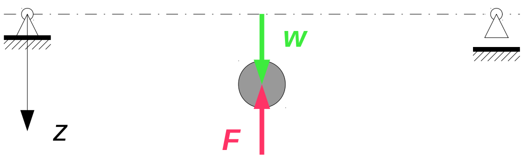
5.2 Freie Schwingungen

Lösungen

Aufgabe 1



Für die an der ausgelenkten Masse angreifende Rückstellkraft gilt (vgl. TM 2):

$$F = \frac{48\,E\,I_y}{L^3}\,w$$

Aus dem Schwerpunktsatz

$$\sum F_z = m\,\ddot{w} \;:\; -F = -48\frac{E\,I_y}{L^3}\,w = m\,\ddot{w}$$

folgt die Schwingungsgleichung

$$\ddot{w} + 48\frac{E\,I_y}{m\,L^3}\,w = 0\,.$$

Daraus kann abgelesen werden: $\omega^2 = 48\dfrac{E\,I_y}{m\,L^3}$

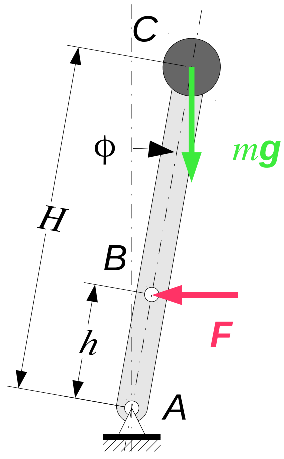
Für die Frequenz folgt: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{48\,E\,I_y}{m\,L^3}} = \dfrac{2}{\pi\,L}\sqrt{\dfrac{3\,E\,I_y}{m\,L}}$

Zahlenwerte:

$$f = \frac{2}{\pi\cdot 2\,\text{m}}\sqrt{\frac{3\cdot 80000\,\text{Nm}^2}{300\,\text{kg}\cdot 2\,\text{m}}} = \frac{20}{\pi}\,\frac{1}{\text{s}} = \underline{6{,}366\,\text{Hz}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \underline{0{,}1571\,\text{s}}$$

Aufgabe 2



Drallsatz:

$$\sum M^A = J^A\,\ddot{\phi} \;:$$
$$-h\cos(\phi)\,F + H\sin(\phi)\,m\,g = m\,H^2\,\ddot{\phi}$$

Mit der Federkraft $F = c\,h\sin(\phi)$ und den für kleine Winkel gültigen Näherungen $\sin(\phi)\approx\phi,\;\cos(\phi)\approx 1$ folgt daraus die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\phi}+\frac{c\,h^2-H\,m\,g}{m\,H^2}\phi=0\,.$$

Daraus kann abgelesen werden:

$$\omega^2=\frac{c}{m}\left(\frac{h}{H}\right)^2-\frac{g}{H}$$

Für die Frequenz folgt:

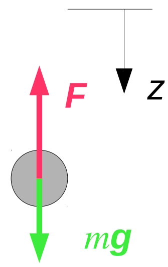
$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}\left(\frac{h}{H}\right)^2-\frac{g}{H}}$$

Zahlenwert:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{30\cdot 10^3\,\mathrm{kg/s^2}}{5\,kg}\left(\frac{10}{30}\right)^2-\frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}3\,\mathrm{m}}}=\underline{4{,}007\,\mathrm{Hz}}$$

Aufgabe 3

Ist w die Auslenkung aus der Lage der entspannten Feder, dann gilt für die Federkraft:



$$F=c\,w$$

Im statischen Gleichgewicht gilt:

$$\sum F_z=0\ :\ m\,g-c\,w_S=0\ \rightarrow\ \frac{c}{m}=\frac{g}{w_S}$$

Wenn die Masse nicht im Gleichgewicht ist, gilt:

$$\sum F_z=m\,\ddot{w}\ :\ m\,g-c\,w=m\,\ddot{w}$$

Daraus folgt:

$$m\,\ddot{w}+c\,w-m\,g=m\,\ddot{w}+c\left(w-w_S\right)+c\,w_S-m\,g=m\,\ddot{w}+c\left(w-w_S\right)=0$$

Wegen $\ddot{w}_S=0$ gilt für die Verschiebung $w_r=w-w_S$ relativ zur statischen Gleichgewichtslage:

$$\ddot{w}_r+\frac{c}{m}w_r=0$$

Die Masse schwingt mit der Kreisfrequenz

$$\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{g}{w_S}}$$

um die statische Gleichgewichtslage. Für die Frequenz folgt:

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{w_S}}$$

Aufgabe 4

a) Gesamtenergie

Mit $\omega_A=\dot{\phi}_A$, $\omega_D=\dot{\phi}_D$ und $v=\dot{s}$ gilt für die kinetische Energie:

$$E_s^K=\frac{1}{2}\left(J_{AC}^A\omega_A^2+J_D^D\omega_D^2+m_L v^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}m_{AC}d^2\omega_A^2+\frac{1}{2}m_D r^2\omega_D^2+m_L v^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}m\left(8d^2\omega_A^2+2r^2\omega_D^2+6v^2\right)$$

Die Lageenergie berechnet sich zu:

$$E_s^G=m_{AC}g\,s_B-m_L g\,s=m\,g\left(6s_B-6s\right)=6m\,g\left(s_B-s\right)$$

Für die Federenergie gilt: $E_s^F=\frac{1}{2}c\,s_B^2$

Damit folgt für die gesamte Energie:

$$E_s=\frac{1}{2}m\left(8d^2\omega_A^2+2r^2\omega_D^2+6v^2\right)+6m\,g\left(s_B-s\right)+\frac{1}{2}c\,s_B^2$$

b) Kinematik

Rolle *D*:

$$v=\dot{s}=r\,\omega_D \quad\rightarrow\quad \omega_D=\frac{v}{r}$$

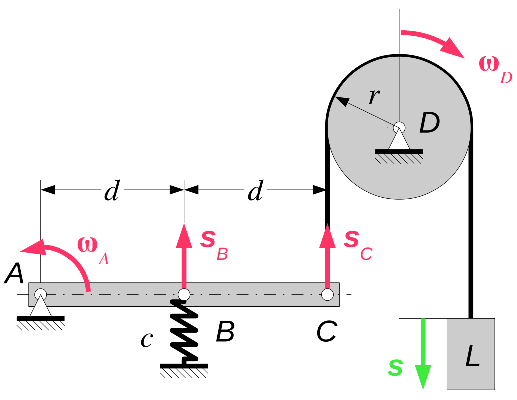
$$v_C=\dot{s}_C=r\,\omega_D=v$$

Stange *AC*:

$$v_C=2d\,\omega_A$$

$$\rightarrow\quad \omega_A=\frac{v_C}{2d}=\frac{v}{2d}$$

$$v_B=d\,\omega_A=\frac{v}{2}\,,\quad s_B=\frac{s}{2}$$



c) Beschleunigung der Last

Energieerhaltungssatz: $E_s=E_0$

Mit $E_0=0$ folgt: $E_s=\frac{1}{2}\left(8d^2\omega_A^2+2r^2\omega_D^2+6v^2\right)+6mg\left(s_B-s\right)+\frac{1}{2}c s_B^2=0$

Einsetzen der kinematischen Beziehungen ergibt:

$$\frac{1}{2}m\left(8\frac{d^2}{4d^2}+2\frac{r^2}{r^2}+6\right)v^2=-6mg\left(\frac{1}{2}-1\right)s-\frac{1}{2}c\frac{s^2}{4}$$

Daraus folgt:

$$5mv^2=3mgs-\frac{1}{8}cs^2 \rightarrow v^2=\frac{3}{5}gs-\frac{1}{40}\frac{c}{m}s^2$$

Für die Beschleunigung folgt: $a(s)=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}=\frac{3}{10}g-\frac{1}{40}\frac{c}{m}s$

d) Statische Gleichgewichtslage

$$a(s_S)=0 \ : \ \frac{3}{10}g-\frac{1}{40}\frac{c}{m}s_S=0 \rightarrow s_S=12\frac{mg}{c}$$

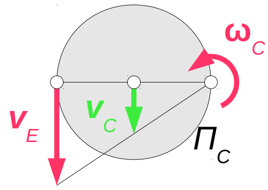
e) Kreisfrequenz

$$\omega=\sqrt{\frac{c}{40m}}$$

Aufgabe 5

a) Kinematik

Rolle *C*:

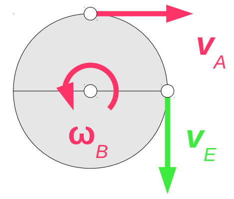


$$v_C=\omega_C r \rightarrow \omega_C=\frac{v_C}{r}$$

$$v_E=2v_C$$

$$v_C=\dot{s}_C,\ \omega_C=\dot{\phi}_C \rightarrow \phi_C=\frac{s_C}{r}$$

Rolle *B*:



$$v_A=v_E=2v_C$$

$$v_E=-r\omega_B \rightarrow \omega_B=-\frac{v_E}{r}=-2\frac{v_C}{r}$$

$$v_A=\dot{s}_A,\ \omega_B=\dot{\phi}_B \rightarrow s_A=2s_C,\ \phi_B=-2\frac{s_C}{r}$$

b) Geschwindigkeit der Rolle *C*

Als Nullniveau für die Lageenergie der Rolle C wird die dargestellte Ausgangslage gewählt. Dann sind in der Ausgangslage alle Energien null.

Für eine beliebige ausgelenkte Lage gilt:

- Feder am Wagen *A*: $E_A^F=\frac{1}{2}c\,s_A^2$
- Wagen *A*: $E_A^K=\frac{1}{2}m_A v_A^2$
- Rolle *B*: $E_B^K=\frac{1}{2}J_B\omega_B^2$
- Rolle *C*: $E_C^G=-m_C g\,s_C$, $E_C^K=\frac{1}{2}m_C v_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega_C^2$
- Feder an Rolle *C*: $E_C^F=\frac{1}{2}c\,s_C^2$

Der Energieerhaltungssatz lautet:

$$E_A^F+E_A^K+E_B^K+E_C^G+E_C^K+E_C^F=0$$

Mit den kinematischen Beziehungen folgt:

$$\frac{1}{2}\left(c\left(2s_C\right)^2+m_A\left(2v_C\right)^2+J_B\left(\frac{2v_C}{r}\right)^2-2m_C g\,s_C+m_C v_C^2+J_C\left(\frac{v_C}{r}\right)^2+c\,s_C^2\right)=0$$

$$\left(4m_A+4\frac{J_B}{r^2}+m_C+\frac{J_C}{r^2}\right)v_C^2=2m_C g\,s_C-5s_C^2$$

Mit den Beziehungen für die Massen und Massenträgheitsmomente folgt:

$$\left(4\cdot 8+4+3+1\right)m\,v_C^2=6m\,g\,s_C-5s_C^2$$

$$40\,m\,v_C^2=6m\,g\,s_C-5s_C^2$$

$$v_C=\sqrt{\frac{6m\,g\,s_C-5c\,s_C^2}{40\,m}}$$

c) Beschleunigung der Rolle *C*

$$a_C=\frac{1}{2}\frac{dv_C^2}{ds_C}=\frac{3}{40}g-\frac{1}{8}\frac{c}{m}s_C$$

d) Kreisfrequenz

Aus der Schwingungsgleichung

$$\ddot{s}_C + \frac{1}{8}\frac{c}{m} s_C = \frac{3}{40} g$$

kann abgelesen werden: $\omega = \sqrt{\frac{1}{8}\frac{c}{m}}$

Aufgabe 6

a) Kinematik

$$a\phi_C = s \quad \rightarrow \quad \phi_C = \frac{s}{a}$$

$$a\phi_B = a\phi_C \quad \rightarrow \quad \phi_B = \phi_C = \frac{s}{a}$$

$$a\phi_D = a\phi_B \quad \rightarrow \quad \phi_D = \phi_B = \frac{s}{a}$$

$$-a\phi_D = s_E \quad \rightarrow \quad s_E = -s$$

$$s_A = 5a\phi_B \quad \rightarrow \quad s_A = 5s$$

b) Geschwindigkeit der Masse *F*

Als Nullniveau für die Massen *E* und *F* wird die dargestellte Lage gewählt.

Zustand *A*: dargestellte Lage

Zustand *B*: beliebige Lage

Energien:

		Zustand *A*	Zustand *B*
E^K	*B*	$\frac{1}{2} J_B \omega_{B0}^2$	$\frac{1}{2} J_B \omega_B^2$
	C	$\frac{1}{2} J_C \omega_{C0}^2$	$\frac{1}{2} J_C \omega_C^2$
	D	$\frac{1}{2} J_D \omega_{D0}^2$	$\frac{1}{2} J_D \omega_D^2$
	E	$\frac{1}{2} m v_{E0}^2$	$\frac{1}{2} m v_E^2$

		Zustand *A*	Zustand *B*
	F	$\frac{1}{2} m v_0^2$	$\frac{1}{2} m v^2$
E^G	*E* *F*	0 0	$-m g s_E$ $-m g s$
E^F		0	$\frac{1}{2} c s_A^2$

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2}\left(J_B \omega_{B0}^2 + J_C \omega_{C0}^2 + J_D \omega_{D0}^2 + m v_{E0}^2 + m v_0^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(J_B \omega_B^2 + J_C \omega_C^2 + J_D \omega_D^2 + m v_E^2 + m v^2\right) - m g s_E - m g s + \frac{1}{2} c s_A^2$$

Massenträgheitsmomente:

$$J_B = J_C = J_D = \frac{1}{2} m a^2$$

Einsetzen der Massenträgheitsmomente und der kinematischen Beziehungen ergibt:

$$\left(\frac{3}{2} m + 2m\right) v_0^2 = \frac{7}{2} m v^2 + c (5s)^2$$

$$v_0^2 - \frac{50}{7} \frac{c}{m} s^2 = v^2 \rightarrow v(s) = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{50}{7} \frac{c}{m} s^2}$$

c) <u>Frequenz</u>

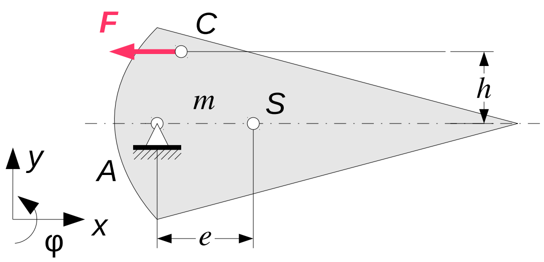
Für die Beschleunigung gilt:

$$a(s) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} = -\frac{50}{7} \frac{c}{m} s$$

Daraus kann abgelesen werden:

$$f = \frac{5}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{c}{m}}$$

Aufgabe 7



Drallsatz bezüglich *A*:

$$\sum M^A = J^A \ddot{\phi} \quad :$$

$$h F = m\left(e^2 + i_S^2\right)\ddot{\phi}$$

Für kleine Winkel gilt für die Federkraft:

$$F = -c\, h\, \phi$$

Einsetzen in den Drallsatz ergibt:

$$m\left(e^2 + i_S^2\right)\ddot{\phi} + c\, h^2 \phi = 0$$

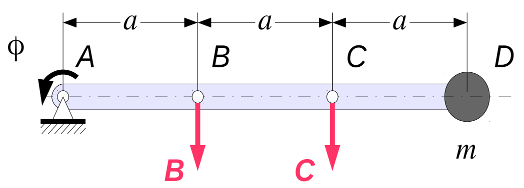
Daraus folgt die Schwingungsgleichung: $\ddot{\phi} + \dfrac{c\, h^2}{m\left(e^2 + i_s^2\right)}\phi = 0$

Daraus kann abgelesen werden: $\omega^2 = \dfrac{c\, h^2}{m\left(e^2 + i_s^2\right)}$

Für die Frequenz folgt: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{h}{\sqrt{e^2 + i_s^2}}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$

Aufgabe 8

a) <u>Schwingungsgleichung</u>



Drallsatz:

$$\sum M^A = J^A \ddot{\phi} \quad :$$

$$-a B - 2 a C = m (3a)^2 \ddot{\phi}$$

Einsetzen der Kräfte

$$B = d\, a\, \dot{\phi}, \quad C = c(2a)\phi$$

in den Drallsatz führt auf

$$9 m a^2 \ddot{\phi} + d a^2 \dot{\phi} + 4 c a^2 \phi = 0.$$

Daraus folgt die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\phi} + \frac{d}{9m}\dot{\phi} + \frac{4}{9}\frac{c}{m}\phi = 0.$$

b) <u>Schwingungsparameter</u>

Aus der Schwingungsgleichung kann abgelesen werden:

$$\omega^2=\frac{4}{9}\frac{c}{m} \rightarrow \omega=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{c}{m}},\quad 2\delta=\frac{d}{9m} \rightarrow \delta=\frac{d}{18m}$$

Zahlenwerte:

$$\omega=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4500\,\mathrm{N/m}}{5\,\mathrm{kg}}}=\underline{20\frac{1}{\mathrm{s}}},\quad \delta=\frac{36\,\mathrm{kg/s}}{18\cdot 5\,\mathrm{kg}}=\underline{0{,}4\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

c) Kennwerte der gedämpften Schwingung

Lehrsches Dämpfungsmaß: $D=\frac{\delta}{\omega}=\frac{0{,}4}{20}=\underline{0{,}02}$

Gedämpfte Kreisfrequenz: $\omega_d=\omega\sqrt{1-D^2}=20\frac{1}{\mathrm{s}}\sqrt{1-0{,}02^2}=\underline{19{,}996\frac{1}{\mathrm{s}}}$

Gedämpfte Periode: $T_d=\frac{2\pi}{\omega_d}=\frac{2\pi}{19{,}996\,\mathrm{s}^{-1}}=\underline{0{,}3142\,\mathrm{s}}$

d) Abklingvorgang

Ist ϕ_n die Amplitude am Ende der n-ten Schwingung, dann gilt:

$$\frac{\phi_0}{\phi_n}=\frac{\phi_0}{\phi_1}\cdot\frac{\phi_1}{\phi_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\phi_{n-1}}{\phi_n}=e^{n\delta T_d}=e^{n\Lambda}$$

Auflösen nach n ergibt:

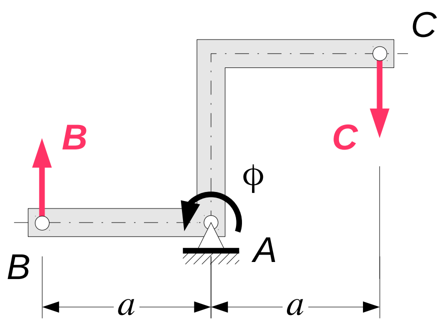
$$\ln\left(\frac{\phi_0}{\phi_n}\right)=n\Lambda \rightarrow n=\frac{1}{\Lambda}\ln\left(\frac{\phi_0}{\phi_n}\right)$$

Zahlenwerte:

$$\Lambda=\delta T_d=0{,}4\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 0{,}3142\,\mathrm{s}=0{,}1257$$

$$n=\frac{1}{0{,}1257}\ln(10)=\underline{18{,}32}$$

Aufgabe 9



a) Schwingungsgleichung

Drallsatz bezüglich A:

$$\sum M^A=J^A\ddot{\phi}\ :\ -aB-aC=J^A\ddot{\phi}$$

Federkraft: $B=ca\phi$

Dämpferkraft: $C=da\dot{\phi}$

Einsetzen in den Drallsatz ergibt: $J^A \ddot{\phi} + d\,a^2 \dot{\phi} + c\,a^2 \phi = 0$

Daraus folgt die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{\phi} + \frac{d\,a^2}{J^A}\dot{\phi} + \frac{c\,a^2}{J^A}\phi = 0$$

Aus der Schwingungsgleichung kann abgelesen werden:

$$\omega^2 = \frac{c\,a^2}{J^A} \rightarrow \omega = a\sqrt{\frac{c}{J^A}}$$

$$2\,\delta = \frac{d\,a^2}{J^A} \rightarrow \delta = \frac{d\,a^2}{2\,J^A}$$

b) Abklingkonstante, Kreisfrequenz und Lehrsches Dämpfungsmaß

Periode der gedämpften Schwingung: $T_d = 0{,}3$ s

Aus

$$\delta\,T_d = \Lambda = \ln\left(\frac{1}{0{,}7}\right) = -\ln(0{,}7)$$

folgt:

$$\delta = -\frac{1}{T_d}\ln(0{,}7) = \frac{-\ln(0{,}7)}{0{,}3\,\mathrm{s}} = \underline{1{,}189\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

Für die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung gilt:

$$\omega_d = \frac{2\,\pi}{T_d} = \frac{2\,\pi}{0{,}3\,\mathrm{s}} = 20{,}94\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Aus $\omega_d^2 = \omega^2 - \delta^2$ folgt: $\omega^2 = \omega_d^2 + \delta^2$

Damit berechnet sich die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung zu

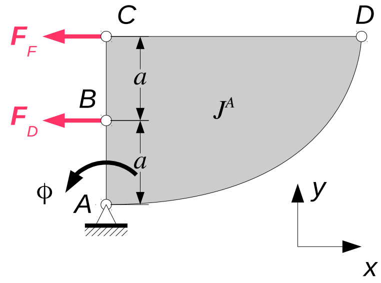
$$\omega = \sqrt{20{,}94^2 + 1{,}189^2}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{20{,}97\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

Das Lehrsche Dämpfungsmaß berechnet sich zu

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{1{,}189}{20{,}97} = \underline{5{,}670\,\%}$$

Aufgabe 10

a) Schwingungsgleichung



Drallsatz bezüglich *A*:

$$\sum M^A = J^A \ddot{\phi} \; : \; 2aF_F + aF_D = J^A \ddot{\phi}$$

Federkraft: $F_F = -2ac\phi$

Dämpferkraft: $F_D = -ad\dot{\phi}$

Einsetzen in den Drallsatz ergibt: $J^A \ddot{\phi} + a^2 d \dot{\phi} + 4a^2 c \phi = 0$

Daraus folgt die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{\phi} + \frac{a^2 d}{J^A}\dot{\phi} + \frac{4a^2 c}{J^A}\phi = 0$$

Aus der Schwingungsgleichung kann abgelesen werden:

$$\delta = \frac{a^2 d}{2J^A} \; , \; \omega^2 = \frac{4a^2 c}{J^A}$$

Mit

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

folgt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{J^A}{c}}$$

b) Abklingkonstante, Kreisfrequenz und Lehrsches Dämpfungsmaß

Aus $\Lambda = \delta T_d$ folgt: $\delta = \frac{\Lambda}{T_d}$

Mit $T_d = 0{,}12 \text{ s}$ und

$$\Lambda = \ln\left(\frac{1}{0{,}8}\right)$$

gilt:

$$\delta = \frac{-\ln(0{,}8)}{0{,}12\,\text{s}} = 1{,}860\,\frac{1}{\text{s}}$$

Aus $\omega_d^2 = \omega^2 - \delta^2$ folgt: $\omega^2 = \omega_d^2 + \delta^2 = \left(\frac{2\pi}{T_d}\right)^2 + \delta^2$

Zahlenwert: $\omega=\sqrt{\left(\frac{2\pi}{0{,}12\,\mathrm{s}}\right)^2+1{,}860^2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}}=\sqrt{52{,}36^2+1{,}860^2}\,\frac{1}{\mathrm{s}}=52{,}39\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

Daraus folgt für das Lehrsche Dämpfungsmaß:

$$D=\frac{\delta}{\omega}=\frac{1{,}860}{52{,}39}=3{,}550\,\%$$

Proben:

$$\omega_d=52{,}39\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot\sqrt{1-0{,}0355^2}=52{,}36\,\frac{1}{\mathrm{s}} \;\rightarrow\; T_d=\frac{2\pi}{52{,}36}\,\mathrm{s}=0{,}12\,\mathrm{s}$$

$$\Lambda=\frac{2\pi\cdot 0{,}0355}{\sqrt{1-0{,}0355^2}}=0{,}2232\;,\quad \Lambda=-\ln(0{,}8)=0{,}2231$$

c) <u>Massenträgheitsmoment und Dämpferkonstante</u>

Aus

$$\omega^2=\frac{4a^2c}{J^A}$$

folgt:

$$J^A=\frac{4a^2c}{\omega^2}$$

Mit den Ergebnissen aus b) und den gegebenen Zahlenwerten folgt:

$$J^A=\frac{4\cdot 0{,}1^2\,\mathrm{m}^2\cdot 10^6\,\mathrm{N/m}}{52{,}39^2\,\mathrm{s}^{-2}}=14{,}57\,\mathrm{kgm}^2$$

Aus

$$\delta=\frac{a^2d}{2J^A}$$

folgt:

$$d=\frac{2J^A\delta}{a^2}$$

Zahlenwert:

$$d=\frac{2\cdot 14{,}57\,\mathrm{kgm}^2\cdot 1{,}860\,\mathrm{s}^{-1}}{0{,}1^2\,\mathrm{m}^2}=5420\,\mathrm{kg/s}$$

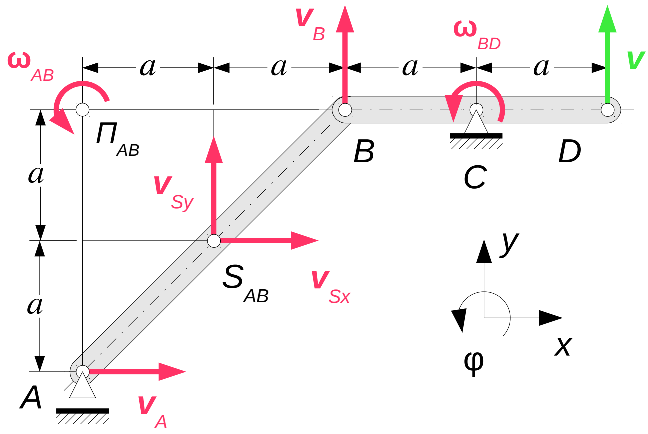
Aufgabe 11

a) Massenträgheitsmomente

$$J_{AB}^S=\frac{1}{12}m_{AB}\left(2\sqrt{2}a\right)^2=\frac{2}{3}m_{AB}a^2=\frac{4}{3}m\,a^2$$

$$J_{BD}^C=\frac{1}{12}m_{BD}(2a)^2=\frac{1}{3}m\,a^2$$

b) Kinematik



Stange *BD*:

$$v=\omega_{BD}a \rightarrow \omega_{BD}=\frac{v}{a}$$

Stange *AB*:

$$v_B=-\omega_{BD}a=-v=2a\omega_{AB}$$

$$\rightarrow \omega_{AB}=-\frac{v}{2a}$$

$$v_A=2a\omega_{AB}=-v$$

$$v_{Sx}=\omega_{AB}a=-\frac{1}{2}v$$

$$v_{Sy}=\omega_{AB}a=-\frac{1}{2}v$$

Alternative Lösung ohne Momentanpol (Stange *AB*):

Als Bezugspunkt für die Kinematik von Stab *AB* wird Punkt *B* gewählt.

$$v_B=-\omega_{BD}a=-v$$

$$0=v_{Ay}=v_B-2a\omega_{AB}=-v-2a\omega_{AB} \rightarrow \omega_{AB}=-\frac{v}{2a}$$

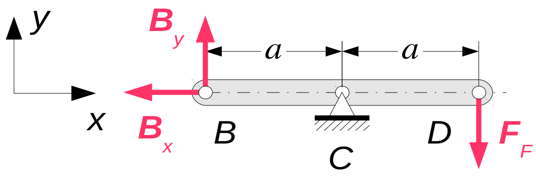
$$v_A=v_{Ax}=2a\omega_{AB}=-v$$

$$v_{Sx}=a\omega_{AB}=-\frac{1}{2}v$$

$$v_{Sy}=v_B-\omega_{AB}a=-v+\frac{1}{2}v=-\frac{1}{2}v$$

c) Kinetik

Stange *BD*

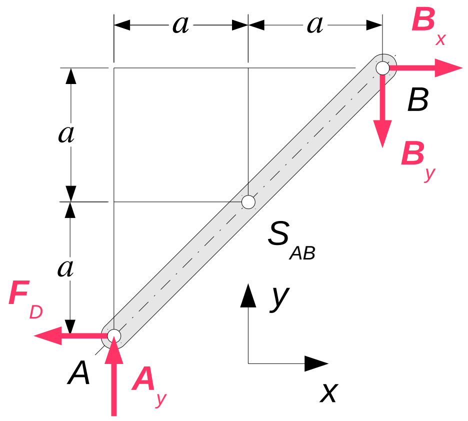


$$\sum M^C = J^C \dot{\omega} \quad :$$
$$-a B_y - a F_F = J_{BD}^C \dot{\omega}_{BD} \qquad (1)$$

Lineare Feder:

$$F_F = c s \qquad (2)$$

Stange *AB*



$$\sum F_x = m a_x \quad :$$
$$-F_D + B_x = m_{AB} \dot{v}_{Sx} \qquad (3)$$

$$\sum F_y = m a_y \quad :$$
$$A_y - B_y = m_{AB} \dot{v}_{Sy} \qquad (4)$$

$$\sum M^S = J^S \dot{\omega} \quad :$$
$$-a \left(A_y + B_y + F_D + B_x \right) = J_{AB}^S \dot{\omega}_{AB} \qquad (5)$$

Linearer Dämpfer:

$$F_D = d v_A \qquad (6)$$

d) Schwingungsgleichung

Zuerst werden die Gelenkkräfte eliminiert:

(1) und (2): $B_y = -c s - \dfrac{J_{BD}^C}{a} \dot{\omega}_{BD}$

(3) und (6): $B_x = m_{AB} \dot{v}_{Sx} + d v_A$

(4): $A_y = m_{AB} \dot{v}_{Sy} + B_y = m_{AB} \dot{v}_{Sy} - c s - \dfrac{J_{BD}^C}{a} \dot{\omega}_{BD}$

Einsetzen der Kräfte in (5) ergibt:

$$m_{AB} \dot{v}_{Sy} - 2 c s - 2 \frac{J_{BD}^C}{a} \dot{\omega}_{BD} + 2 d v_A + m_{AB} \dot{v}_{Sx} = -\frac{J_{AB}^S}{a} \dot{\omega}_{AB}$$

Mit den Beziehungen für die Massen und die Massenträgheitsmomente folgt:

$$2 m \left(\dot{v}_{Sx} + \dot{v}_{Sy} \right) - 2 c s + 2 d v_A - \frac{2}{3} m a \dot{\omega}_{BD} + \frac{4}{3} m a \dot{\omega}_{AB} = 0$$

Einsetzen der kinematischen Beziehungen ergibt:

$$m\left(-2-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)\dot{v}-2\,d\,v-2\,c\,s=0 \quad \rightarrow \quad \frac{10}{3}m\,\ddot{s}+2\,d\,\dot{s}+2\,c\,s=0$$

Daraus folgt die Schwingungsgleichung:

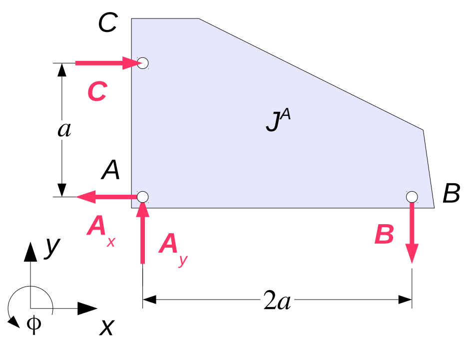
$$\ddot{s}+\frac{3}{5}\frac{d}{m}\dot{s}+\frac{3}{5}\frac{c}{m}s=0$$

Aus der Schwingungsgleichung kann abgelesen werden:

$$\delta=\frac{3}{10}\frac{d}{m}\ ,\quad \omega=\sqrt{\frac{3}{5}\frac{c}{m}}$$

Aufgabe 12

a) <u>Schwingungsgleichung</u>



Drallsatz bezüglich *A*:

$$\sum M^A=J^A\ddot{\phi}\ :\ -a\,C-2\,a\,B=J^A\ddot{\phi}$$

Federkraft: $B=c\cdot 2\,a\,\phi$

Dämpferkraft: $C=d\,a\,\dot{\phi}$

Einsetzen ergibt:

$$-d\,a^2\dot{\phi}-4\,c\,a^2\phi=J^A\ddot{\phi}$$

Daraus folgt die Schwingungsgleichung: $\ddot{\phi}+\frac{d\,a^2}{J^A}\dot{\phi}+\frac{4\,c\,a^2}{J^A}\phi=0$

b) <u>Schwingungsdauer und Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung</u>

Schwingungsdauer: $T_d=\frac{T_B}{N}=2\,\text{s}$

Kreisfrequenz: $\omega_d=\frac{2\pi}{T_d}=3{,}142\,\frac{1}{\text{s}}$

c) <u>Systemparameter</u>

Abklingkonstante:

Aus

$$\frac{\phi_0}{\phi_N}=e^{\delta N T_d}=e^{\delta T_B}$$

folgt:

$$\ln\left(\frac{\phi_0}{\phi_N}\right)=\delta T_B \rightarrow \delta=\frac{1}{T_B}\ln\left(\frac{\phi_0}{\phi_N}\right)$$

Zahlenwert:

$$\delta=\frac{1}{50\,\mathrm{s}}\ln(10)=0{,}04605\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Lehrsches Dämpfungsmaß:

Wegen $\omega > \omega_d$ gilt: $D=\frac{\delta}{\omega}<\frac{\delta}{\omega_d}=\frac{0{,}04605}{3{,}142}=0{,}01466<10\,\%$

Daher darf die Näherung

$$\Lambda=\delta T_d=2\pi D$$

verwendet werden. Daraus folgt: $D=\frac{\delta T_d}{2\pi}$

Zahlenwert: $D=\frac{0{,}04605\cdot 2}{2\pi}=0{,}01466$

Massenträgheitsmoment:

Aus der Schwingungsgleichung kann abgelesen werden:

$$\omega^2=\frac{4ca^2}{J^A} \rightarrow J^A=\frac{4ca^2}{\omega^2}$$

Mit

$$\omega^2=\frac{\omega_d^2}{1-D^2}=\frac{3{,}142^2}{1-0{,}01466^2}\frac{1}{\mathrm{s}^2}=9{,}874\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

folgt:

$$J^A=\frac{4\cdot 500\,\mathrm{N/m}\cdot 1\,\mathrm{m}^2}{9{,}874\,\mathrm{s}^{-2}}=202{,}6\,\mathrm{kgm}^2$$

Dämpferkonstante:

Aus der Schwingungsgleichung kann abgelesen werden:

$$2\delta=\frac{d\,a^2}{J^A} \rightarrow d=2\delta\frac{J^A}{a^2}$$

Zahlenwert:

$$d=2\cdot 0{,}04605\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot\frac{202{,}6\,\mathrm{kgm}^2}{1\,\mathrm{m}^2}=18{,}66\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Aufgabe 13

a) <u>Kinematik</u>

$$v = r\,\omega \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

b) <u>Geschwindigkeit</u>

Alle Kräfte sind konservativ. Daher kann die Aufgabe mit dem Energieerhaltungssatz gelöst werden.

Zustand *A*: Ausgangslage

Zustand *B*: beliebige ausgelenkte Lage

Das Nullniveau für die Lageenergie wird in die Ausgangslage gelegt.

Energien:

		Zustand *A*	Zustand *B*
E^K	Rolle	$\frac{1}{2} J^C \omega_0^2$	$\frac{1}{2} J^C \omega^2$
	Masse	$\frac{1}{2} m v_0^2$	$\frac{1}{2} m v^2$
E^G	Masse	0	$-m g s$
E^F	Feder	0	$\frac{1}{2} c s^2$

Energieerhaltungssatz: $E_A^K + E_A^G + E_A^F = E_B^K + E_B^G + E_B^F$

$$\frac{1}{2}\left(J^C \omega_0^2 + m v_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(J^C \omega^2 + m v^2\right) - m g s + \frac{1}{2} c s^2$$

Mit der Kinematik folgt:

$$\left(\frac{J^C}{r^2} + m\right) v_0^2 + 2\, m g s - c s^2 = \left(\frac{J^C}{r^2} + m\right) v^2$$

Einsetzen von $J^C = 3 m r^2$ ergibt:

$$4 m v_0^2 + 2 m g s - c s^2 = 4 m v^2$$

Daraus folgt:

$$v^2(s) = v_0^2 + \frac{1}{2} g\, s - \frac{1}{4}\frac{c}{m} s^2 \quad \rightarrow \quad v(s) = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{1}{2} g\, s - \frac{1}{4}\frac{c}{m} s^2}$$

c) <u>Beschleunigung</u>

$$a(s) = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} = \frac{1}{4} g - \frac{1}{4}\frac{c}{m} s$$

d) <u>Frequenz</u>

Aus der Schwingungsgleichung

$$\ddot{s} + \frac{1}{4}\frac{c}{m} s = \frac{1}{4} g$$

kann abgelesen werden:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4}\frac{c}{m}} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$$

Aufgabe 14

a) <u>Kinematik</u>

Da die Trommel rollt, liegt ihr Momentanpol im Berührpunkt mit der Fläche. Damit gilt:

$$\dot{s} = (r_i + r_a)\dot{\phi} \quad \rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{r_i + r_a}, \quad \phi = \frac{s}{r_i + r_a}$$

$$\dot{s}_2 = r_a \dot{\phi} = \frac{r_a}{r_i + r_a}\dot{s} \quad \rightarrow \quad \dot{s}_2 = \frac{r_a}{r_i + r_a}\dot{s}, \quad s_2 = \frac{r_a}{r_i + r_a} s$$

b) <u>Geschwindigkeit</u>

Alle Kräfte sind konservativ. Daher kann die Aufgabe mit dem Energieerhaltungssatz gelöst werden.

Zustand *A*: Ausgangslage, Feder entspannt, Geschwindigkeit v_0

Zustand *B*: beliebige ausgelenkte Lage

Als Nullniveau für die Lageenergie des Klotzes wird die Ausgangslage gewählt.

Energien:

		Zustand A	Zustand B
E^K	Klotz	$\frac{1}{2} m_1 v_0^2$	$\frac{1}{2} m_1 v^2(s)$
	Rolle	$\frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 + \frac{1}{2} \dot{\phi}_0^2$	$\frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}^2$
E^G	Klotz	0	$-m_1 g s$
E^F	Feder	0	$\frac{1}{2} c s_2^2$

Energieerhaltungssatz: $E_A^K + E_A^G + E_A^F = E_B^K + E_B^G + E_G^F$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2(s) + \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}^2 - m_1 g s + \frac{1}{2} c s_2^2$$

Einsetzen der kinematischen Beziehungen ergibt:

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\left(\frac{r_a}{r_i + r_a}\right)^2 + \frac{J_2}{(r_i + r_a)^2}\right) v_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\left(\frac{r_a}{r_i + r_a}\right)^2 + \frac{J_2}{(r_i + r_a)^2}\right) v^2(s) - m_1 g s + \frac{1}{2} c \left(\frac{r_a}{r_i + r_a}\right)^2 s^2$$

$$v^2(s) = v_0^2 + \frac{2 m_1 g s - c\left(\frac{r_a}{r_i + r_a}\right)^2 s^2}{m_1 + m_2\left(\frac{r_a}{r_i + r_a}\right)^2 + \frac{J_2}{(r_i + r_a)^2}} = v_0^2 + \frac{2 m_1 g (r_i + r_a)^2 s - c r_a^2 s^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + m_2 r_a^2 + J_2}$$

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2 m_1 g (r_i + r_a)^2 s - c r_a^2 s^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + m_2 r_a^2 + J_2}}$$

c) <u>Beschleunigung</u>

$$a(s) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} = \frac{m_1 g (r_i + r_a)^2 - c r_a^2 s}{m_1 (r_i + r_a)^2 + m_2 r_a^2 + J_2}$$

d) <u>Eigenkreisfrequenz</u>

Aus der Schwingungsgleichung

$$\ddot{s} + \frac{c r_a^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + m_2 r_a^2 + J_2} s = \frac{m_1 g (r_i + r_a)^2}{m_1 (r_i + r_a)^2 + m_2 r_a^2 + J_2}$$

kann abgelesen werden:

$$\omega=\sqrt{\frac{c\,r_a^2}{m_1(r_i+r_a)^2+m_2\,r_a^2+J_2}}$$

Aufgabe 15

a) Kinematik

Rolle *A*: $2\,r\,\omega_A=\dot{s}_1 \quad \rightarrow \quad \omega_A=\frac{\dot{s}_1}{2\,r}$

Rolle *B:* $r\,\omega_A=2\,r\,\omega_B \quad \rightarrow \quad \omega_B=\frac{1}{2}\omega_A=\frac{\dot{s}_1}{4\,r}$

$$r\,\omega_B=\dot{s}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{s}_2=\frac{1}{4}\dot{s}_1 \quad \rightarrow \quad s_2=\frac{1}{4}s_1$$

b) Gesamtenergie

Kinetische Energie:

$$E^K=\frac{1}{2}\left(m_1\,\dot{s}_1^2+m_2\,\dot{s}_2^2+J\,\omega_A^2+J\,\omega_B^2\right)=\frac{1}{2}\left(4+16\cdot\frac{1}{4^2}+16\cdot\frac{1}{2^2}+16\cdot\frac{1}{4^2}\right)m\,\dot{s}_1^2=5\,m\,\dot{s}_1^2$$

Lageenergie:

Als Nullniveau wird die dargestellte Lage bei entspannter Feder gewählt. Dann gilt:

$$E^G=-m_1\,g\,s_1+m_2\,g\,s_2=\left(-4+16\cdot\frac{1}{4}\right)m\,g\,s_1=0$$

Federenergie: $E^F=\frac{1}{2}c\,s_1^2$

Gesamtenergie: $E=5\,m\,\dot{s}_1^2+\frac{1}{2}c\,s_1^2$

c) Geschwindigkeit

Aus dem Energieerhaltungssatz

$$E(s_1,v_1)=E(0,v_0)$$

folgt:

$$5\,m\,v_1^2+\frac{1}{2}c\,s_1^2=5\,m\,v_0^2 \quad \rightarrow \quad v_1^2=v_0^2-\frac{1}{10}\frac{c}{m}s_1^2 \quad \rightarrow \quad v_1=\pm\sqrt{v_0^2-\frac{1}{10}\frac{c}{m}s_1^2}$$

d) Beschleunigung

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{dv_1^2}{ds_1} = -\frac{1}{10} \frac{c}{m} s_1$$

e) Frequenz

Aus der Schwingungsgleichung

$$\ddot{s}_1 + \frac{1}{10} \frac{c}{m} s_1 = 0$$

folgt:

$$\omega^2 = \frac{1}{10} \frac{c}{m} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{10} \frac{c}{m}}$$