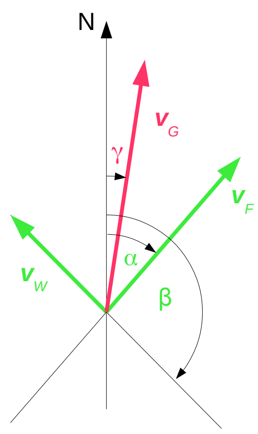
1.2 Räumliche Bewegung

Aufgaben

Aufgabe 1



Ein Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit v_F gegenüber der Luft einen angezeigten Kurs von 30°. Der Wind weht mit der Geschwindigkeit v_W aus Süd-Ost.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_G über Grund und den Winkel γ.

Zahlenwerte: $v_F = 200$ km/h, $v_W = 20$ km/h, $\alpha = 30°$, $\beta = 135°$

(Ergebnis: $v_G = 206{,}1$ km/h, $\gamma = 24{,}62°$)

Aufgabe 2

Die Bahn eines Flugzeugs ist gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\boldsymbol{e}_x + R\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\boldsymbol{e}_y + v_z\, t\, \boldsymbol{e}_z\ .$$

a) Ermitteln Sie den Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}(t)$, die Bahngeschwindigkeit $v(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}(t)$.

b) Bestimmen Sie für die Zeitpunkte $t = 0$ s, 5 s, 10 s, 15 s und 20 s die Ortsvektoren und die Geschwindigkeitsvektoren. Stellen Sie die Projektion der Vektoren in die *xy*-Ebene graphisch dar (Maßstab: 20 m = 1 cm, 10 m/s = 1 cm).

c) Bestimmen Sie für die angegebenen Zeitpunkte die Beschleunigungsvektoren und stellen Sie diese graphisch dar (Maßstab: 2 m/s^2 = 1 cm). Ermitteln Sie auch die Beträge der Beschleunigungsvektoren.

d) Beschreiben Sie die Bahn, auf der das Flugzeug fliegt.

Zahlenwerte: $R = 100$ m, $T = 20$ s, $v_z = 3$ m/s

(Ergebnis: Bahngeschwindigkeit $v = 31{,}56$ m/s, Betrag der Beschleunigung $a = 9{,}87$ m/s^2)

Aufgabe 3

Die Bahn eines Punktes ist gegeben durch

$$\boldsymbol{r}(t)=R\,e^{t/T}\left(\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)\boldsymbol{e}_y\right).$$

a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und den Beschleunigungsvektor.

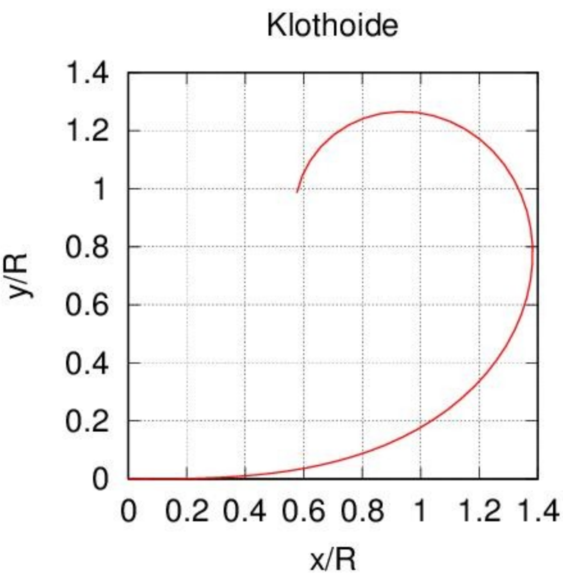
b) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit und die Bahnbeschleunigung.

c) Berechnen Sie die Normalbeschleunigung.

(Ergebnis: Bahngeschwindigkeit: $v(t)=(R/T)e^{t/T}\sqrt{1+4\pi^2}$; Bahnbeschleunigung: $a_t(t)=(R/T^2)e^{t/T}\sqrt{1+4\pi^2}$; Betrag der Normalbeschleunigung: $a_n(t)=2\pi a_t(t)$)

Aufgabe 4

Für den Übergang aus einer Geraden in eine Kurve werden so genannte Klothoiden verwendet. Bei einer Klothoide ist die Krümmung proportional zur Bogenlänge s. Für den Einheitstangentenvektor gilt:



$$\boldsymbol{e}_t(s)=\cos\left(\frac{s^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\sin\left(\frac{s^2}{2R^2}\right)\boldsymbol{e}_y$$

Ermitteln Sie die Bahnbeschleunigung a_t und die Normalbeschleunigung a_n ,

a) wenn die Klothoide mit der konstanten Bahngeschwindigkeit v_0 durchfahren wird, und

b) wenn die Klothoide mit der Bahngeschwindigkeit $v(t)=a_0 t$ durchfahren wird.

(Ergebnis: a) $a_t = 0$, $a_n(t)=v_0^3 t/R^2$; b) $a_t = a_0$, $a_n(t)=a_0^3 t^4/(2R^2)$)

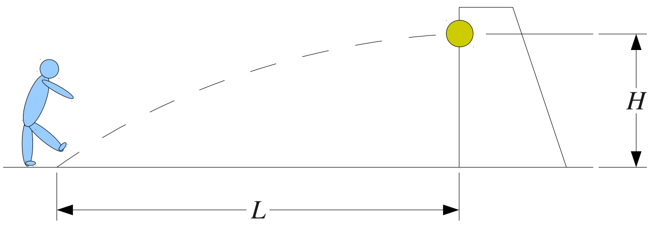
Aufgabe 5

Ermitteln Sie für den schiefen Wurf die Bahngeschwindigkeit und die Bahnbeschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit.

Stellen Sie für die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$ und den Wurfwinkel

$\alpha = 30°$ die zeitlichen Verläufe graphisch dar.

Aufgabe 6



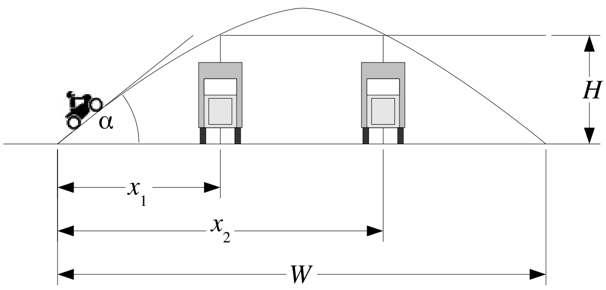
Ein Fußballspieler möchte einen Elfmeter so schießen, dass der Ball mit waagerechter Bahntangente gerade unter der Torlatte hindurch fliegt.

Mit welcher Geschwindigkeit v_0 und mit welchem Winkel α muss der Ball geschossen werden?

Zahlenwerte: $L = 11$ m, $H = 2{,}4$ m

(Ergebnis: $\alpha = 23{,}57°$, $v_0 = 17{,}16$ m/s)

Aufgabe 7



Ein Motorradfahrer möchte in einer Stuntshow über zwei LKWs springen, die in den Abständen x_1 und x_2 von der Rampe stehen. Über den LKWs möchte er eine Höhe H über dem Boden haben.

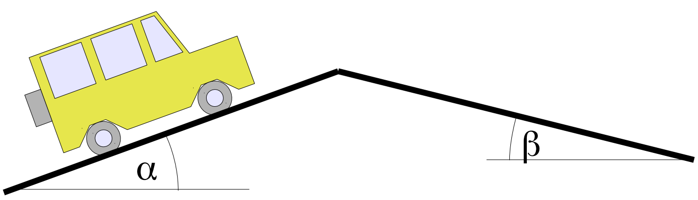
a) Welchen Winkel α muss die Rampe haben, und mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Motorradfahrer über die Rampe fahren?

b) Wie weit springt der Motorradfahrer?

Zahlenwerte: $H = 5$ m, $x_1 = 10$ m, $x_2 = 15$ m

(Ergebnis: $\alpha = 39{,}81°$, $v_0 = 15{,}79$ m/s, $W = 25$ m)

Aufgabe 8



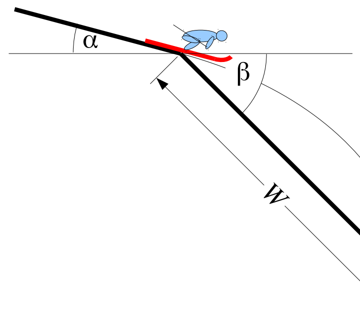
Ein Fahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit v über eine Kante, an der sich die Steigung abrupt ändert. Dabei hebt das Fahrzeug ab. In welchem Abstand d von der Kante, gemessen entlang der Straße, kommt es wieder auf?

Zahlenwerte: $v = 20\ \mathrm{m/s}$, $\alpha = 20°$, $\beta = 10°$

(Ergebnis: $d = 39{,}51\ \mathrm{m}$)

Aufgabe 9

Ein Skifahrer fährt mit der Geschwindigkeit v_0 über eine Kante, an der sich die Hangneigung abrupt ändert. Der Winkel vor der Kante ist α und der Winkel nach der Kante β. Wie groß ist die Sprungweite W?



Zahlenwerte: $v_0 = 36\ \mathrm{km/h}$, $\alpha = 15°$, $\beta = 45°$

(Ergebnis: $W = 19{,}69\ \mathrm{m}$)

Aufgabe 10

Die Bahn eines Punktes ist gegeben durch

$$x(t)=x_0\left(\frac{t}{T}\right)^2,\quad y(t)=y_0\left(\frac{t}{T}\right)^3,\quad 0\le t\le T.$$

Dabei sind x_0, y_0 und T Konstanten.

a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor und die Bahngeschwindigkeit.

b) Berechnen Sie den Beschleunigungsvektor und die Bahnbeschleunigung.

c) Berechnen Sie den Vektor der Normalbeschleunigung.

(Ergebnis: a) $v_x=2x_0 t/T^2,\quad v_y=3y_0 t^2/T^3,\quad v=t\sqrt{4x_0^2+9y_0^2(t/T)^2}/T^2$;

b) $a_x=2x_0/T^2,\quad a_y=6y_0 t/T^3,\quad a_t=\dfrac{4x_0^2+18y_0^2(t/T)^2}{T^2\sqrt{4x_0^2+9y_0^2(t/T)^2}}$;

c) $a_{nx}=-18\dfrac{x_0}{T^2}\dfrac{y_0^2(t/T)^2}{4x_0^2+9y_0^2(t/T)^2},\quad a_{ny}=12\dfrac{y_0}{T^2}(t/T)\dfrac{x_0^2}{4x_0^2+9y_0^2(t/T)^2}$)

Aufgabe 11

Die Bahn eines Punktes ist gegeben durch

$$x(t)=x_0\cos(\omega t),\quad y(t)=y_0\sin(\omega t).$$

Dabei sind x_0, y_0 und ω Konstanten.

a) Ermitteln Sie die Komponenten $v_x(t)$ und $v_y(t)$ des Geschwindigkeitsvektors und die Bahngeschwindigkeit $v(t)$.

b) Ermitteln Sie die Komponenten $a_x(t)$ und $a_y(t)$ des Beschleunigungsvektors und die Bahnbeschleunigung $a_t(t)$.

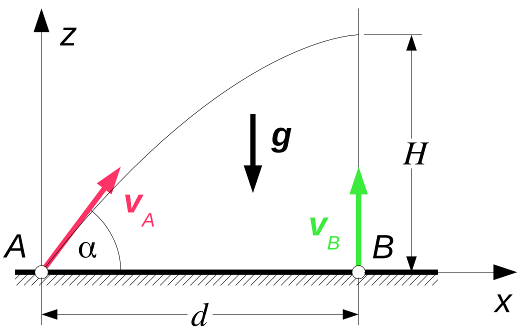
c) Ermitteln Sie die Komponenten $a_{nx}(t)$ und $a_{ny}(t)$ des Vektors der Normalbeschleunigung.

(HM, Prüfung SS 2015)

(Ergebnis: a) $v_x=-x_0\omega\sin(\omega t)$, $v_y=y_0\omega\cos(\omega t)$, $v=\omega\sqrt{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}$; b) $a_x=-x_0\omega^2\cos(\omega t)$, $a_y=-y_0\omega^2\sin(\omega t)$, $a_t=\dfrac{\omega^2(x_0^2-y_0^2)\sin(2\omega t)}{2\sqrt{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}}$; c) $a_{nx}=-x_0\omega^2\dfrac{y_0^2\cos(\omega t)}{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}$, $a_{ny}=-y_0\omega^2\dfrac{x_0^2\sin(\omega t)}{x_0^2\sin^2(\omega t)+y_0^2\cos^2(\omega t)}$)

Aufgabe 12

Der Ball *B* wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_B senkrecht nach oben geworfen. Zum gleichen Zeitpunkt wird im Abstand d auch der Ball *A* mit der Anfangsgeschwindigkeit v_A und dem Wurfwinkel α abgeworfen.



a) Bestimmen Sie die Steigzeit t_H und die Wurfhöhe H von Ball *B*.

b) Bestimmen Sie den Wurfwinkel α und die Anfangsgeschwindigkeit v_A von Ball *A* so, dass die beiden Bälle sich im höchsten Punkt von Ball *B* treffen.

Gegeben: d, v_B

(HM, Prüfung WS 2015)

(Ergebnis: a) $t_H = v_B/g$, $H = v_B^2/(2g)$; b) $\tan(\alpha) = v_B^2/(gd)$, $v_A=\sqrt{(gd/v_B)^2+v_B^2}$)

Aufgabe 13

Die Bahn eines Punktes ist gegeben durch

$$x(t)=r\cos(\omega t),\quad y(t)=r\sin(2\omega t).$$

Dabei sind r und ω Konstanten.

a) Ermitteln Sie die Komponenten $v_x(t)$ und $v_y(t)$ des Geschwindigkeitsvektors und die Bahngeschwindigkeit $v(t)$.

b) Ermitteln Sie die Komponenten $a_x(t)$ und $a_y(t)$ des Beschleunigungsvektors und die Bahnbeschleunigung $a_t(t)$.

Gegeben: r, ω

(HM, Prüfung WS 2016)

(Ergebnis: a) $v_x(t) = -\omega r \sin(\omega t)$, $v_y(t) = 2\omega r \cos(2\omega t)$, $v(t) = \omega r \sqrt{\sin^2(\omega t) + 4\cos^2(2\omega t)}$; b) $a_x(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t)$, $a_y(t) = -4\omega^2 r \sin(2\omega t)$, $a_t(t) = \omega^2 r \dfrac{\sin(2\omega t) - 8\sin(4\omega t)}{2\sqrt{\sin^2(\omega t) + 4\cos^2(2\omega t)}}$)

Aufgabe 14

Die Bahn eines Punktes ist gegeben durch

$$x(t) = r\left(\omega t - \sin(\omega t)\right), \quad y(t) = r\left(1 - \cos(\omega t)\right).$$

Dabei sind r und ω Konstanten.

a) Ermitteln Sie die Komponenten $v_x(t)$ und $v_y(t)$ des Geschwindigkeitsvektors und die Bahngeschwindigkeit $v(t)$.

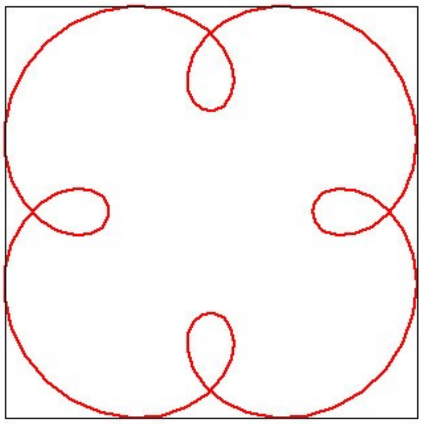
b) Ermitteln Sie die Komponenten $a_x(t)$ und $a_y(t)$ des Beschleunigungsvektors und die Bahnbeschleunigung $a_t(t)$.

Gegeben: r, ω

(HM, Prüfung WS 2018)

(Ergebnis: a) $v_x(t) = \omega r\left(1 - \cos(\omega t)\right)$, $v_y(t) = \omega r \sin(\omega t)$, $v(t) = \omega r \sqrt{2 - 2\cos(\omega t)}$; b) $a_x(t) = \omega^2 r \sin(\omega t)$, $a_y(t) = \omega^2 r \cos(\omega t)$, $a(t) = \omega^2 r \dfrac{\sin(\omega t)}{\sqrt{2 - 2\cos(\omega t)}}$)

Aufgabe 15



Die Bahn eines Punktes ist gegeben durch

$$x(t) = r\left(5\cos(\omega t) - 2\cos(5\omega t)\right)$$
$$y(t) = r\left(5\sin(\omega t) - 2\sin(5\omega t)\right)$$

Dabei sind r und ω Konstanten.

a) Ermitteln Sie die Komponenten $v_x(t)$ und $v_y(t)$ des Geschwindigkeitsvektors und die Bahngeschwindigkeit $v(t)$.

b) Ermitteln Sie die Komponenten $a_x(t)$ und $a_y(t)$ des Beschleunigungsvektors und die Bahnbeschleunigung $a_t(t)$.

Gegeben: r, ω

(HM, Prüfung WS 2021)

(Ergebnis: a) $v_x(t) = -5\omega r\left(\sin(\omega t) - 2\sin(5\omega t)\right)$,
$v_y(t) = 5\omega r\left(\cos(\omega t) - 2\cos(5\omega t)\right)$, $v(t) = 5\omega r\sqrt{5 - 4\cos(4\omega t)}$;
b) $a_x(t) = -5\omega^2 r\left(\cos(\omega t) - 10\cos(5\omega t)\right)$, $a_y(t) = -5\omega^2 r\left(\sin(\omega t) - 10\sin(5\omega t)\right)$,
$a_t(t) = 40\omega^2 r\sin(4\omega t)/\sqrt{5 - 4\cos(4\omega t)}$)