5.3 Erzwungene Schwingungen

Lösungen

Aufgabe 1

a) Schwingungsparameter

Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{5000\,\mathrm{N/m}}{2\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{2500\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}} = \underline{50\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

Abklingkonstante:

$$\delta = \frac{d}{2\,m} = \frac{4\,\mathrm{kg/s}}{2 \cdot 2\,\mathrm{kg}} = \underline{1\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

Lehrsches Dämpfungsmaß:

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{1\,\mathrm{s}^{-1}}{50\,\mathrm{s}^{-1}} = \underline{0{,}02}$$

Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung:

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-D^2} = 50\,\mathrm{s}^{-1}\sqrt{1-0{,}02^2} = 0{,}9998 \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{49{,}99\,\mathrm{s}^{-1}}$$

b) Quasistatischer Bereich

Eine quasistatische Betrachtung ist zulässig für ein Erregerfrequenzverhältnis $\eta < \eta_s = 0{,}3$. Mit

$$\eta = \Omega/\omega$$

folgt: $\Omega < \Omega_s = \eta_s\,\omega = 0{,}3 \cdot 50\,\mathrm{s}^{-1} = \underline{15\,\mathrm{s}^{-1}}$

In diesem Bereich ist die Verschiebungsantwort in Phase mit der Anregung, d. h. der Phasenwinkel ist null.

c) Dynamischer Überhöhungsfaktor bei Resonanz

Für $\Omega = \omega$ gilt $\eta = 1$. Der dynamische Überhöhungsfaktor berechnet sich zu

$$V_{Fres} = V_F(1) = \frac{1}{2\,D} \,.$$

Zahlenwert:

$$V_{Fres} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}02} = \underline{25{,}00}$$

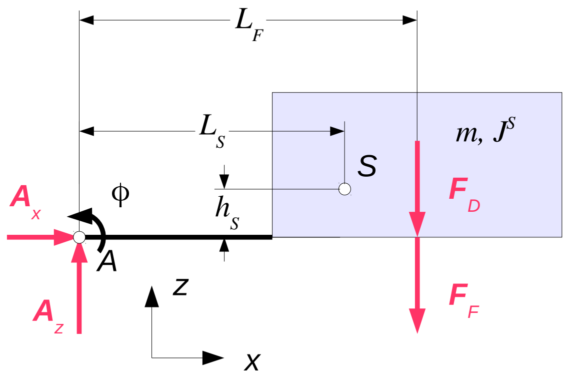
d) Hoher überkritischer Bereich

Die Trägheitskräfte überwiegen für ein Erregerfrequenzverhältnis $\eta > \eta_d = 3$. Daraus folgt für die Erregerkreisfrequenz

$$\Omega_d = \eta_d \omega = 3 \cdot 50\,\text{s}^{-1} = \underline{150\,\text{s}^{-1}}\ .$$

Aufgabe 2

a) Schwingungsparameter



Massenträgheitsmoment bezüglich *A*:

$$J^A = J^S + m\left(L_S^2 + h_S^2\right)$$

Drallsatz bezüglich *A*:

$$J^A \ddot{\phi} = -L_F\left(F_F + F_D\right)$$

Für kleine Winkel ϕ gilt für die Kräfte:

$$F_F = c\,L_F\,\phi,\quad F_D = d\,L_F\,\dot{\phi}$$

Einsetzen in den Drallsatz ergibt:

$$J^A \ddot{\phi} + L_F^2\,d\,\dot{\phi} + L_F^2\,c\,\phi = 0$$

Division durch J^A führt auf die Schwingungsgleichung

$$\ddot{\phi} + \frac{d\,L_F^2}{J^A}\dot{\phi} + \frac{c\,L_F^2}{J^A}\phi = 0\ .$$

Daraus kann abgelesen werden:

$$\omega = L_F\sqrt{\frac{c}{J^A}},\quad \delta = \frac{d\,L_F^2}{2\,J^A}$$

Zahlenwerte:

$$J^A = 250\,\text{kgm}^2 + 500\,\text{kg} \cdot \left(1{,}5^2 + 0{,}5^2\right)\text{m}^2 = 1500\,\text{kgm}^2$$

$$\omega = 2\,\text{m} \cdot \sqrt{\frac{250000\,\text{kg/s}^2}{1500\,\text{kgm}^2}} = \underline{25{,}82\,\frac{1}{\text{s}}}$$

$$\delta = \frac{3000\,\mathrm{kg/s} \cdot 2^2\,\mathrm{m}^2}{2 \cdot 1500\,\mathrm{kgm}^2} = 4\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,,\quad D = \frac{4}{25{,}82} = \underline{0{,}1549}$$

b) <u>Beziehungen für Beschleunigungen und Kräfte</u>

Feder- und Dämpferkraft hängen von der Relativbewegung ab. Für kleine Winkel gilt:

$$z_r = L_F\,\phi - z_F \;\rightarrow\; \phi = \frac{z_r}{L_F} + \frac{z_F}{L_F}$$

Mit $\phi_r = \dfrac{z_r}{L_F}$ gilt: $\phi = \phi_r + \dfrac{z_F}{L_F}$

Wenn das Fahrzeug mit konstanter Geschwindigkeit v fährt, gilt: $x = v\,t$

Daraus folgt:

$$z_F(t) = z_{Fa}\cos\left(2\pi\frac{v}{\lambda}t\right) = z_{Fa}\cos(\Omega t) \quad \text{mit} \quad \Omega = 2\pi\frac{v}{\lambda}$$

Aus der Schwingungsgleichung

$$\ddot{\phi} + 2\delta\dot{\phi}_r + \omega^2\phi_r = 0$$

folgt:

$$\ddot{\phi}_r + 2\delta\dot{\phi}_r + \omega^2\phi_r = -\frac{\ddot{z}_F}{L_F} = \Omega^2\frac{z_{Fa}}{L_F}\cos(\Omega t)$$

Damit gilt für den zeitlichen Verlauf des relativen Winkels

$$\phi_r = \frac{z_{Fa}}{L_F}V_B(\eta)\cos(\Omega t + \psi)$$

mit dem dynamischen Überhöhungsfaktor

$$V_B(\eta) = \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

und dem Phasenwinkel

$$\tan(\psi) = -\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\,.$$

Der absolute Winkel berechnet sich zu

$$\phi=\phi_r+\frac{z_F}{L_F}=\frac{z_{Fa}}{L_F}V_B(\eta)\cos(\Omega t+\psi)+\frac{z_{Fa}}{L_F}\cos(\Omega t)$$
$$=\frac{z_{Fa}}{L_F}\big(V_B(\eta)\cos(\Omega t+\psi)+\cos(\Omega t)\big).$$

Für die Winkelbeschleunigung folgt:

$$\ddot{\phi}=-\Omega^2\frac{z_{Fa}}{L_F}\big(V_B(\eta)\cos(\Omega t+\psi)+\cos(\Omega t)\big)$$

Der Schwerpunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius $r_S=\sqrt{L_S^2+h_S^2}$ um Punkt *A*. Für seine Bahngeschwindigkeit gilt:

$$v_S=r_S\dot{\phi}=-\Omega r_S\frac{z_{Fa}}{L_F}\big(V_B(\eta)\sin(\Omega t+\psi)+\sin(\Omega t)\big)$$

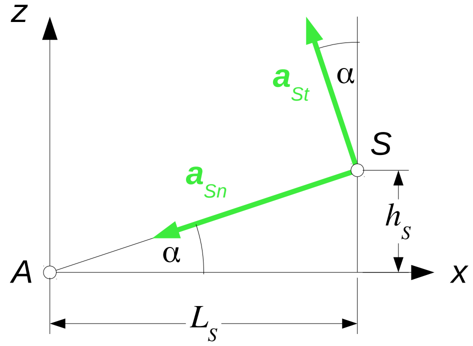
Die Bahnbeschleunigung berechnet sich zu

$$a_{St}=r_S\ddot{\phi}=-\Omega^2 r_S\frac{z_{Fa}}{L_F}\big(V_B(\eta)\cos(\Omega t+\psi)+\cos(\Omega t)\big).$$

Für die Zentripetalbeschleunigung gilt:

$$a_{Sn}=\frac{v_S^2}{r_S}=\Omega^2 r_S\left(\frac{z_{Fa}}{L_F}\right)^2\big(V_B(\eta)\sin(\Omega t+\psi)+\sin(\Omega t)\big)^2$$

Für die Komponenten der Beschleunigung in *x*- und *z*-Richtung folgt:



$$a_{Sx}=-a_{St}\sin(\alpha)-a_{Sn}\cos(\alpha)$$
$$a_{Sz}=a_{St}\cos(\alpha)-a_{Sn}\sin(\alpha)$$

Der Winkel α berechnet sich aus

$$\tan(\alpha)=\frac{h_S}{L_S}.$$

Die Kräfte im Lager *A* können mit dem Schwerpunktsatz berechnet werden:

$$\sum F_x=m\,a_{Sx} \quad : \quad A_x=m\,a_{Sx}$$
$$\sum F_z=m\,a_{Sz} \quad : \quad A_z-F_D-F_F=m\,a_{Sz} \rightarrow A_z=F_D+F_F+m\,a_{Sz}$$

Dabei gilt für die Dämpferkraft

$$F_D=d\,L_F\dot{\phi}_r=-d\,z_{Fa}\Omega V_B(\eta)\sin(\Omega t+\psi)$$

und für die Federkraft

$$F_F=c\,L_F\phi_r=c\,z_{Fa}V_B(\eta)\cos(\Omega t+\psi).$$

c) Zeitliche Verläufe

Mit den gegebenen Zahlenwerten nehmen die Konstanten die folgenden Werte an:

$$\Omega = 2\pi \cdot \frac{15\,\mathrm{m/s}}{4\,\mathrm{m}} = 23{,}56\,\frac{1}{\mathrm{s}}\ ,\ \ \eta = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{23{,}56}{25{,}82} = 0{,}9125$$

$$V_B = \frac{0{,}9125^2}{\sqrt{\left(1-0{,}9125^2\right)^2 + \left(2\cdot 0{,}1549\cdot 0{,}9125\right)^2}} = 2{,}535$$

$$\tan(\psi) = -\frac{2\cdot 0{,}1549\cdot 0{,}9125}{1-0{,}9125^2} = -1{,}689 \ \rightarrow\ \psi = -1{,}036$$

$$\tan(\alpha) = \frac{0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3} \ \rightarrow\ \alpha = 18{,}43\,°\ ,\ \ r_S = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}5^2}\,\mathrm{m} = 1{,}581\,\mathrm{m}$$

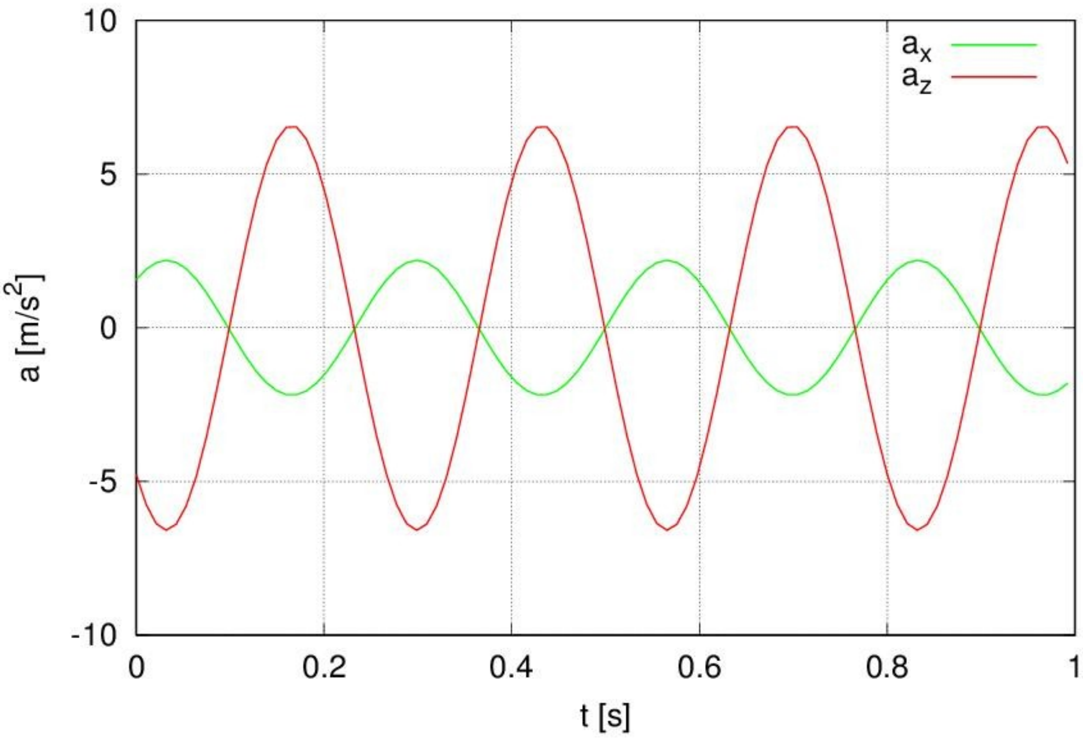
$$\Omega^2 r_s \frac{z_{Fa}}{L_F} = 23{,}56^2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}581\,\mathrm{m}\cdot\frac{5\cdot 10^{-3}}{2} = 2{,}194\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$\left(\Omega^2 r_S \frac{z_{Fa}}{L_F}\right)\frac{z_{Fa}}{L_F} = 2{,}194\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{5\cdot 10^{-3}}{2} = 5{,}485\cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

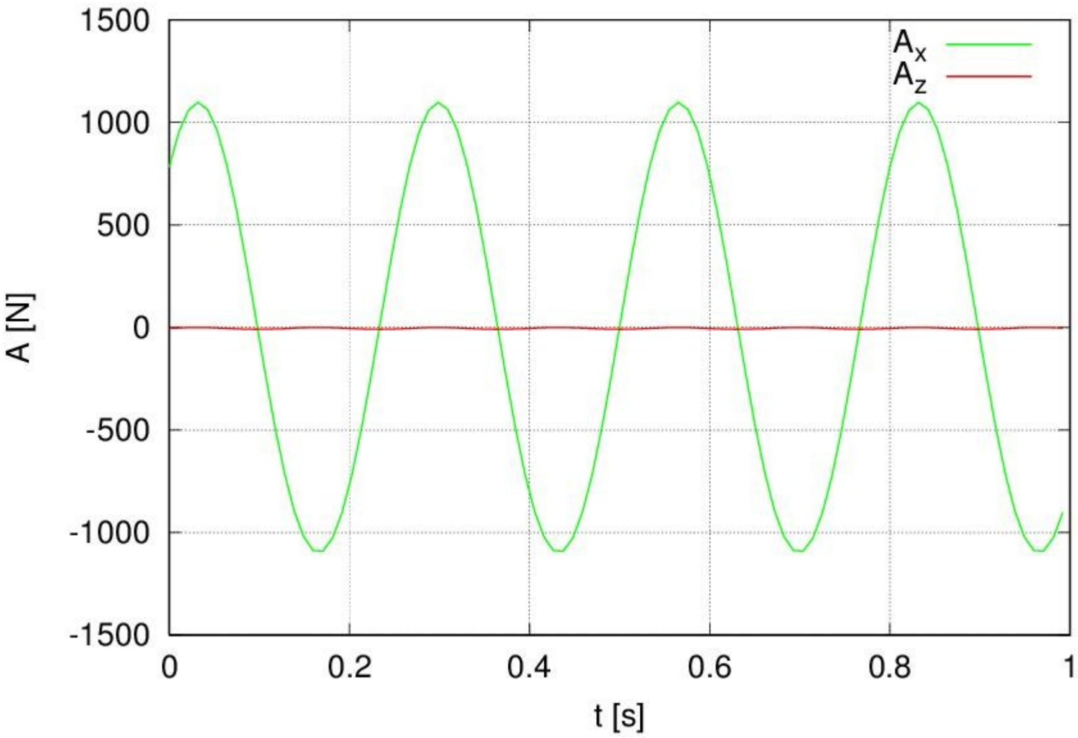
$$d\, z_{Fa}\, \Omega\, V_B = 3000\,\mathrm{kg/s}\cdot 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\cdot 23{,}56\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 2{,}535 = 895{,}9\,\mathrm{N}$$

$$c\, z_{Fa}\, V_B = 250\,\mathrm{N/mm}\cdot 5\,\mathrm{mm}\cdot 2{,}535 = 3169\,\mathrm{N}$$

Beschleunigungen:



Kräfte:



Aufgabe 3

a) <u>Bedingungen für die statische Durchbiegung</u>

Bei einem System mit Unwuchtanregung berechnet sich die Amplitude der Verschiebung zu

$$z_a = \frac{G_A}{G} e V_B(\eta)$$

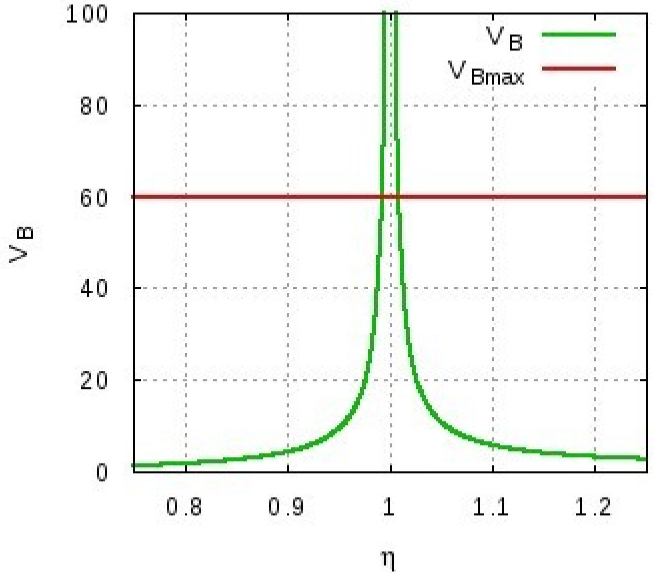
mit

$$V_B(\eta) = \frac{\eta^2}{|1-\eta^2|} .$$

Aus $z_a \le z_{max}$ folgt

$$V_B(\eta) \le \frac{G}{G_A} \frac{z_{max}}{e} = V_{Bmax} .$$

Der Funktionsverlauf von $V_B(\eta)$ zeigt, dass diese Ungleichung in zwei Bereichen erfüllt ist.



Im unterkritischen Bereich $\eta < 1$ gilt

$$V_B(\eta_1) = \frac{\eta_1^2}{1-\eta_1^2} \le V_{Bmax} \ .$$

Daraus folgt: $\eta_1^2 \le V_{Bmax}\left(1-\eta_1^2\right) \rightarrow \eta_1^2\left(1+V_{Bmax}\right) \le V_{3max} \rightarrow \eta_1^2 \le \dfrac{V_{Bmax}}{1+V_{Bmax}}$

Im überkritischen Bereich $\eta > 1$ gilt

$$V_B(\eta_2) = \frac{\eta_2^2}{\eta_2^2-1} \le V_{Bmax} \ .$$

Daraus folgt: $\eta_2^2 \le V_{Bmax}\left(\eta_2^2-1\right) \rightarrow V_{Bmax} \le \eta_2^2\left(V_{3max}-1\right) \rightarrow \dfrac{V_{Bmax}}{V_{Bmax}-1} \le \eta_2^2$

Zwischen der Eigenkreisfrequenz und der statischen Durchbiegung besteht die Beziehung

$$\omega^2 = \frac{g}{z_s} \ .$$

Für das Erregerfrequenzverhältnis folgt daraus

$$\eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \Omega^2 \frac{z_s}{g} \ .$$

Im unterkritischen Bereich gilt:

$$\eta^2 = \Omega^2 \frac{z_s}{g} \le \frac{V_{Bmax}}{1+V_{Bmax}} \rightarrow z_s \le \frac{g}{\Omega^2} \frac{V_{Bmax}}{1+V_{Bmax}}$$

Im überkritischen Bereich gilt:

$$\eta^2 = \Omega^2 \frac{z_s}{g} \ge \frac{V_{Bmax}}{V_{Bmax}-1} \rightarrow z_s \ge \frac{g}{\Omega^2} \frac{V_{Bmax}}{V_{Bmax}-1}$$

Zahlenwerte:

$$\Omega = \frac{\pi}{30} n = \frac{\pi}{30} \cdot 1500 \frac{1}{\mathrm{s}} = 157{,}1 \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$\frac{g}{\Omega^2} = 3{,}976 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0{,}3976\,\mathrm{mm}$$

$$V_{Bmax} = \frac{12}{2} \frac{0{,}5}{0{,}05} = 60$$

$$z_{s1} = 0{,}3976\,\mathrm{mm} \cdot \frac{60}{61} = \underline{0{,}3910\,\mathrm{mm}} \ , \quad z_{s2} = 0{,}3976\,\mathrm{mm} \cdot \frac{60}{59} = \underline{0{,}4043\,\mathrm{mm}}$$

b) Flächenträgheitsmoment des Trägers

Die statische Durchbiegung des Trägers berechnet sich zu

$$z_s = \frac{1}{3}\frac{G L^3}{E I_y} .$$

Daraus folgt

$$I_y = \frac{1}{3}\frac{G L^3}{E z_s} .$$

Aus den Ungleichungen für die statische Durchbiegung folgt

$$I_y \ge I_{y1} = \frac{1}{3}\frac{G L^3}{E z_{s1}} \text{ oder } I_y \le I_{y2} = \frac{1}{3}\frac{G L^3}{E z_{s2}} .$$

Zahlenwerte:

$$I_{y2} = \frac{1}{3}\frac{12\cdot 10^3\,\mathrm{N}\cdot 1500^3\,\mathrm{mm}^3}{2\cdot 10^5\,\mathrm{N/mm}^2\cdot 0{,}4043\,\mathrm{mm}} = \frac{6{,}75\cdot 10^7}{0{,}4043}\,\mathrm{mm}^4 = \underline{16700\,\mathrm{cm}^4}$$

$$I_{y1} = \frac{6{,}75\cdot 10^7}{0{,}3910}\,\mathrm{mm}^4 = \underline{17260\,\mathrm{cm}^4}$$

Aufgabe 4

a) Eigenkreisfrequenz

Aus $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$

folgt: $\omega = \sqrt{\frac{5\cdot 10^3\,\mathrm{kg/s^2}}{0{,}2\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{25000}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 158{,}1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$

b) Erregerkreisfrequenzen für Anschlagen

Der Klotz schlägt am Gehäuse an, wenn die Amplitude z_{ra} der Relativbewegung zum Gehäuse größer als d ist, d. h. für

$$z_{ra}(\eta) = V_B(\eta)\,h \ge d .$$

Daraus folgt zunächst

$$V_B(\eta) \ge \frac{d}{h} .$$

Für $D < 5\ \%$ gilt außerhalb des kritischen Bereichs:

$$V_B(\eta)=\frac{\eta^2}{|1-\eta^2|}$$

Unterkritischer Bereich: $\eta < 0{,}8$

$$\frac{\eta^2}{1-\eta^2}\geq\frac{d}{h}=\frac{4}{3} \rightarrow \eta^2\geq\frac{4}{3}(1-\eta^2) \rightarrow \frac{7}{3}\eta^2\geq\frac{4}{3} \rightarrow \eta^2\geq\frac{4}{7}$$

$$\rightarrow \eta\geq\frac{2}{\sqrt{7}}=0{,}7559<0{,}8$$

Überkritischer Bereich: $\eta > 1{,}2$

$$\frac{\eta^2}{\eta^2-1}\geq\frac{d}{h}=\frac{4}{3} \rightarrow \eta^2\geq\frac{4}{3}(\eta^2-1) \rightarrow \frac{4}{3}\leq\frac{1}{3}\eta^2 \rightarrow \eta\leq 2>1{,}2$$

Mit

$$\eta=\Omega/\omega$$

gilt für die Erregerkreisfrequenz:

$$0{,}7559\cdot 158{,}1\frac{1}{\mathrm{s}}=119{,}5\frac{1}{\mathrm{s}}\leq\Omega\leq 2\cdot 158{,}1\frac{1}{\mathrm{s}}=316{,}2\frac{1}{\mathrm{s}}$$

c) <u>Einfluss der Dämpfung</u>

Beide Grenzfrequenzen liegen außerhalb des kritischen Bereichs. Daher hat der genaue Wert der Dämpfung keinen Einfluss.