetische Energie:

$$E^K(s)=\frac{1}{2g}\left[G_S+4G_R\left(1+\frac{i_R^2}{r^2}\right)\right]v^2(s)$$

Für die Lageenergie gilt:

$$E^G(s)=-\left(G_S+4G_R\right)s\sin(\alpha)$$

Damit lautet der Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2g}\left[G_S+4G_R\left(1+\frac{i_R^2}{r^2}\right)\right]v^2(s)-\left(G_S+4G_R\right)s\sin(\alpha)=0$$

Daraus folgt: $v(s)=\sqrt{2gs\,\frac{\left(G_S+4G_R\right)\sin(\alpha)}{G_S+4G_R\left(1+\left(i_R/r\right)^2\right)}}$

b) <u>Geschwindigkeit für $s=s_1$</u>

Nach Zurücklegen von $30\ \mathrm{m}$ hat die Seifenkiste die Geschwindigkeit

$$v_1=\sqrt{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 30\,\mathrm{m}\cdot\frac{\left(550\,\mathrm{N}+4\cdot 25\,\mathrm{N}\right)\sin(30°)}{550\,\mathrm{N}+100\,\mathrm{N}\cdot\left(1+\left(0{,}09/0{,}15\right)^2\right)}}=\underline{16{,}70\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

c) <u>Beschleunigung</u>

Für die Beschleunigung gilt: $a=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(v^2(s)\right)$

Aus

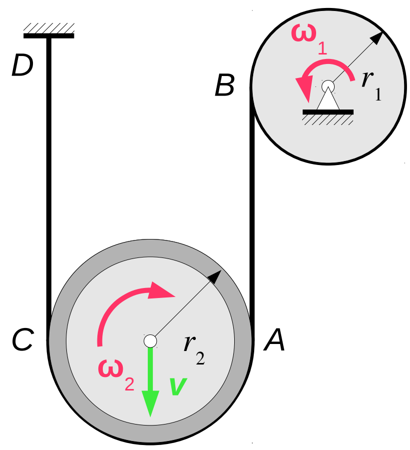
$$v^2(s) = 2gs\frac{(G_S + 4G_R)\sin(\alpha)}{G_S + 4G_R\left(1 + (i_R/r)^2\right)}$$

folgt:

$$a = \frac{(G_S + 4G_R)\sin(\alpha)}{G_S + 4G_R\left(1 + (i_R/r)^2\right)}g$$

Zahlenwert: $a = \frac{(550\,N + 100\,N)\sin 30°}{550\,N + 100\,N\left(1 + (0{,}09/0{,}15)^2\right)}g = \underline{0{,}4738\,g = 4{,}648\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

Aufgabe 3



a) <u>Kinematik</u>

Die Rolle 2 rollt auf dem Seilstück *CD* ab. Daher gilt:

$$0 = v_C = v - \omega_2 r_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{v}{r_2}$$

Da das Seil dehnstarr ist, gilt $v_A = v_B$. Mit

$$v_A = v + \omega_2 r_2 \quad \text{und} \quad v_B = \omega_1 r_1$$

folgt:

$$v + \omega_2 r_2 = \omega_1 r_1 \rightarrow \omega_1 = \frac{v}{r_1} + \omega_2\frac{r_2}{r_1} = \frac{v}{r_1} + \frac{v}{r_2}\frac{r_2}{r_1} = 2\frac{v}{r_1}$$

b) <u>Geschwindigkeit der Rolle 2</u>

Die einzige am System angreifende äußere Kraft, die Arbeit verrichtet, ist die Gewichtskraft. Die Geschwindigkeit kann daher mit dem Energieerhaltungssatz bestimmt werden. Dazu wird das Nullniveau für die Lageenergie von Rolle 2 in die Ruhelage gelegt. Dann gilt für die einzelnen Energien:

	Ruhelage	Ausgelenkte Lage
Lageenergie:	$E_0^G = 0$	$E^G(s) = -m_2 g s$
Kinetische Energie:	$E_0^K = 0$	$E^K(s) = \frac{1}{2}\left(J_1\omega_1^2 + m_2 v^2 + J_2\omega_2^2\right)$

Mit den kinematischen Beziehungen folgt für die kinetische Energie:

$$E^K(s)=\frac{1}{2}\left(m_2+4\frac{J_1}{r_1^2}+\frac{J_2}{r_2^2}\right)v^2(s)$$

Der Energieerhaltungssatz lautet: $E^K(s)+E^G(s)=E_0^K+E_0^G$

Einsetzen ergibt:

$$\frac{1}{2}\left(m_2+4\frac{J_1}{r_1^2}+\frac{J_2}{r_2^2}\right)v^2(s)-m_2\,g\,s=0$$

Daraus folgt: $v^2(s)=\dfrac{2\,m_2\,g\,s}{m_2+4\dfrac{J_1}{r_1^2}+\dfrac{J_2}{r_2^2}} \rightarrow v(s)=\sqrt{\dfrac{2\,m_2\,g\,s}{m_2+4\dfrac{J_1}{r_1^2}+\dfrac{J_2}{r_2^2}}}$

c) <u>Beschleunigung der Rolle 2</u>

Die Beschleunigung der Rolle 2 berechnet sich zu

$$a=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}=\frac{m_2}{m_2+4\dfrac{J_1}{r_1^2}+\dfrac{J_2}{r_2^2}}g\,.$$

d) <u>Seilkräfte</u>

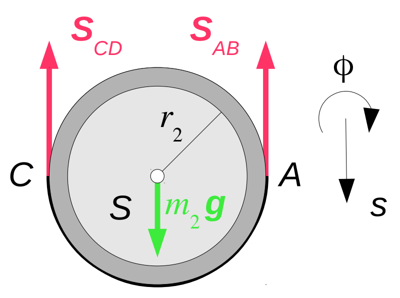
Die Seilkräfte können aus den kinetischen Gleichungen für die Rolle 2 berechnet werden.

Schwerpunktsatz in *s*-Richtung:

$$\sum F_s=m\,a\ :\ -S_{CD}-S_{AB}+m_2\,g=m_2\,a$$

Drallsatz bezüglich Schwerpunkt *S*:

$$\sum M^S=J^S\ddot{\phi}\ :\ r_2\left(S_{CD}-S_{AB}\right)=J_2\dot{\omega}_2$$



Kinematik:

$$\dot{\omega}_2=\frac{\dot{v}}{r_2}=\frac{a}{r_2}$$

Damit stehen zur Ermittlung der beiden Seilkräfte die folgenden beiden Gleichungen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} -S_{CD}-S_{AB} &= m_2(a-g) \\ S_{CD}-S_{AB} &= \frac{J_2}{r_2^2}a \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$-2S_{AB}=m_2(a-g)+\frac{J_2}{r_2^2}a\,.$$

Daraus folgt

$$S_{AB}=\frac{1}{2}m_2 g-\frac{1}{2}\left(m_2+\frac{J_2}{r_2^2}\right)a\,.$$

Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung ergibt

$$2S_{CD}=\frac{J_2}{r_2^2}a-m_2 a+m_2 g\,.$$

Daraus folgt

$$S_{CD}=\frac{1}{2}m_2 g-\frac{1}{2}\left(m_2-\frac{J_2}{r_2^2}\right)a\,.$$

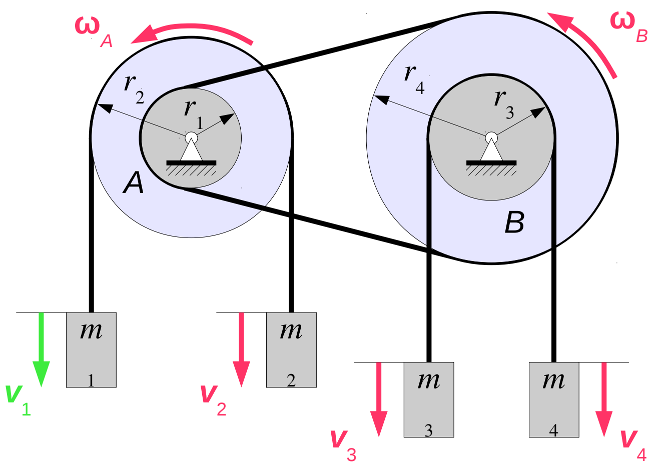
Einsetzen des Ergebnisses für die Beschleunigung führt auf

$$S_{AB}=\frac{1}{2}m_2 g\left(1-\frac{m_2+J_2/r_2^2}{m_2+4J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}\right)=m_2 g\frac{2J_1/r_1^2}{m_2+4J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}$$

und

$$S_{CD}=\frac{1}{2}m_2 g\left(1-\frac{m_2-J_2/r_2^2}{m_2+4J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}\right)=m_2 g\frac{2J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}{m_2+4J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}\,.$$

Aufgabe 4



a) <u>Kinematische Beziehungen</u>

Rolle 1:

$$v_1=\omega_A r_2 \rightarrow \omega_A=\frac{v_1}{r_2}$$

$$v_2=-\omega_A r_2=-v_1$$

Rolle 2:

$$\omega_A r_1=\omega_B r_4$$

$$\rightarrow \quad \omega_B = \frac{r_1}{r_4}\omega_A = \frac{r_1}{r_2 r_4} v_1$$

$$v_3 = \omega_B r_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} v_1$$

$$v_4 = -\omega_B r_3 = -v_3 = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} v_1$$

Zahlenwerte:

$$\frac{r_1}{r_2 r_4} = \frac{10\,\text{cm}}{20\,\text{cm}\cdot 30\,\text{cm}} = \frac{1}{60}\frac{1}{\text{cm}} = \frac{100}{60}\frac{1}{\text{m}} = \frac{5}{3}\frac{1}{\text{m}}$$

$$\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = \frac{10\,\text{cm}\cdot 15\,\text{cm}}{20\,\text{cm}\cdot 30\,\text{cm}} = \frac{1}{4}$$

$$\omega_A = \frac{v_1}{0{,}2\,\text{m}} = \frac{5\,v_1}{\text{m}}\,,\quad \omega_B = \frac{5\,v_1}{3\,\text{m}}\,,\quad v_3 = \frac{v_1}{4}\,,\quad v_4 = -\frac{v_1}{4}$$

b) <u>Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen</u>

Das System besteht aus starr miteinander verbundenen starren Körpern, und die einzige Kraft, die Arbeit verrichtet, ist die konservative Gewichtskraft. Das System kann also mit dem Energieerhaltungssatz berechnet werden. Dazu wird zunächst $v_1(s_1)$ ermittelt. Daraus lassen sich alle anderen Größen mithilfe der kinematischen Beziehungen ermitteln.

Das Nullniveau für die Lageenergien der Massen wird jeweils in die Ruhelage gelegt. Dann ist die Gesamtenergie in der Ruhelage null, und der Energieerhaltungssatz lautet:

$$E^K(s_1) + E^G(s_1) = 0$$

Kinetische Energie in der ausgelenkten Lage:

$$E^K(s_1) = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + m_3 v_3^2 + m_4 v_4^2 + J_A \omega_A^2 + J_B \omega_B^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4) + \frac{J_A}{r_2^2} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{J_B}{r_4^2}\right) v_1^2$$

Lageenergie in der ausgelenkten Lage:

$$E^G(s_1) = -\left(m_1 s_1 + m_2 s_2 + m_3 s_3 + m_4 s_4\right) g$$

Mit $s_2 = -s_1$, $s_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} s_1$ und $s_4 = -s_3$ folgt:

$$E^G(s_1) = -\left(m_1 - m_2 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}(m_3 - m_4)\right) g\, s_1$$

Einsetzen in den Energieerhaltungssatz ergibt:

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_3 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4) + \frac{J_A}{r_2^2} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{J_B}{r_4^2}\right) v_1^2 = \left(m_1 - m_2 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}(m_3 - m_4)\right) g\, s_1$$

$$\rightarrow \quad v_1^2 = \frac{2\left(m_1 - m_2 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}(m_3 - m_4)\right) g\, s_1}{m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_3 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4) + \frac{J_A}{r_2^2} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{J_B}{r_4^2}}$$

Für die Beschleunigung von Masse 1 folgt:

$$a_1 = \frac{1}{2}\frac{dv_1^2}{ds_1} = \frac{\left(m_1 - m_2 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}(m_3 - m_4)\right) g}{m_1 + m_2 + \left(\frac{r_1 r_3}{r_3 r_4}\right)^2 (m_3 + m_4) + \frac{J_A}{r_2^2} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{J_B}{r_4^2}}$$

Für die übrigen Beschleunigungen folgt aus den kinematischen Beziehungen:

$$a_2 = -a_1\,,\quad a_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} a_1 = \frac{1}{4} a_1\,,\quad a_4 = -a_3$$

Für die Winkelbeschleunigungen folgt aus den kinematischen Beziehungen:

$$\dot{\omega}_A = \frac{a_1}{r_2}\,,\quad \dot{\omega}_B = \frac{r_1 a_1}{r_2 r_4}$$

Zahlenwerte:

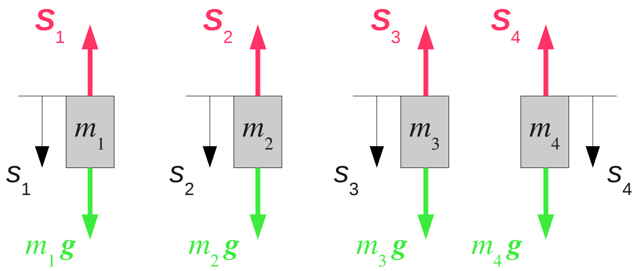
$$a_1 = \frac{(60 - 24 + 0{,}25(36 - 60))\,\mathrm{g}}{60 + 24 + 0{,}25^2(36 + 60) + 16000/20^2 + (10/20)^2 \cdot 72000/30^2} = 0{,}2\,\mathrm{g}$$

$$a_2 = -0{,}2\,\mathrm{g}\,,\quad a_3 = \frac{0{,}2}{4}\,\mathrm{g} = 0{,}05\,g\,,\quad a_4 = -0{,}05\,\mathrm{g}$$

$$\dot{\omega}_A = \frac{0{,}2\,g}{0{,}2\,\mathrm{m}} = 9{,}81\,\mathrm{s}^{-2}\,,\quad \dot{\omega}_B = \frac{10\,\mathrm{cm}}{30\,\mathrm{cm}} \cdot \dot{\omega}_A = \frac{\dot{\omega}_A}{3} = 3{,}27\,\mathrm{s}^{-2}$$

c) Seilkräfte

Die Seilkräfte können aus den Schwerpunktsätzen für die Massen berechnet werden:



$$m_1 g - S_1 = m_1 a_1$$
$$m_2 g - S_2 = m_2 a_2$$
$$m_3 g - S_3 = m_3 a_3$$
$$m_4 g - S_4 = m_4 a_4$$

Daraus folgt:

$$S_1 = m_1 (g - a_1), \quad S_2 = m_2 (g - a_2), \quad S_3 = m_3 (g - a_3), \quad S_4 = m_4 (g - a_4)$$

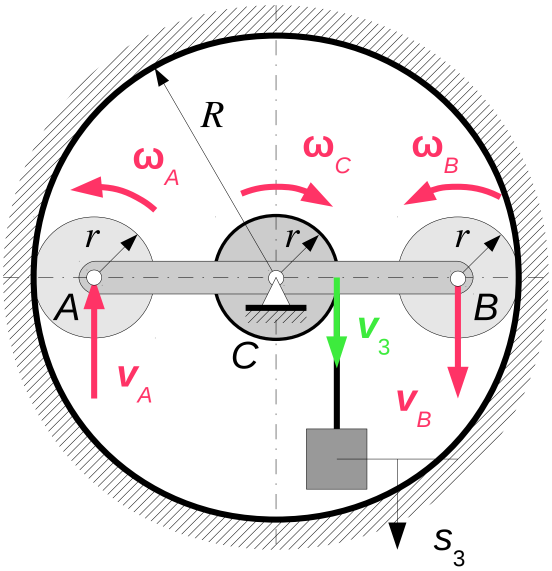
Zahlenwerte:

$$S_1 = 60\,\mathrm{kg} \cdot (1 - 0{,}2) \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 470{,}9\,\mathrm{N}, \quad S_2 = 24\,\mathrm{kg} \cdot (1 + 0{,}2) \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 282{,}5\,\mathrm{N}$$

$$S_3 = 36\,\mathrm{kg} \cdot (1 - 0{,}05) \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 335{,}5\,\mathrm{N}, \quad S_4 = 60\,\mathrm{kg} \cdot (1 + 0{,}05) \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 618{,}0\,\mathrm{N}$$

Aufgabe 5

a) Kinematische Beziehungen



Aus $v_3 = r\,\omega_C$ folgt:

$$\omega_C = \frac{v_3}{r}$$

Die Punkte A und B bewegen sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_C auf einer Kreisbahn mit Radius R-r um Punkt C. Daher gilt:

$$v_A = v_B = (R - r)\,\omega_C = \left(\frac{R}{r} - 1\right) v_3$$

Die Scheiben A und B rollen auf der Innenseite des Hohlrads. Daher gilt:

$$v_A = r\,\omega_A \;\rightarrow\; \omega_A = \frac{v_A}{r} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\frac{v_3}{r}$$

$$v_B = r\,\omega_B \;\rightarrow\; \omega_B = \frac{v_B}{r} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\frac{v_3}{r} = \omega_A$$

b) <u>Geschwindigkeit</u>

Alle kinematischen Größen lassen sich in Abhängigkeit von der gesuchten Geschwindigkeit v_3 ausdrücken.

Die einzige am System angreifende äußere Kraft ist die Gewichtskraft, die eine konservative Kraft ist. Daher kann die Aufgabe mit dem Energieerhaltungssatz gelöst werden.

Der Schwerpunkt des aus den drei Scheiben und dem Arm bestehenden Systems liegt im Punkt *C*, der in Ruhe ist. Als Bezugspunkt für die Lageenergie dieses Systems wird daher Punkt *C* gewählt. Als Bezugspunkt für die Lageenergie der Masse m_3 wird die Ruhelage gewählt.

Damit gilt für die Energien:

	A: Ruhelage	B: ausgelenkte Lage
E^G	$E_A^G = 0$	$E_B^G = -m_3\,g\,s_3$
E^K	$E_A^K = 0$	$E_B^K = \frac{1}{2}\left(m_1 v_A^2 + m_1 v_B^2 + m_3 v_3^2 + J^A \omega_A^2 + J^B \omega_B^2 + J^C \omega_C^2\right)$

Energieerhaltungssatz:

$$0 = \frac{1}{2}\left(m_1 v_A^2 + m_1 v_B^2 + m_3 v_3^2 + J^A \omega_A^2 + J^B \omega_B^2 + J^C \omega_C^2\right) - m_3\,g\,s_3$$

Massenträgheitsmomente:

$$J^A = J^B = \frac{1}{2} m_1 r^2 \,,\quad J^C = \frac{1}{2} m_1 r^2 + \frac{1}{3} m_2 (R-r)^2$$

Mit den kinematischen Beziehungen gilt:

$$\left[2 m_1 \left(\frac{R}{r}-1\right)^2 + m_3 + m_1 r^2 \left(\frac{R}{r}-1\right)^2 \frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{2} m_1 r^2 + \frac{1}{3} m_2 (R-r)^2\right)\frac{1}{r^2}\right] v_3^2 = 2\,m_3\,g\,s_3$$

$$\left[3 m_1 \left(\frac{R}{r}-1\right)^2 + \frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{3} m_2 \left(\frac{R}{r}-1\right)^2 + m_3\right] v_3^2 = 2\,m_3\,g\,s_3$$

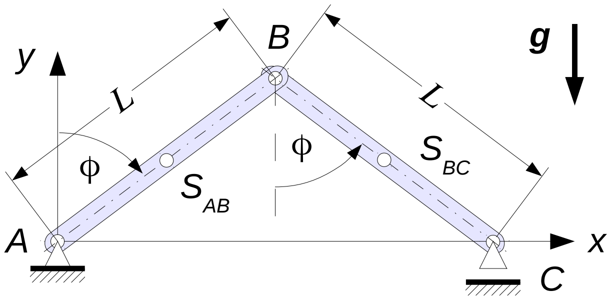
$$v_3 = \sqrt{\frac{2\,m_3\,g\,s_3}{\left(3 m_1 + \frac{1}{3} m_2\right)\left(\frac{R}{r}-1\right)^2 + \frac{1}{2} m_1 + m_3}}$$

c) Beschleunigung

$$a_3 = \frac{1}{2}\frac{dv_3^2}{ds_3} = \frac{m_3 g}{\left(3m_1 + \frac{1}{3}m_2\right)\left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}m_1 + m_3}$$

Aufgabe 6

a) Winkelbeschleunigung



Die Aufgabe kann mit dem Energieerhaltungssatz gelöst werden.

Zustand *A*: Winkel ϕ_0, System ist in Ruhe

Zustand *B*: Winkel ϕ

Nullniveau für die Lageenergie: $y = 0$

Energien:

		Zustand *A*	Zustand *B*
E^G	Stab *AB*	$m\,g\,y_{SAB0}$	$m\,g\,y_{SAB}$
	Stab *BC*	$m\,g\,y_{SBC0}$	$m\,g\,y_{SBC}$
E^K	Stab *AB*	0	$\frac{1}{2}J_{AB}^A\dot{\phi}^2$
	Stab *BC*	0	$\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{SBC}^2 + \dot{y}_{SBC}^2\right) + \frac{1}{2}J_{BC}^S\dot{\phi}^2$

Energieerhaltungssatz: $E_A^G + E_A^K = E_B^G + E_B^K$

$$m\,g\left(y_{SAB0} + y_{SBC0}\right) = m\,g\left(y_{SAB} + y_{SBC}\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{SBC}^2 + \dot{y}_{SBC}^2\right) + \frac{1}{2}\left(J_{AB}^A + J_{BC}^S\right)\dot{\phi}^2$$

Massenträgheitsmomente:

$$J_{BC}^S = \frac{1}{12}m\,L^2,\quad J_{AB}^A = \frac{1}{12}m\,L^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)m\,L^2 = \frac{1}{3}m\,L^2$$

$$\frac{1}{2}\left(J_{AB}^A + J_{BC}^S\right) = \frac{1}{2}m\,L^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{24}m\,L^2$$

Kinematik:

$$y_{SAB}=\frac{L}{2}\cos(\phi),\quad y_{SAB0}=\frac{L}{2}\cos(\phi_0)$$

$$x_{SBC}=\frac{3}{2}L\sin(\phi),\quad y_{SAB}=\frac{L}{2}\cos(\phi),\quad y_{SBC0}=\frac{L}{2}\cos(\phi_0)$$

$$\dot{x}_{SBC}=\frac{3}{2}L\cos(\phi)\dot{\phi}\ ,\ \dot{y}_{SBC}=-\frac{1}{2}L\sin(\phi)\dot{\phi}$$

Einsetzen in den Energieerhaltungssatz ergibt:

$$m\,g\,L\left(\cos(\phi_0)-\cos(\phi)\right)=\frac{1}{2}m\,L^2\left(\frac{9}{4}\cos^2(\phi)+\frac{1}{4}\sin^2(\phi)\right)\dot{\phi}^2+\frac{5}{24}m\,L^2\,\dot{\phi}^2$$

$$\frac{g}{L}\left(\cos(\phi_0)-\cos(\phi)\right)=\left(\frac{9}{8}\cos^2\phi+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cos^2(\phi)+\frac{5}{24}\right)\dot{\phi}^2=\frac{1}{3}\left(1+3\cos^2(\phi)\right)\dot{\phi}^2$$

$$\rightarrow\quad \dot{\phi}^2=3\frac{g}{L}\frac{\cos(\phi_0)-\cos(\phi)}{1+3\cos^2(\phi)}$$

$$\ddot{\phi}=\frac{1}{2}\frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi}=\frac{3}{2}\frac{g}{L}\frac{\sin(\phi)\left(1+3\cos^2(\phi)\right)-\left(\cos(\phi_0)+\cos(\phi)\right)\cdot 6\sin(\phi)\cos(\phi)}{\left(1+3\cos^2(\phi)\right)^2}$$

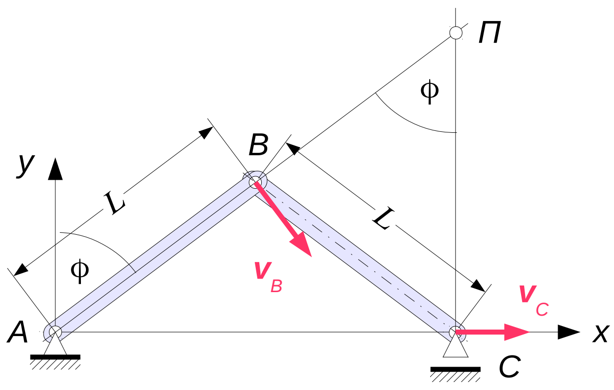
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{g}{L}\frac{\sin(\phi)}{1+3\cos^2(\phi)}+3\frac{g}{L}\frac{\cos(\phi_0)-\cos(\phi)}{1+3\cos^2(\phi)}\frac{\sin(2\phi)}{1+3\cos^2(\phi)}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\frac{(g/L)\sin(\phi)+\sin(2\phi)\dot{\phi}^2}{1+3\cos^2(\phi)}$$

b) <u>Rastpolbahn</u>

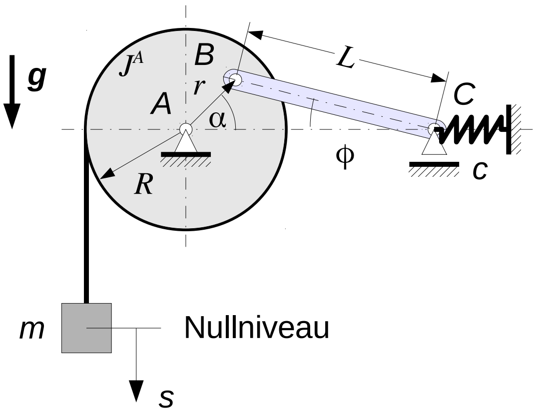
$$x_\Pi=2L\sin(\phi)$$

$$y_\Pi=2L\cos(\phi)$$



Aufgabe 7

a) Geschwindigkeit



Die Lage des Systems wird durch die Koordinate s vollständig beschrieben. Da nur konservative Kräfte auftreten, kann die Aufgabe mit dem Energieerhaltungssatz gelöst werden.

Zustand *A*: Ruhelage wie gezeichnet

Zustand *B*: beliebige ausgelenkte Lage

Als Nullniveau für die Lageenergie der Masse wird die Ruhelage gewählt.

Energien:

	A: Ruhelage	*B*: Ausgelenkte Lage
E^K	0	$\frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} J^A \dot{\alpha}^2$
E^G	0	$-m g s$
E^F	0	$\frac{1}{2} c s_C^2$

Energieerhaltungssatz: $E_A^K + E_A^G + E_A^F = E_B^K + E_B^G + E_B^F$

$$0 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} J^A \dot{\alpha}^2 - m g s + \frac{1}{2} c s_C^2$$

Kinematik:

$$\dot{s} = R \dot{\alpha} \;\rightarrow\; \dot{\alpha} = \frac{\dot{s}}{R}$$

Der Zusammenhang zwischen s und s_C kann für kleine Auslenkungen mithilfe des Momentanpols des Stabs *BC* bestimmt werden. Für kleine Auslenkungen darf der Momentanpol als ortsfest betrachtet werden.

$$\gamma = 90° - \alpha \,,\quad \beta = 90° - \phi$$

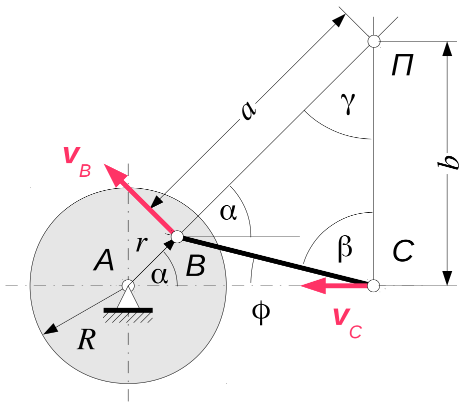
$$\frac{b}{\sin(\alpha+\phi)} = \frac{L}{\sin(\gamma)} = \frac{L}{\cos(\alpha)} \quad \rightarrow \quad b = L \frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{a}{\sin(\beta)}=\frac{L}{\sin(\gamma)}$$

$$\rightarrow \quad a=L\frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}=L\frac{\cos(\phi)}{\cos(\alpha)}$$

$$\frac{v_B}{a}=\frac{v_C}{b} \quad \rightarrow \quad v_C=\frac{b}{a}v_B=v_B\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos(\phi)}$$

$$v_B=r\dot{\alpha}=\frac{r}{R}\dot{s} \quad \rightarrow \quad v_C=\dot{s}_C=\frac{r}{R}\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos(\phi)}\dot{s}$$



Für kleine Verschiebungen folgt daraus:

$$s_C=\frac{r}{R}\frac{\sin(\alpha+\phi)}{\cos(\phi)}s$$

Einsetzen der kinematischen Beziehungen in den Energieerhaltungssatz ergibt:

$$\frac{1}{2}\left(m+\frac{J^A}{R^2}\right)\dot{s}^2-m\,g\,s+\frac{1}{2}c\frac{r^2}{R^2}\frac{\sin^2(\alpha+\phi)}{\cos^2(\phi)}s^2=0$$

$$\rightarrow \quad v(s)=\dot{s}=\sqrt{\frac{2\,m\,g\,s-c\dfrac{r^2}{R^2}\dfrac{\sin^2(\alpha+\phi)}{\cos^2(\phi)}s^2}{m+J^A/R^2}}$$

b) Kleinste und größte Auslenkung

Für die kleinste und die größte Auslenkung ist die Geschwindigkeit null. Daraus folgt

$$s_{min}=0$$

und

$$2\,m\,g=c\frac{r^2}{R^2}\frac{\sin^2(\alpha+\phi)}{\cos^2(\phi)}s_{max} \quad \rightarrow \quad s_{max}=2\frac{m\,g}{c}\frac{R^2}{r^2}\frac{\cos^2(\phi)}{\sin^2(\alpha+\phi)}$$

Aufgabe 8

Kinematische Beziehungen

Die Vorgabe der Winkelgeschwindigkeit ω_H des Hohlrads alleine genügt nicht, um die übrigen kinematischen Größen festzulegen. Um die Kinematik eindeutig festzulegen, müssen zwei Winkelgeschwindigkeiten angegeben werden.

Daher kann die Aufgabe nicht mit dem Arbeitssatz gelöst werden.

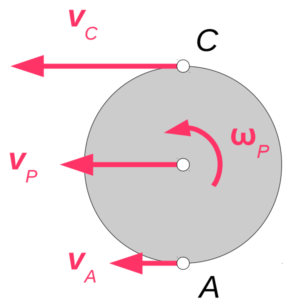
Als kinematischen Größen werden die Winkelgeschwindigkeiten ω_H und ω_T gewählt.

Geschwindigkeiten am Planetenrad:

$$v_P = r_T \omega_T$$

$$v_A = v_P - r_P \omega_P = r_T \omega_T - r_P \omega_P$$

$$v_C = v_P + r_P \omega_P = r_T \omega_T + r_P \omega_P$$



Im Punkt *C* ist das Planetenrad im Kontakt mit dem Hohlrad: $v_C = r_H \omega_H$

$$r_T \omega_T + r_P \omega_P = r_H \omega_H \rightarrow r_P \omega_P = r_H \omega_H - r_T \omega_T$$

Im Punkt *A* ist das Planetenrad im Kontakt mit dem Sonnenrad: $v_A = r_S \omega_S$

$$r_T \omega_T - r_P \omega_P = r_S \omega_S \rightarrow r_S \omega_S = 2 r_T \omega_T - r_H \omega_H$$

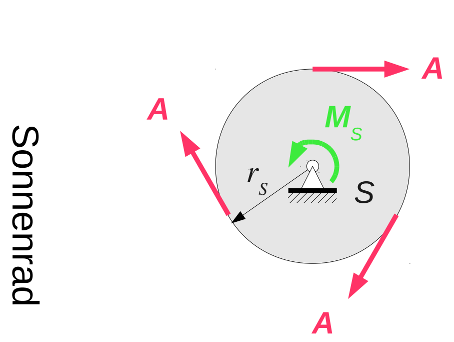
Für die Beschleunigungen folgt:

$$a_P = r_T \dot{\omega}_T \quad (1)$$

$$r_P \dot{\omega}_P = r_H \dot{\omega}_H - r_T \dot{\omega}_T \quad (2)$$

$$r_S \dot{\omega}_S = 2 r_T \dot{\omega}_T - r_H \dot{\omega}_H \quad (3)$$

<u>Kinetische Beziehungen:</u>

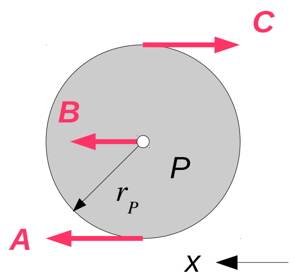


In tangentialer Richtung greifen die Kräfte A der drei Planetenräder an.

Drallsatz um Punkt *S*:

$$J_s \dot{\omega}_S = M_S - 3 r_S A \quad (4)$$

Planetenrad



Am Planetenrad greift die Kraft A des Sonnenrads, die Kraft C des Hohlrads sowie die Kraft B des Planetenträgers an.

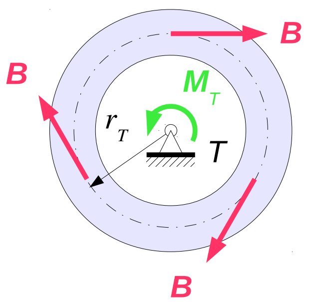
Schwerpunktsatz:

$$m_P a_P = A + B - C \tag{5}$$

Drallsatz um Punkt P:

$$J_P \dot{\omega}_P = -r_P \left(C + A \right) \tag{6}$$

Planetenträger

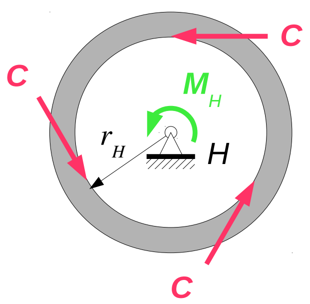


In tangentialer Richtung greifen die Kräfte B der Planetenräder an.

Drallsatz um Punkt T:

$$J_T \dot{\omega}_T = M_T - 3 r_T B \tag{7}$$

Hohlrad



In tangentialer Richtung greifen die Kräfte C der drei Planetenräder an.

Drallsatz um Punkt H:

$$J_H \dot{\omega}_H = M_H + 3 r_H C \tag{8}$$

<u>Auflösen der Gleichungen</u>

Mit den vier Drallsätzen (4), (6), (7) und (8), dem Schwerpunktsatz (5) und den drei kinematischen Beziehungen (1) bis (3) für die Winkelbeschleunigungen und die Beschleunigung stehen acht Gleichungen zur Verfügung, um die vier unbekannten Winkelbeschleunigungen, die unbekannte Beschleunigung der Planetenräder sowie die drei unbekannten Kräfte zu ermitteln.

Aus den Drallsätzen für das Sonnenrad, den Planetenträger und das Hohlrad folgt für die Kräfte:

(4) → $A=\frac{1}{3r_S}\left(M_S-J_S\dot{\omega}_S\right)$ (4')

(7) → $B=\frac{1}{3r_T}\left(M_T-J_T\dot{\omega}_T\right)$ (7')

(8) → $C=-\frac{1}{3r_H}\left(M_H-J_H\dot{\omega}_H\right)$ (8')

Einsetzen von (4'), (7') und (8') in den Schwerpunktsatz (5) für das Planetenrad führt auf

$$m_P a_P=\frac{1}{3}\left(\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}+\frac{M_H}{r_H}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{J_S}{r_S}\dot{\omega}_S+\frac{J_T}{r_T}\dot{\omega}_T+\frac{J_H}{r_H}\dot{\omega}_H\right). \tag{5'}$$

Einsetzen von (4'), (7') und (8') in den Drallsatz (6) für das Planetenrad ergibt

$$J_P\dot{\omega}_P=\frac{r_P}{3}\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)-\frac{r_P}{3}\left(\frac{J_H}{r_H}\dot{\omega}_H-\frac{J_S}{r_S}\dot{\omega}_S\right). \tag{6'}$$

Mit den kinematischen Beziehungen (1) bis (3) folgt:

$$\text{(5')} \rightarrow m_P r_T\dot{\omega}_T=\frac{1}{3}\left(\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}+\frac{M_H}{r_H}\right)-\frac{1}{3}\left[\frac{J_S}{r_S^2}\left(2r_T\dot{\omega}_T-r_H\dot{\omega}_H\right)+\frac{J_T}{r_T^2}r_T\dot{\omega}_T+\frac{J_H}{r_H^2}r_H\dot{\omega}_H\right]$$

$$\rightarrow \left(3m_P+2\frac{J_S}{r_S^2}+\frac{J_T}{r_T^2}\right)r_T\dot{\omega}_T+\left(\frac{J_H}{r_H^2}r_H-\frac{J_S}{r_S^2}\right)r_H\dot{\omega}_H=\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}+\frac{M_H}{r_H} \tag{9}$$

$$\text{(6')} \rightarrow 3\frac{J_P}{r_P^2}\left(r_H\dot{\omega}_H-r_T\dot{\omega}_T\right)=\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}-\frac{J_H}{r_H^2}r_H\dot{\omega}_H+\frac{J_S}{r_S^2}\left(2r_T\dot{\omega}_T-r_H\dot{\omega}_H\right)$$

$$\rightarrow -\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)r_T\dot{\omega}_T+\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}\right)r_H\dot{\omega}_H=\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S} \tag{10}$$

Die Gleichungen (9) und (10) können z.B. mit der Cramerschen Regel nach der gesuchten Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_H$ aufgelöst werden:

$$r_H\dot{\omega}_H=\begin{vmatrix}3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2} & \frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}+\frac{M_H}{r_H}\\ -\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right) & \frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2} & \frac{J_H}{r_H^2}-\frac{J_S}{r_S^2}\\ -\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right) & \frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\end{vmatrix}$$

Ausrechnen der Determinanten ergibt:

$$r_H\dot{\omega}_H=\frac{\left(3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)+\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}+\frac{M_H}{r_H}\right)}{\left(3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)+\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}-\frac{J_S}{r_S^2}\right)}$$

Mit

$$\begin{aligned}&\left(3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)+\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}-\frac{J_S}{r_S^2}\right)\\&=\left(3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)+4\frac{J_S}{r_S^2}\frac{J_H}{r_H^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}\right)\end{aligned}$$

folgt:

$$\dot{\omega}_H=\frac{1}{r_H}\frac{\left(3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)+\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}+\frac{M_H}{r_H}\right)}{\left(3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)+4\frac{J_S}{r_S^2}\frac{J_H}{r_H^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}\right)}$$

Stationärer Lauf

Im stationären Lauf sind die Winkelbeschleunigungen null, d. h. $\dot{\omega}_H=0$ und $\dot{\omega}_T=0$. Bei vorgegebenem Moment M_H lassen sich die übrigen beiden Momente berechnen.

Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt:

$$0=\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}+\frac{M_H}{r_H} \tag{9'}$$

$$0=\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S} \tag{10'}$$

Aus Gleichung (10') folgt

$$\frac{M_S}{r_S}=\frac{M_H}{r_H} \rightarrow M_S=\frac{r_S}{r_H}M_H\ .$$

Einsetzen in Gleichung (9') ergibt:

$$\frac{M_T}{r_T}=-\frac{M_S}{r_S}-\frac{M_H}{r_H}=-2\frac{M_H}{r_H} \rightarrow M_T=-2\frac{r_T}{r_H}M_H$$

Aufgabe 9

Kinetische Gleichungen für Stab *AB*

Drallsatz bezüglich Punkt *A*:

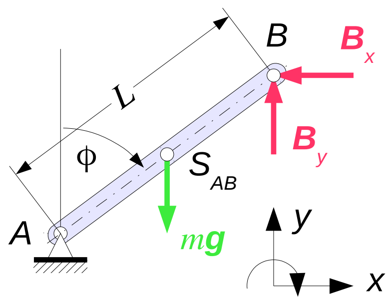
$$J_{AB}^{A}\ddot{\phi}=\frac{L}{2}\sin(\phi)m\,g-L\sin(\phi)B_y-L\cos(\phi)B_x$$

Mit dem Massenträgheitsmoment

$$J_{AB}^{A}=\frac{1}{12}m\,L^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2 m=\frac{1}{3}m\,L^2$$

folgt:

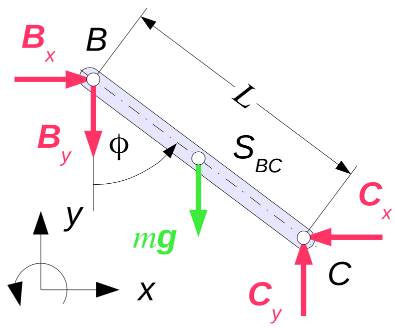
$$\frac{1}{3}m\,L\ddot{\phi}=\frac{1}{2}m\,g\sin(\phi)-B_y\sin(\phi)-B_x\cos(\phi) \quad (1)$$



Kinetische Gleichungen für Stab *BC*

Drallsatz bezüglich Schwerpunkt S_{BC}:

$$J_{BC}^{S}\ddot{\phi}=\frac{L}{2}\sin(\phi)(B_y+C_y)-\frac{L}{2}\cos(\phi)(B_x+C_x)$$



Mit dem Massenträgheitsmoment

$$J_{BC}^{S}=\frac{1}{12}m\,L^2$$

folgt:

$$\frac{1}{6}m\,L\ddot{\phi}=(B_y+C_y)\sin(\phi)-(B_x+C_x)\cos(\phi) \quad (2)$$

Schwerpunktsätze:

$$\sum F_x=m\,a_{Sx} \quad : \quad B_x-C_x=m\,\ddot{x}_{SBC} \quad (3)$$

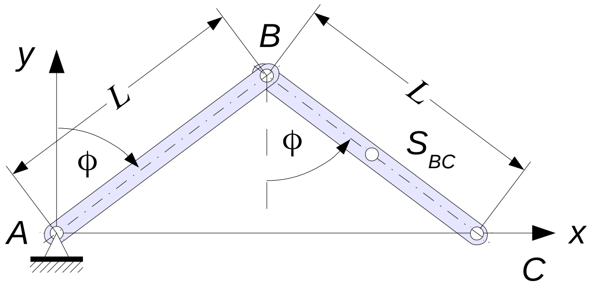
$$\sum F_y=m\,a_{Sy} \quad : \quad C_y-B_y-m\,g=m\,\ddot{y}_{SBC} \quad (4)$$

Zusätzlich gilt das Reibungsgesetz:

$$C_x=\mu C_y \quad (5)$$

Kinematische Beziehungen

Aus der Zeichnung kann abgelesen werden:



$$x_{SBC}=\frac{3}{2}L\sin(\phi)$$

$$y_{SBC}=\frac{1}{2}L\cos(\phi)$$

Daraus können die für die Schwerpunktsätze benötigten Beschleunigungen durch zweimaliges Ableiten nach der Zeit ermittelt werden:

$$\dot{x}_{SBC}=\frac{3}{2}L\cos(\phi)\dot{\phi}\,,\quad \dot{y}_{SBC}=-\frac{1}{2}L\sin(\phi)\dot{\phi}$$

$$\ddot{x}_{SBC}=\frac{3}{2}L\left(\cos(\phi)\ddot{\phi}-\sin(\phi)\dot{\phi}^2\right) \quad (6)$$

$$\ddot{y}_{SBC}=-\frac{1}{2}L\left(\sin(\phi)\ddot{\phi}+\cos(\phi)\dot{\phi}^2\right) \quad (7)$$

Mit den Gleichungen (1) bis (7) stehen 7 Gleichungen zur Ermittlung der 7 Unbekannten $\phi, x_{SBC}, y_{SBC}, B_x, B_y, C_x$ und C_y zur Verfügung.

Aufgabe 10

a) Energien

Lageenergien:

$$E_B^G=m\,g\,y_B\,,\quad E_C^G=m\,g\,y_C\,,\quad E_D^G=2\,m\,g\,y_D$$

Kinetische Energien:

$$E_B^K=\frac{1}{2}m\,v_B^2+\frac{1}{2}J\,\omega_B^2=\frac{1}{2}m\left(v_B^2+\frac{1}{2}r^2\,\omega_B^2\right)$$

$$E_C^K=\frac{1}{2}m\,v_C^2+\frac{1}{2}J\,\omega_C^2=\frac{1}{2}m\left(v_C^2+\frac{1}{2}r^2\,\omega_C^2\right)$$

$$E_D^K=\frac{1}{2}\cdot 2\,m\,v_D^2+\frac{1}{2}J_D\,\omega_D^2=m\left(v_D^2+r^2\,\omega_D^2\right)$$

b) Geometrische und kinematische Beziehungen

Geometrie:

$$y_B(\phi)=-2\,r\cos(\phi)$$

$$y_C(\phi)=5r\cos(\phi)$$
$$y_D(\phi)=8r\cos(\phi)$$

Die Punkte *B*, *C* und *D* bewegen sich auf Kreisbahnen um Punkt *A*:

$$v_B=2r\omega\ ,\ \ v_C=5r\omega\ ,\ \ v_D=8r\omega$$

Rollbedingungen:

$$0=v_B-r\omega_B \rightarrow \omega_B=\frac{v_B}{r}=2\omega$$

$$0=v_C-r\omega_C \rightarrow \omega_C=\frac{v_C}{r}=5\omega$$

Der starre Körper ist starr mit der Stange verbunden: $\omega_D=\omega$

c) <u>Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Winkel</u>

Energieerhaltungssatz: $E^K(\phi)+E^G(\phi)=E^G(\phi_0)$

$$m\left(\frac{1}{2}v_B^2+\frac{1}{4}r^2\omega_B^2+\frac{1}{2}v_C^2+\frac{1}{4}r^2\omega_C^2+v_D^2+r^2\omega_D^2\right)+mg\left(y_B(\phi)+y_C(\phi)+2y_D(\phi)\right)$$
$$=mg\left(y_B(\phi_0)+y_C(\phi_0)+2y_D(\phi_0)\right)$$

Mit den geometrischen und kinematischen Beziehungen und

$$\cos(60°)=\frac{1}{2}$$

folgt:

$$mr^2\omega^2\left(2+1+\frac{25}{2}+\frac{25}{4}+64+1\right)+mgr(-2+5+16)\cos(\phi)$$
$$=\frac{1}{2}mgr(-2+5+16)$$

$$\frac{347}{4}r\omega^2=g\left(\frac{19}{2}-19\cos(\phi)\right)$$

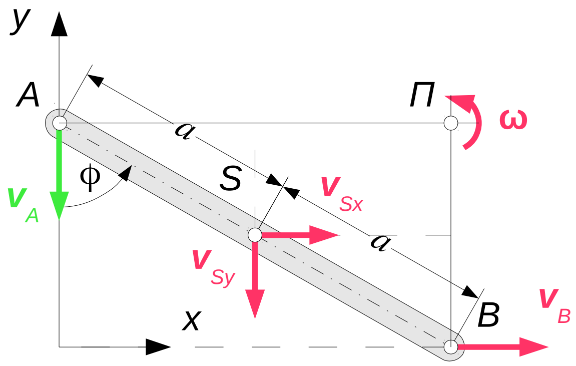
$$\rightarrow \omega(\phi)=\sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{\frac{38-76\cos(\phi)}{347}}$$

Aufgabe 11

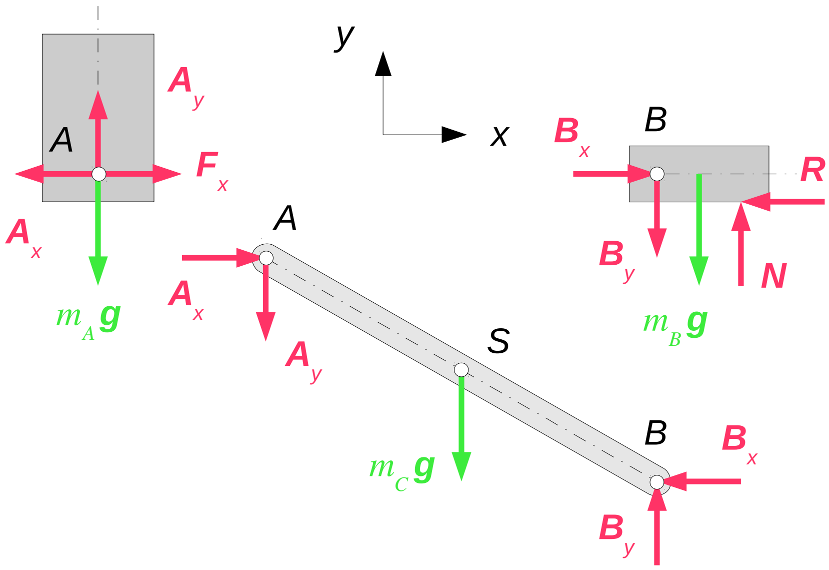
a) <u>Kinematik</u>

$$x_{\Pi}=2a\sin(\phi)$$

$$y_\Pi = 2a\cos(\phi)$$
$$v_A = 2a\sin(\phi)\omega$$
$$\rightarrow \quad \omega = \frac{v_A}{2a\sin(\phi)}$$
$$v_B = 2a\cos(\phi)\omega$$
$$= v_A\cot(\phi)$$
$$v_{Sx} = a\cos(\phi)\omega = \frac{1}{2}v_A\cot(\phi)\,,$$
$$v_{Sy} = a\sin(\phi)\omega = \frac{1}{2}v_A$$



b) Freigeschnittene Körper



c) Kinetische Gleichungen

Körper *A*:

$$\sum F_y = -m_A\dot{v}_A \;:\; A_y - m_A g = -m_A\dot{v}_A \qquad (1)$$

Körper *B*:

$$\sum F_x = m_B\dot{v}_B \;:\; B_x - R = m_B\dot{v}_B \qquad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \;:\; -B_y - m_B g + N = 0 \qquad (3)$$

Reibungsgesetz: $R = \mu N$ (4)

Körper *C*:

$$\sum F_x = m_C \dot{v}_{Sx} \;:\; A_x - B_x = m_C \dot{v}_{Sx} \qquad (5)$$

$$\sum F_y = -m_C \dot{v}_{Sy} \;:\; -A_y - m_C g + B_y = -m_C \dot{v}_{Sy} \qquad (6)$$

$$\sum M^S = J_C \dot{\omega} \;:\; a\sin(\phi)(A_y + B_y) - a\cos(\phi)(A_x + B_x) = J_C \dot{\omega} \qquad (7)$$

Aufgabe 12

a) <u>Kinematik</u>

$$a\,\omega_S = 2a\,\omega_R \;\rightarrow\; \omega_R = \frac{1}{2}\omega_S$$

$$\dot{s} = v_C = -a\,\omega_R = -\frac{1}{2}a\,\omega_S \;\rightarrow\; s = s_0 - \frac{1}{2}a\,\phi$$

b) <u>Geschwindigkeit der Kugel</u>

Die Nullniveaus für Kugel und Schleuder werden bei $z = 0$ gewählt.

		$\phi = 0°$	$\phi = 45°$
E^K	Kugel	0	$\frac{1}{2} m_K v_K^2$
	Schleuder	0	$\frac{1}{2} J_S^A \omega_S^2$
	Rolle	0	$\frac{1}{2} J_R^B \omega_R^2$
E^G	Kugel	0	$4\,a\,m_K\,g\sin(\phi)$
	Schleuder	0	$2\,a\,m_S\,g\sin(\phi)$
E^F	Feder	$\frac{1}{2} c\,s_0^2$	$\frac{1}{2} c\,s^2$

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2}\left(m_K v_K^2 + J_S^A \omega_S^2 + J_R^B \omega_R^2\right) + 2\left(2m_K + m_S\right) a\,g\sin(\phi) + \frac{1}{2}c\,s^2 = \frac{1}{2}c\,s_0^2$$

Mit $v_K = 4\,a\,\omega_S$, $\sin(\phi) = \sin(45°) = \sqrt{2}/2$

und den kinematischen Beziehungen aus a) folgt:

$$\frac{1}{2}\left(16\, m_K\, a^2 + J_S^A + \frac{1}{4} J_R^B\right)\omega_S^2 = \frac{1}{2} c \left[s_0^2 - \left(s_0 - \frac{1}{2} a\,\phi \right)^2 \right] - \sqrt{2}\left(2\, m_K + m_S\right) a\, g$$

Mit $\phi = \pi/4$ und $s_0 = \pi\, a/8$ folgt:

$$\left(16\, m_K\, a^2 + J_S^A + \frac{1}{4} J_R^B\right)\omega_S^2 = c\left(\frac{\pi}{8} a\right)^2 - 2\sqrt{2}\left(2\, m_K + m_S\right) a\, g$$

$$\rightarrow \quad \omega_S^2 = \frac{c\, a^2 \pi^2/64 - 2\sqrt{2}\left(2\, m_k + m_s\right) a\, g}{16\, m_K\, a^2 + J_S^A + J_R^B/4}$$

Damit gilt für die Geschwindigkeit der Kugel:

$$v_K = 4\, a \sqrt{\frac{c\, a^2 \pi^2/64 - 2\sqrt{2}\left(2\, m_K + m_S\right) a\, g}{16\, m_K\, a^2 + J_S^A + J_R^B/4}}$$

c) <u>Wurfweite</u>

Der Wurf beginnt an der Stelle

$$x_0 = -4\, a \cos(45°), \quad z_0 = 4\, a \sin(45°)$$

mit dem Wurfwinkel $\phi = 45°$. Damit lautet die Gleichung der Wurfparabel:

$$z(x) = z_0 + \tan(\phi)\left(x - x_0\right) - \frac{g}{2\, v_K^2 \cos^2(\phi)}\left(x - x_0\right)^2$$

Mit $\tan(\phi) = \tan(45°) = 1$ und $\cos^2(\phi) = \cos^2(45°) = \frac{1}{2}$

folgt: $z(x) = z_0 + x - x_0 - \frac{g}{v_K^2}\left(x - x_0\right)^2$

Beim Auftreffen gilt: $z(x_W) = 0$

Daraus folgt: $\left(x_W - x_0\right)^2 - \frac{v_K^2}{g}\left(x_W - x_0\right) - \frac{v_K^2}{g} z_0 = 0 \quad \rightarrow \quad x_w - x_0 = \frac{v_K^2}{2\, g} + \sqrt{\frac{v_K^4}{4\, g^2} - \frac{v_K^2}{g} z_0}$

Mit

$$\frac{v_K^4}{4\, g^2} + \frac{v_K^2}{g} z_0 = \frac{v_K^4}{4\, g^2}\left(1 + \frac{4\, g^2}{v_K^4} \frac{v_K^2}{g} \cdot 4\, a \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{v_K^4}{4\, g^2}\left(1 + \frac{8\sqrt{2}\, a\, g}{v_K^2}\right)$$

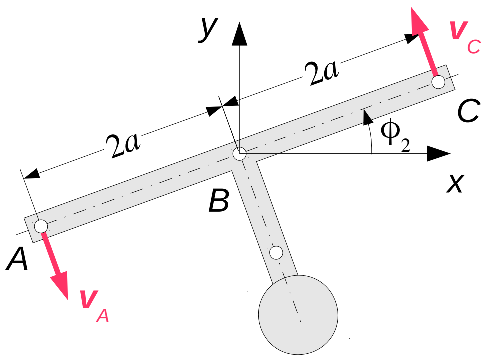
folgt: $x_W = \frac{v_K^2}{2\, g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8\sqrt{2}\, a\, g}{v_K^2}}\right) - 2\sqrt{2}\, a$

Aufgabe 13

a) Beschleunigungen der Schwerpunkte

Zuerst werden die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen der Punkte *A* und *C* bestimmt, in denen die Träger 1 und 3 an den Träger 2 angeschlossen sind.

Träger 2 dreht sich um den ortsfesten Punkt *B*. Damit gilt für die Geschwindigkeiten der Punkte *B* und *C*:



$$v_A = 2a\dot{\phi}_2,\quad v_C = 2a\dot{\phi}_2$$

Für die Komponenten der beiden Geschwindigkeitsvektoren folgt:

$$v_{Ax} = v_A \sin(\phi_2) = 2a\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2$$

$$v_{Ay} = -v_A \cos(\phi_2) = -2a\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2$$

$$v_{Cx} = -v_C \sin(\phi_2) = -2a\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2$$

$$v_{Cy} = v_C \cos(\phi_2) = 2a\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2$$

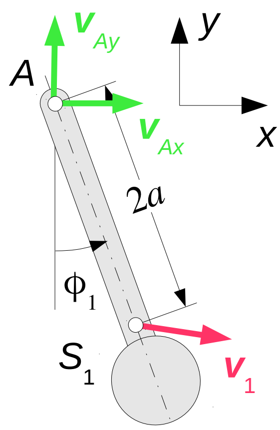
Ableiten nach der Zeit ergibt die Beschleunigungen:

$$a_{Ax} = \dot{v}_{Ax} = 2a\left(\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 + \sin(\phi_2)\ddot{\phi}_2\right)$$

$$a_{Ay} = \dot{v}_{Ay} = 2a\left(\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 - \cos(\phi_2)\ddot{\phi}_2\right)$$

$$a_{Cx} = \dot{v}_{Cx} = -2a\left(\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 + \sin(\phi_2)\ddot{\phi}_2\right)$$

$$a_{Cy} = \dot{v}_{Cy} = -2a\left(\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 - \cos(\phi_2)\ddot{\phi}_2\right)$$



Als Bezugspunkt für die Kinematik des Trägers 1 wird Punkt *A* gewählt, dessen Geschwindigkeit und Beschleunigung bereits ermittelt wurde. Für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors des Schwerpunkts gilt:

$$v_{1x} = v_{Ax} + 2a\cos(\phi_1)\dot{\phi}_1$$

$$v_{1y} = v_{Ay} + 2a\sin(\phi_1)\dot{\phi}_1$$

Für die Komponenten des Beschleunigungsvektors folgt:

$$a_{1x} = \dot{v}_{1x} = \dot{v}_{Ax} - 2a\left(\sin(\phi_1)\dot{\phi}_1^2 - \cos(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right)$$

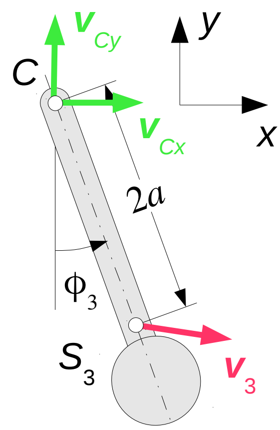
$$a_{1y} = \dot{v}_{1y} = \dot{v}_{Ay} + 2a\left(\cos(\phi_1)\dot{\phi}_1^2 + \sin(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right)$$

Einsetzen der Beziehungen für die Beschleunigungen von Punkt *A* ergibt:

$$a_{1x}=2a\left(\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2+\sin(\phi_2)\ddot{\phi}_2-\sin(\phi_1)\dot{\phi}_1^2+\cos(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right) \quad (1)$$

$$a_{1y}=2a\left(\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2^2-\cos(\phi_2)\ddot{\phi}_2+\cos(\phi_1)\dot{\phi}_1^2+\sin(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right) \quad (2)$$

Als Bezugspunkt für die Kinematik des Trägers 3 wird Punkt *C* gewählt. Für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors des Schwerpunkts gilt:



$$v_{3x}=v_{Cx}+2a\cos(\phi_3)\dot{\phi}_3$$

$$v_{3y}=v_{Cy}+2a\sin(\phi_3)\dot{\phi}_3$$

Für die Komponenten des Beschleunigungsvektors folgt:

$$a_{3x}=\dot{v}_{3x}=\dot{v}_{Cx}-2a\left(\sin(\phi_3)\dot{\phi}_3^2-\cos(\phi_3)\ddot{\phi}_3\right)$$

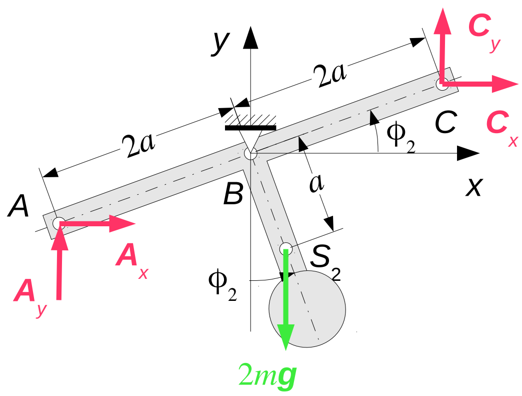
$$a_{3y}=\dot{v}_{3y}=\dot{v}_{Cy}+2a\left(\cos(\phi_3)\dot{\phi}_3^2+\sin(\phi_3)\ddot{\phi}_3\right)$$

Einsetzen der Beziehungen für die Beschleunigungen von Punkt *C* ergibt:

$$a_{3x}=-2a\left(\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2+\sin(\phi_2)\ddot{\phi}_2+\sin(\phi_3)\dot{\phi}_3^2-\cos(\phi_3)\ddot{\phi}_3\right) \quad (3)$$

$$a_{3y}=-2a\left(\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2^2-\cos(\phi_2)\ddot{\phi}_2-\cos(\phi_3)\dot{\phi}_3^2-\sin(\phi_3)\ddot{\phi}_3\right) \quad (4)$$

b) <u>Kinetische Gleichungen</u>



Träger 2 dreht sich um den festen Punkt *B*. Daher wird der Drallsatz bezüglich Punkt *B* aufgestellt:

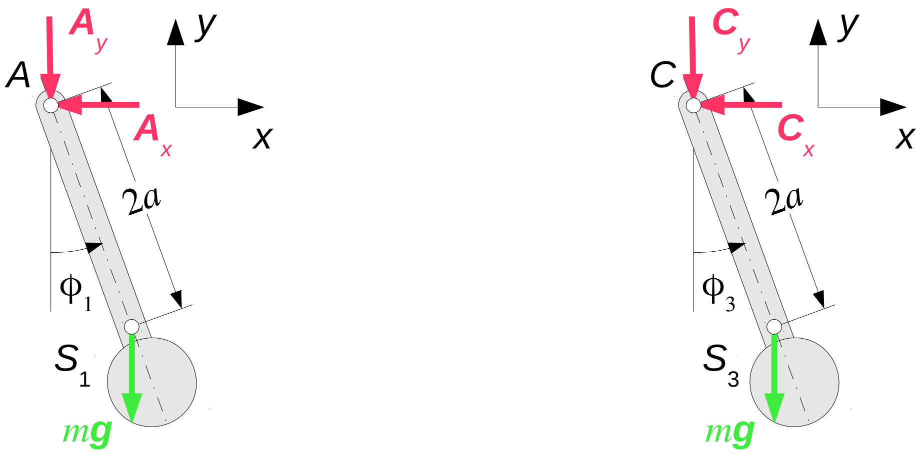
$$\sum M^B=J_2^B\ddot{\phi}_2 \ :$$

$$2a\left(\sin(\phi_2)A_x-\cos(\phi_2)A_y\right)$$
$$-2a\left(\sin(\phi_2)C_x-\cos(\phi_2)C_y\right)$$
$$-a\sin(\phi_2)\cdot 2mg=2mi_2^2\ddot{\phi}_2$$

Kürzen durch 2 und Umstellen ergibt:

$$m i_2^2\ddot{\phi}_2=a\left[\sin(\phi_2)\left(A_x-C_x\right)-\cos(\phi_2)\left(A_y-C_y\right)-mg\sin(\phi_2)\right] \quad (5)$$

Für Träger 1 und Träger 3 werden die beiden Schwerpunktsätze und der Drallsatz bezüglich dem Schwerpunkt aufgestellt:



$\sum F_x = m a_{1x}$: $m a_{1x} = -A_x$ (6)

$\sum F_y = m a_{1y}$: $m a_{1y} = -A_y - m g$ (7)

$\sum M^{S_1} = J_1^S \ddot{\phi}_1$:

$m i_1^2 \ddot{\phi}_1 = 2a\left(\cos(\phi_1) A_x + \sin(\phi_1) A_y\right)$ (8)

$\sum F_x = m a_{3x}$: $m a_{3x} = -C_x$ (9)

$\sum F_y = m a_{3y}$: $m a_{3y} = -C_y - m g$ (10)

$\sum M^{S_3} = J_3^S \ddot{\phi}_3$:

$m i_1^2 \ddot{\phi}_3 = 2a\left(\cos(\phi_3) C_x + \sin(\phi_3) C_y\right)$ (11)

In den Gleichungen (1) bis (11) treten als Unbekannte die vier Komponenten der Beschleunigungen der beiden Schwerpunkte, die vier Komponenten der Kräfte in den Gelenken *A* und *C* und die drei Winkel auf. Insgesamt treten also elf Unbekannte auf. Die aufgestellten Gleichungen reichen daher aus, um die Unbekannten zu bestimmen.

c) <u>Gleichungssystem für die Winkel</u>

Zuerst werden die Kräfte aus den Gleichungen (6), (7), (9) und (10) ermittelt:

(6) → $A_x = -m a_{1x}$

(7) → $A_y = -m(a_{1y} + g)$

(9) → $C_x = -m a_{3x}$

(10) → $C_y = -m(a_{3y} + g)$

Als nächstes werden die Kräfte in die Drallsätze (5), (8) und (11) eingesetzt:

(5) → $m i_2^2 \ddot{\phi}_2 = a m\left[\sin(\phi_2)(-a_{1x} + a_{3x}) - \cos(\phi_2)(-a_{1y} - g + a_{3y} + g) - g\sin(\phi_2)\right]$

→ $i_2^2 \ddot{\phi}_2 = a\left[\sin(\phi_2)(a_{3x} - a_{1x}) - \cos(\phi_2)(a_{3y} - a_{1y}) - g\sin(\phi_2)\right]$ (5')

(8) → $m i_1^2 \ddot{\phi}_1 = 2 a m\left(-\cos(\phi_1) a_{1x} - \sin(\phi_1) a_{1y} - \sin(\phi_1) g\right)$

$$\rightarrow\quad i_1^2\ddot{\phi}_1=-2a\left(\cos(\phi_1)a_{1x}+\sin(\phi_1)a_{1y}+\sin(\phi_1)g\right) \tag{8'}$$

(11) $$\rightarrow\quad m\,i_1^2\ddot{\phi}_3=2a\,m\left(-\cos(\phi_3)a_{3x}-\sin(\phi_3)a_{3y}-\sin(\phi_3)g\right)$$

$$\rightarrow\quad i_1^2\ddot{\phi}_3=-2a\left(\cos(\phi_3)a_{3x}+\sin(\phi_3)a_{3y}+\sin(\phi_3)g\right) \tag{11'}$$

Einsetzen der kinematischen Beziehungen (1) bis (4) in die Gleichungen (5'), (8') und (11') ergibt die gesuchten Gleichungen für die Winkel. Dieser Schritt erfordert etwas Ausdauer und Sorgfalt.

Mit

$$\begin{aligned}
&\sin(\phi_2)\left(a_{3x}-a_{1x}\right)\\
&=-2a\left(\sin(\phi_2)\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2+\sin^2(\phi_2)\ddot{\phi}_2+\sin(\phi_2)\sin(\phi_3)\dot{\phi}_3^2-\sin(\phi_2)\cos(\phi_3)\ddot{\phi}_3\right.\\
&\qquad\left.+\sin(\phi_2)\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2+\sin^2(\phi_2)\ddot{\phi}_2-\sin(\phi_2)\sin(\phi_1)\dot{\phi}_1^2+\sin(\phi_2)\cos(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right)\\
&=-2a\left(2\sin(\phi_2)\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2+2\sin^2(\phi_2)\ddot{\phi}_2+\sin(\phi_2)\sin(\phi_3)\dot{\phi}_3^2-\sin(\phi_2)\cos(\phi_3)\ddot{\phi}_3\right.\\
&\qquad\left.-\sin(\phi_2)\sin(\phi_1)\dot{\phi}_1^2+\sin(\phi_2)\cos(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\cos(\phi_2)\left(a_{3y}-a_{1y}\right)\\
&=-2a\left(2\cos(\phi_2)\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2^2-2\cos^2(\phi_2)\ddot{\phi}_2-\cos(\phi_2)\cos(\phi_3)\dot{\phi}_3^2\right.\\
&\qquad\left.-\cos(\phi_2)\sin(\phi_3)\ddot{\phi}_3+\cos(\phi_2)\cos(\phi_1)\dot{\phi}_1^2+\cos(\phi_2)\sin(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right)
\end{aligned}$$

folgt aus Gleichung (5'):

$$\begin{aligned}
i_2^2\ddot{\phi}_2=-2a^2\Big[&2\ddot{\phi}_2+\cos(\phi_2-\phi_3)\dot{\phi}_3^2-\sin(\phi_2-\phi_3)\ddot{\phi}_3\\
&-\cos(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1^2+\sin(\phi_2-\phi_1)\ddot{\phi}_1\Big]-a\,g\sin(\phi_2)
\end{aligned} \tag{12}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\cos(\phi_1)a_{1x}+\sin(\phi_1)a_{1y}&=2a\Big[\left(\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)+\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\right)\dot{\phi}_2^2\\
&\qquad+\left(\cos(\phi_1)\sin(\phi_2)-\sin(\phi_1)\cos(\phi_2)\right)\ddot{\phi}_2+\ddot{\phi}_1\Big]\\
&=2a\left[\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_2^2-\sin(\phi_1-\phi_2)\ddot{\phi}_2+\ddot{\phi}_1\right]
\end{aligned}$$

folgt aus Gleichung (8'):

$$i_1^2\ddot{\phi}_1=-4a^2\left[\cos(\phi_1-\phi_2)\dot{\phi}_2^2-\sin(\phi_1-\phi_2)\ddot{\phi}_2+\ddot{\phi}_1\right]-2a\,g\sin(\phi_1) \tag{13}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\cos(\phi_3)a_{3x}+\sin(\phi_3)a_{3y}&=-2a\Big[\left(\cos(\phi_3)\cos(\phi_2)+\sin(\phi_3)\sin(\phi_2)\right)\dot{\phi}_2^2\\
&\qquad+\left(\cos(\phi_3)\sin(\phi_2)-\sin(\phi_3)\cos(\phi_2)\right)\ddot{\phi}_2-\ddot{\phi}_3\Big]\\
&=-2a\left[\cos(\phi_2-\phi_3)\dot{\phi}_2^2+\sin(\phi_2-\phi_3)\ddot{\phi}_2-\ddot{\phi}_3\right]
\end{aligned}$$

folgt aus Gleichung (11'):

$$i_1^2\ddot{\phi}_3=4a^2\left[\cos(\phi_2-\phi_3)\dot{\phi}_2^2+\sin(\phi_2-\phi_3)\ddot{\phi}_2-\ddot{\phi}_3\right]-2a\sin(\phi_3)g \qquad (14)$$

Die Gleichungen (12) bis (14) stellen ein System von drei gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar, dessen Lösungen die Bewegung des Systems beschreiben. Für die numerische Lösung ist es günstig, die Gleichungen in Matrix-Darstellung zu schreiben:

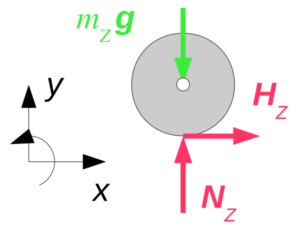
$$\begin{bmatrix} 4+i_1^2/a^2 & 4\sin(\phi_2-\phi_1) & 0 \\ 4\sin(\phi_2-\phi_1) & 8+2i_2^2/a^2 & 4\sin(\phi_3-\phi_2) \\ 0 & 4\sin(\phi_3-\phi_2) & 4+i_1^2/a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\phi}_1\\ \ddot{\phi}_2\\ \ddot{\phi}_3\end{bmatrix}$$

$$=4\begin{bmatrix} 0 & -\cos(\phi_1-\phi_2) & 0 \\ \cos(\phi_1-\phi_2) & 0 & -\cos(\phi_2-\phi_3) \\ 0 & \cos(\phi_2-\phi_3) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}_1^2\\ \dot{\phi}_2^2\\ \dot{\phi}_3^2\end{bmatrix}-2\frac{g}{a}\begin{bmatrix}\sin(\phi_1)\\ \sin(\phi_2)\\ \sin(\phi_3)\end{bmatrix}$$

Das System hat acht Gleichgewichtslagen (welche?), in denen die ersten und die zweiten Ableitungen null sind. Von diesen Gleichgewichtslagen ist nur die Lage mit $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0°$ stabil. Die Existenz von sieben instabilen Gleichgewichtslagen führt dazu, dass sich das System hochgradig chaotisch verhält, d. h. kleine Änderungen der Systemparameter oder der Anfangsbedingungen können zu einem komplett anderen zeitlichen Verlauf der Winkel führen.

Aufgabe 14

a) <u>Kinetische Gleichungen</u>



Zylinder:

$$\sum F_x = m a_x \ :\ H_z = m_Z a_Z \qquad (1)$$

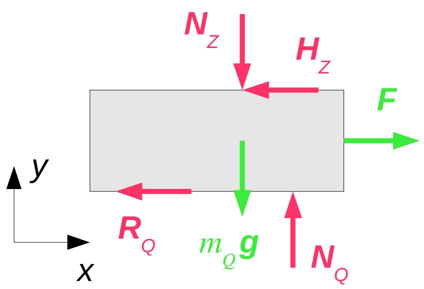
$$\sum F_y = 0 \ :\ N_Z - m_Z g = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M^S = J^S\dot{\omega} \ :\ r H_Z = \frac{1}{2} m_Z r^2 \dot{\omega} \qquad (3)$$

Quader:

$$\sum F_x = m a_x \ : \quad F - R_Q - H_Z = m_Q a_Q \qquad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \ : \quad N_Q - m_Q g - N_Z = 0 \qquad (5)$$



Reibungsgesetz:

$$R_Q = \mu N_Q \qquad (6)$$

b) Kinematik

Der Punkt des Zylinders, der auf dem Quader aufliegt, muss die gleiche Geschwindigkeit wie der Quader haben:

$$v_Z + \omega r = v_Q \qquad (7)$$

c) Beschleunigung des Zylinders

Aus (7) folgt: $\omega = \dfrac{v_Q - v_Z}{r}$

Einsetzen in (3) ergibt: $r H_Z = \dfrac{1}{2} m_Z r \left(a_Q - a_Z \right)$

Mit (1) folgt: $r m_Z a_Z = \dfrac{1}{2} m_Z r \left(a_Q - a_Z \right)$

Auflösen nach a_Z ergibt:

$$\left(1 + \frac{1}{2} \right) a_Z = \frac{1}{2} a_Q \quad \rightarrow \quad a_Z = \frac{1}{3} a_Q$$

d) Beschleunigung des Quaders

Aus (2) folgt: $N_Z = m_Z g$

Aus (5) folgt: $N_Q = m_Q g + N_Z = \left(m_Q + m_Z \right) g$

Einsetzen in (6) ergibt: $R_Q = \mu \left(m_Q + m_Z \right) g$

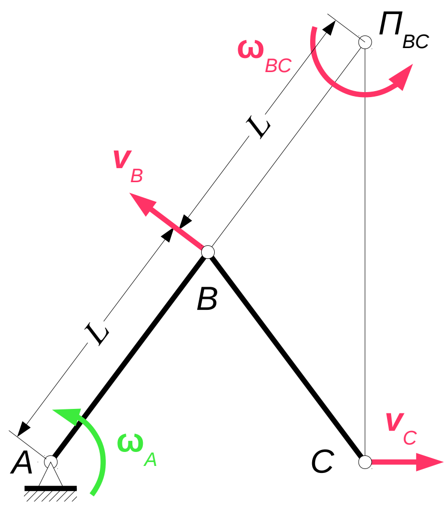
Einsetzen in (4) ergibt:

$$m_Q a_Q = F - \mu \left(m_Q + m_Z \right) g - H_Z = F - \mu \left(m_Q + m_Z \right) g - m_Z a_Z$$
$$= F - \mu \left(m_Q + m_Z \right) g - \frac{1}{3} m_Z a_Q$$

Auflösen nach a_Z ergibt:

$$\left(m_Q + \frac{1}{3} m_Z \right) a_Q = F - \mu \left(m_Q + m_Z \right) g \quad \rightarrow \quad a_Q = \frac{F - \mu \left(m_Q + m_Z \right) g}{m_Q + m_Z / 3}$$

Aufgabe 15



a) Momentanpol und Winkelgeschwindigkeit

Es gilt:

$$v_B = \omega_A L = -\omega_{BC} L$$

$$\rightarrow \quad \omega_{BC} = -\omega_A$$

b) Koordinaten und Beschleunigungen

Schwerpunkt von Stab *BC*:

$$x_S(t) = \frac{3}{2} L \cos(\omega_A t), \quad y_S(t) = \frac{1}{2} L \sin(\omega_A t)$$

$$a_{Sx}(t) = \ddot{x}_S(t) = -\frac{3}{2}\omega_A^2 L \cos(\omega_A t)$$

$$a_{Sy}(t) = \ddot{y}_S(t) = -\frac{1}{2}\omega_A^2 L \sin(\omega_A t)$$

$$x_C(t) = 2L\cos(\omega_A t), \quad a_C(t) = \ddot{x}_C(t) = -2L\omega_A^2 \cos(\omega_A t)$$

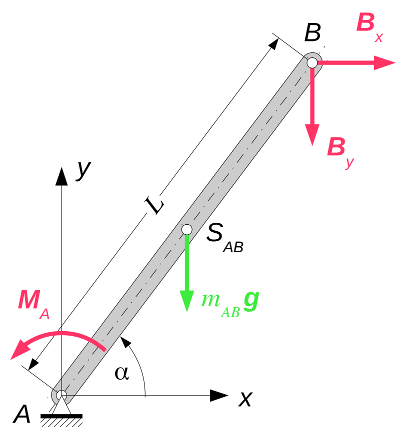
c) Kinetische Gleichungen

Stab *AB*:

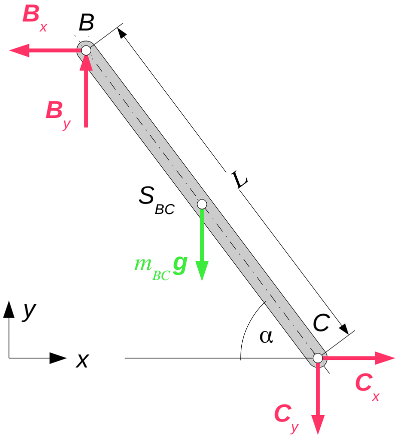
$$\sum M^A = J_{AB}^A \dot{\omega}_A \quad :$$

$$M_A - \frac{L}{2}\cos(\alpha) m_{AB} g - L\cos(\alpha) B_y$$
$$- L\sin(\alpha) B_x = 0$$

$$M_A(t) = L\left(\frac{1}{2} m g + B_y\right)\cos(\omega_A t)$$
$$+ L B_x \sin(\omega_A t) \quad (1)$$



Stab *BC*:



$$\sum F_x = m_{BC}\, a_{Sx} \;:\; -B_x + C_x = m_{BC}\, \ddot{x}_S$$

$$\rightarrow\; -B_x + C_x = -\frac{3}{2} m L \omega_A^2 \cos(\omega_A t) \qquad (2)$$

$$\sum F_y = m_{BC}\, a_{Sy} \;:\; B_y - m_{BC}\, g - C_y = m_{BC}\, \ddot{y}_S$$

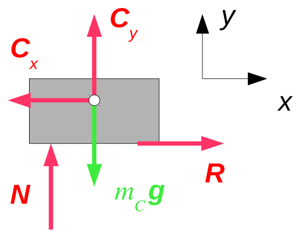
$$\rightarrow\; B_y - C_y = m\left(g - \frac{1}{2} L \omega_A^2 \sin(\omega_A t)\right) \qquad (3)$$

$$\sum M^S = J_{BC}^S\, \dot{\omega}_{BC} \;:$$

$$\frac{L}{2}(B_x + C_x)\sin(\alpha) - \frac{L}{2}(B_y + C_y)\cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow\; (B_x + C_x)\sin(\omega_A t) - (B_y + C_y)\cos(\omega_A t) = 0 \qquad (4)$$

Klotz *C*:



$$\sum F_x = m_C\, a_{Sx} \;:\; -C_x + R = m_C\, \ddot{x}_C$$

$$\rightarrow\; -C_x + R = -2\, m_C L \omega_A^2 \cos(\omega_A t) \qquad (5)$$

$$\sum F_y = 0 \;:\; C_y + N - m_C\, g = 0$$

$$\rightarrow\; C_y + N = m_C\, g \qquad (6)$$

Reibungsgesetz: $R = \mu N$ (7)

Aufgabe 16

a) <u>Energien</u>

In der Ruhelage ist die Gesamtenergie gleich der Federenergie:

$$E_0 = \frac{1}{2} c\, s_0^2$$

In einer beliebigen späteren Lage besteht die Gesamtenergie aus der kinetischen Energie und der Federenergie:

$$E_1^K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m_1\left(v^2 + i_1^2 \omega_A^2\right) + \frac{1}{2} m_1\left(v^2 + i_1^2 \omega_B^2\right) + \frac{1}{2} m_2\left(v^2 + i_2^2 \omega_E^2\right)$$

$$E_1^F = \frac{1}{2} c\,(s_0 - s_C)^2$$

$$E_1 = E_1^K + E_1^F$$

b) Kinematik

Für die Winkelgeschwindigkeiten gilt:

$$\omega_A = \omega_B = \omega_E = \frac{v_C}{R}$$

Aus der Rollbedingung folgt: $v = \omega_A R = v_C$

c) Geschwindigkeit

Die Gesamtenergie ist konstant: $E_0 = E_1$

$$\frac{1}{2} c s_0^2 = \frac{1}{2}\left(m + 2 m_1 + m_2\right) v^2 + \frac{1}{2}\left(2 m_1 i_i^2 + m_2 i_2^2\right)\omega_A^2 + \frac{1}{2}\left(s_0 - s_C\right)^2$$

Mit

$$\omega_A = \frac{v}{R}$$

folgt:

$$c s_0^2 - c\left(s_0 - s_C\right)^2 = \left(m + 2 m_1 + m_2 + 2 m_1 \frac{i_1^2}{R^2} + m_2 \frac{i_2^2}{R^2}\right) v^2$$

$$\rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{c\left(2 s_0 s_C - s_C^2\right)}{m + 2 m_1\left(1 + i_1^2/R^2\right) + m_2\left(1 + i_2^2/R^2\right)}}$$

Aufgabe 17

a) Energien

		Zustand *A*	Zustand *B*
E^G	Rolle	0	$-m_B g s_B$
	Platte	0	$-m_P g s$
E^F	Feder	0	$\frac{1}{2} c s^2$
E^K	Rolle	0	$\frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_B^2$

		Zustand *A*	Zustand *B*
	Platte	0	$\frac{1}{2} m_P v^2$

b) <u>Kinematik</u>

Auslenkungen: $s = s_B = R\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right)$

Geschwindigkeiten: $v_B = \omega R$, $v = v_B \sin(\phi) = \omega R \sin(\phi)$

Winkelgeschwindigkeit:

$$v_B \cos(\phi) - \omega_B r = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_B = \frac{v_B}{r}\cos(\phi) = \frac{R}{r}\omega\cos(\phi)$$

c) <u>Winkelgeschwindigkeit als Funktion des Winkels</u>

Energieerhaltungssatz: $E_A = E_B$

$$0 = -m_B g s_B - m_P g s + \frac{1}{2} c s^2 + \frac{1}{2}\left(m_B v_B^2 + J_B \omega_B^2 + m_P v^2\right)$$

$$2\left(m_B + m_P\right) g s - c s^2 = m_B v_B^2 + J_B \omega_B^2 + m_P v^2$$

Einsetzen der kinematischen Bedingungen:

$$2\left(m_B + m_P\right) g R\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right) - c R^2\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right)^2$$
$$= R^2\left(m_B + (J_B / r^2)\cos^2(\phi) + m_P \sin^2(\phi)\right)\omega^2$$

Einsetzen der Massen:

$$6 m \frac{g}{R}\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right) - c\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right)^2$$
$$= \left(2 + \cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right) m \omega^2 = 3 m \omega^2$$

Ergebnis:

$$\omega = \pm\sqrt{2\frac{g}{R}\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right) - \frac{c}{3m}\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right)^2}$$

d) <u>Winkelbeschleunigung</u>

Mit $\dot{\omega} = -\ddot{\phi}$ und $\omega^2 = \dot{\phi}^2$ folgt:

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\phi}^2}{d\phi} = \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{d\phi} = -\frac{g}{R}\sin(\phi) + \frac{c}{3m}\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right)\sin(\phi)$$

$$\dot{\omega} = \frac{g}{R}\sin(\phi) - \frac{c}{3m}\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right)\sin(\phi)$$

Aufgabe 18

a) <u>Massenträgheitsmomente</u>

$$J_1^S = J_2^S = \frac{1}{12} m a^2 \ , \ \ J_1^A = \frac{1}{12} m a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 m = \frac{1}{3} m a^2$$

b) <u>Kinematik</u>

Koordinaten:

$$x_2 = a\left(\cos(\phi_1) + \frac{1}{2}\sin(\phi_2)\right), \ \ y_2 = a\left(\sin(\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(\phi_2)\right)$$

Geschwindigkeit:

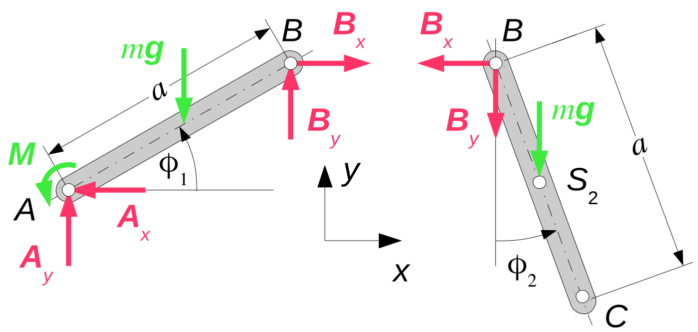
$$\dot{x}_2 = a\left(-\dot{\phi}_1 \sin(\phi_1) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2 \cos(\phi_2)\right), \ \ \dot{y}_2 = a\left(\dot{\phi}_1 \cos(\phi_1) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2 \sin(\phi_2)\right)$$

Beschleunigung:

$$\ddot{x}_2 = a\left(-\ddot{\phi}_1 \sin(\phi_1) - \dot{\phi}_1^2 \cos(\phi_1) + \frac{1}{2}\ddot{\phi}_2 \cos(\phi_2) - \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_2)\right)$$

$$\ddot{y}_2 = a\left(\ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1) - \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1) + \frac{1}{2}\ddot{\phi}_2 \sin(\phi_2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 \cos(\phi_2)\right)$$

c) <u>Kinetik</u>



Stab *AB*:

$$\sum M^A = J^A \ddot{\phi} \ : \ M - \frac{1}{2} a m g \cos(\phi_1) + a \cos(\phi_1) B_y - a \sin(\phi_1) B_x = J_1^A \ddot{\phi}_1$$

Stab *BC*:

$$\sum F_x = m \ddot{x} \ : \ -B_x = m \ddot{x}_2$$

$$\sum F_y = m \ddot{y} \ : \ -B_y - m g = m \ddot{y}_2$$

$$\sum M^S = J^S \ddot{\phi} \ : \ \frac{1}{2} a \left(\cos(\phi_2) B_x + \sin(\phi_2) B_y \right) = J_2^S \ddot{\phi}_2$$

Aufgabe 19

a) <u>Energie</u>

Klotz 1: $E_1^K = \frac{1}{2} m_1 v^2 = 5 m v^2$

Räder 2: $E_2^K = 4 \left(\frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega^2 \right) = 2 m_2 v^2 + 2 J_2 \omega^2 = 4 m v^2 + 2 m R^2 \omega^2$

Stangen 3: $E_3^K = 2 \cdot \frac{1}{2} m_3 \left(v_{3x}^2 + v_{3y}^2 \right) = m \left(v_{3x}^2 + v_{3y}^2 \right)$

$$E_3^G = 2 m_3 g \left(R + r \cos(\phi) \right) = 2 m g R \left(1 + \frac{4}{5} \cos(\phi) \right)$$

Gesamt:

$$E_s = m \left(9 v^2 + 2 R^2 \omega^2 + v_{3x}^2 + v_{3y}^2 \right) + 2 m g R \left(1 + \frac{4}{5} \cos(\phi) \right)$$

b) <u>Kinematik</u>

Rollbedingung: $v = \omega R \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{v}{R}, \quad \phi = \frac{s}{R}$

Stangen:

$$v_{3x} = v_{Cx} = v + \omega r \cos(\phi) = v \left(1 + \frac{r}{R} \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right) = v \left(1 + \frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right)$$

$$v_{3y} = v_{Cy} = -\omega r \sin(\phi) = -v \frac{r}{R} \sin\left(\frac{s}{R} \right) = -\frac{4}{5} v \sin\left(\frac{s}{R} \right)$$

c) Geschwindigkeit

Energieerhaltungssatz: $E_s = E_0$

Mit den kinematischen Beziehungen folgt für die Energie:

$$E_s = m v^2 \left(11 + \left(1 + \frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right)^2 + \frac{16}{25} \sin^2\left(\frac{s}{R} \right) \right) + 2\, m g R \left(1 + \frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right)$$

$$= m v^2 \left(12 + \frac{16}{25} + \frac{8}{5} \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right) + 2\, m g R \left(1 + \frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{25} m v^2 \left(316 + 40 \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right) + 2\, m v_0^2 \left(1 + \frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right)$$

$$E_0 = \frac{356}{25} m v_0^2 + \frac{18}{5} m v_0^2 = \frac{446}{25} m v_0^2$$

Einsetzen in den Energieerhaltungssatz ergibt:

$$\frac{1}{25} m v^2(s) \left(316 + 40 \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right) + 2\, m v_0^2 \left(1 + \frac{4}{5} \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right) = \frac{446}{25} m v_0^2$$

$$v^2(s) \left(316 + 40 \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right) = \left(446 - 50 - 40 \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right) v_0^2 = \left(396 - 40 \cos\left(\frac{s}{R} \right) \right) v_0^2$$

$$v(s) = v_0 \sqrt{\frac{396 - 40 \cos(s/R)}{316 + 40 \cos(s/R)}}$$

Aufgabe 20

a) Geometrie

Aus der Zeichnung kann abgelesen werden:

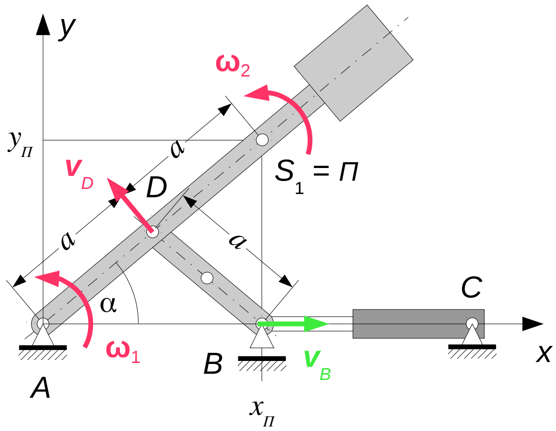
$$x_B(t) = 3a - L(t)$$

$$2a \cos(\alpha) = x_B \;\rightarrow\; \cos(\alpha = \frac{x_B}{2a})$$

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{x_B^2}{4a^2}} = \frac{\sqrt{4a^2 - x_B^2}}{2a}$$

b) Momentanpol

Die Zeichnung zeigt:



$$x_\Pi = x_B$$

$$y_\Pi = 2a\sin(\alpha) = \sqrt{4a^2 - x_B^2}$$

c) Winkelgeschwindigkeiten

Körper 1: $\omega_1 = \dot{\alpha}$

Aus $2a\cos(\alpha) = x_B$ folgt:

$$-2a\sin(\alpha)\dot{\alpha} = \dot{x}_B = -\dot{L} = -v_0$$

$$\rightarrow \omega_1 = \frac{v_0}{\sqrt{4a^2 - x_B^2}}$$

Körper 2: Drehung um Π

$$v_B = -v_0 = y_\Pi \omega_2 \rightarrow \omega_2 = -\frac{v_0}{y_\Pi} = -\frac{v_0}{\sqrt{4a^2 - x_B^2}} = -\omega_1$$

Alternativer Lösungsweg

Körper 2 dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 um Π:

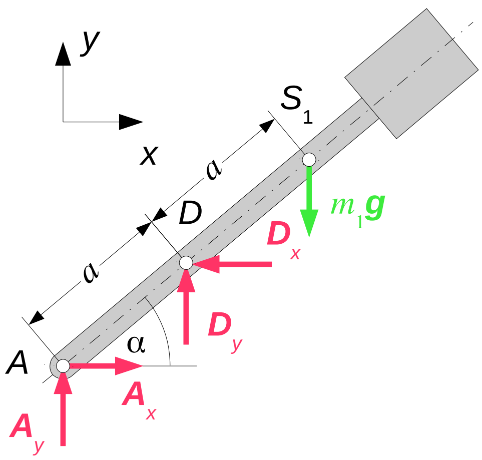
$$y_\Pi \omega_2 = v_B = -v_0 \rightarrow \omega_2 = -\frac{v_0}{y_\Pi} = -\frac{v_0}{\sqrt{4a^2 - x_B^2}}$$

Im Punkt *D* ist Körper 2 mit Körper 1 verbunden:

$$v_D = -a\omega_2 = a\omega_1 \rightarrow \omega_1 = -\omega_2$$

d) Kinetik

Körper 1:



$$\sum M^A = J^A \dot{\omega} \;:\; a\sin(\alpha) D_x + a\cos(\alpha)\left(D_y - 2m_1 g\right) = J_1^A \dot{\omega}_1$$

Der Schwerpunktsatz liefert zwei weitere Gleichungen, aus denen die Kräfte im Lager *A* ermittelt werden können. Diese sind aber nicht gefragt.

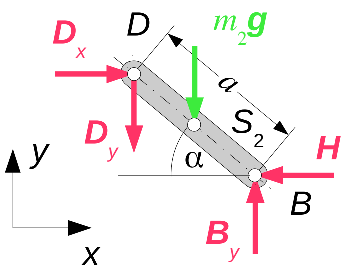
Körper 2:

$$\sum F_x = m\, a_{Sx} \;:\; D_x - H = m_2 a_{2x}$$

$$\sum F_y = m\, a_{Sy} \;:\; -D_y - m_2 g + B_y = m_2 a_{2y}$$

$$\sum M^S = J^S \dot{\omega} \;:$$

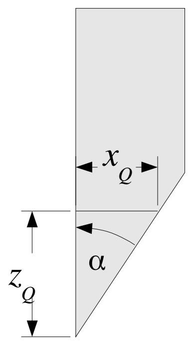
$$\frac{a}{2}\cos(\alpha)\left(D_y + B_y\right) - \frac{a}{2}\sin(\alpha)\left(D_x + H\right) = J_2^S \dot{\omega}_2$$



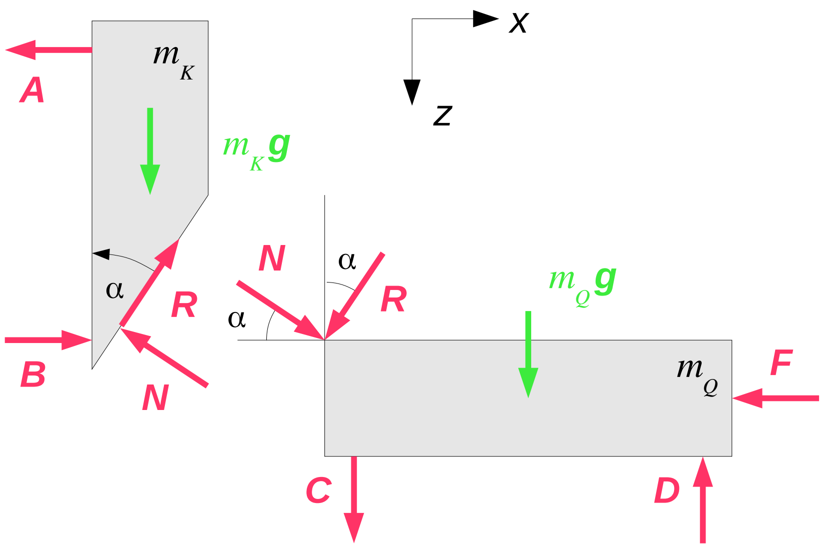
Aufgabe 21

a) <u>Kinematik</u>

$$\frac{x_Q}{z_Q} = \tan(\alpha) \;\rightarrow\; x_Q = \tan(\alpha)\, z_Q$$



b) <u>Freischnitte</u>



c) <u>Kinetik</u>

Keil:

$$\sum F_z = m\,a_z \quad : \quad m_K\,g - N\sin(\alpha) - R\cos(\alpha) = m_K\,\ddot{z}_K$$

Quader:

$$\sum F_x = m\,a_x \quad : \quad N\cos(\alpha) - R\sin(\alpha) - F = m_Q\,\ddot{x}_Q$$

Reibungsgesetz: $R = \mu N$

Federgesetz: $F = c\,x_Q$