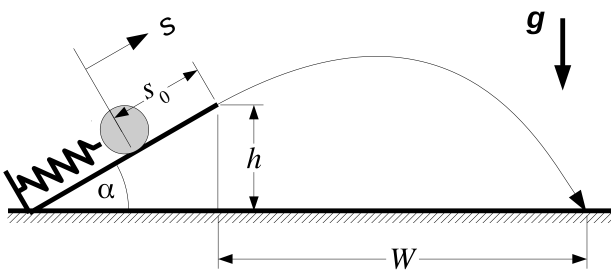
2.2 Arbeit und Energie

Aufgaben

Aufgabe 1

Auf einem Katapult befindet sich eine Kugel der Masse m, die durch eine Feder beschleunigt wird. Die Feder ist am Anfang um die Strecke s_0 zusammengedrückt.



Für die Kraft, die die Feder auf die Kugel ausübt, gilt: $F = c(s_0 - s)$

Während der Beschleunigung gleitet die Kugel auf dem Katapult. Der Reibungskoeffizient zwischen Kugel und Katapult ist μ.

Berechnen Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes

a) die Geschwindigkeit v_B, mit der die Kugel das Katapult verlässt,

b) die maximale Höhe H, die die Kugel erreicht,

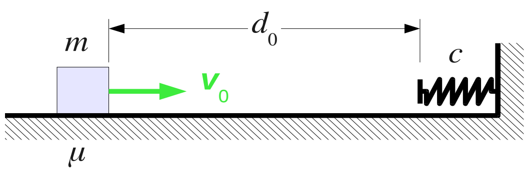
c) die Geschwindigkeit v_D, mit der die Kugel auf den Boden auftrifft.

Zahlenwerte: $m = 10$ kg, $\alpha = 30°$, $c = 10$ N/mm, $s_0 = 200$ mm, $\mu = 0{,}2$, $h = 0{,}2$ m

(Ergebnis: $v_B = 6{,}112$ m/s, $H = 0{,}6760$ m, $v_D = 6{,}425$ m/s)

Aufgabe 2

Die Masse m hat im Abstand d_0 vor einer linearen Feder mit der Federkonstanten c die Geschwindigkeit v_0.



a) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 erreicht die Masse die Feder?

b) Wie groß ist die Einfederung s_1, wenn die Masse zur Ruhe kommt?

c) Welche Geschwindigkeit v_2 hat die Masse, wenn die Feder wieder entspannt ist?

d) In welchem Abstand d_2 von der entspannten Feder kommt die Masse wieder zur Ruhe?

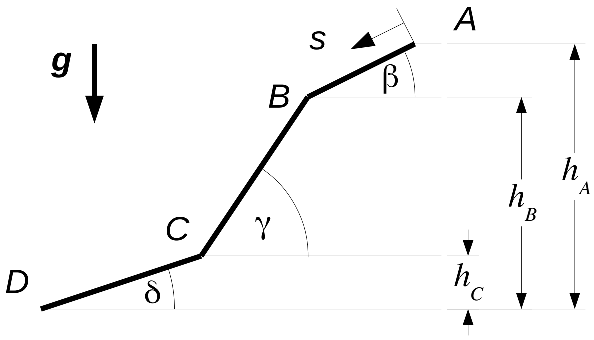
Während des gesamten Vorgangs gleitet die Masse reibungsbehaftet auf dem Boden.

Zahlenwerte: $m = 10$ kg, $d_0 = 5$ m, $c = 10$ kN/m, $v_0 = 10$ m/s, $\mu = 0{,}3$

(Ergebnis: $v_1 = 8{,}401$ m/s, $s_1 = 0{,}2627$ m, $v_2 = 8{,}215$ m/s, $d_2 = 11{,}47$ m)

Aufgabe 3

Eine Wasserrutsche besteht aus drei geraden Teilstücken mit unterschiedlicher Neigung. Ein Kind der Masse m beginnt im Punkt A aus der Ruhe zu rutschen. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Bahn und Kind ist μ.



a) Wie groß sind die Reibungskräfte in den einzelnen Teilstücken?

b) Welche Geschwindigkeit hat das Kind in den Punkten B, C und D?

Zahlenwerte: $m = 30$ kg, $\mu = 0{,}2$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$, $\delta = 20°$, $h_A = 5$ m, $h_B = 4$ m, $h_C = 1$ m

(Ergebnis: $R_{AB} = 50{,}97$ N, $R_{BC} = 41{,}62$ N, $R_{CD} = 55{,}31$ N; $v_B = 3{,}581$ m/s, $v_C = 7{,}740$ m/s, $v_D = 8{,}292$ m/s)

Aufgabe 4

Ein Bungee-Springer der Masse m springt aus der Höhe H. Das Seil, an dem er hängt, hat die Federkonstante c. Der Springer springt aus der Ruhe ab. Der Luftwiderstand darf vernachlässigt werden.

a) Welche Länge L_{max} darf das Seil höchstens haben, wenn der Springer die Höhe h nicht unterschreiten soll?

b) Welche Geschwindigkeit v_0 hat der Springer in dem Moment, in dem das Seil anfängt, gedehnt zu werden?

c) Wie groß ist die größte Verzögerung a_{max}?

Zahlenwerte: $m = 80$ kg, $H = 80$ m, $c = 50$ N/m, $h = 2$ m

(Ergebnis: $L_{max} = 28{,}52$ m, $v_0 = 23{,}66$ m/s, $a_{max} = 2{,}152$ g)

Aufgabe 5

Ein Körper der Masse m wird in der Höhe h aus der Ruhe losgelassen. Er trifft mit der Geschwindigkeit v auf den Erdboden auf. Wie groß ist die Arbeit W^D der dissipativen Kräfte?

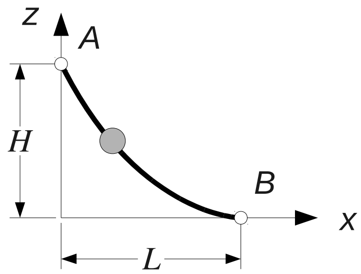
Zahlenwerte: $m = 5$ kg, $h = 20$ m, $v = 15$ m/s

(Ergebnis: $W^D = -418{,}5$ J)

Aufgabe 6

Ein Massenpunkt gleitet unter der Wirkung der Schwerkraft reibungsfrei auf der vorgegebenen Bahn

$$z(x) = H\left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 .$$



Im Punkt *A* ist der Massenpunkt in Ruhe.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Massenpunktes in Abhängigkeit von der Koordinate *x*.

b) Welche Geschwindigkeit v_B hat der Massenpunkt im Punkt *B*?

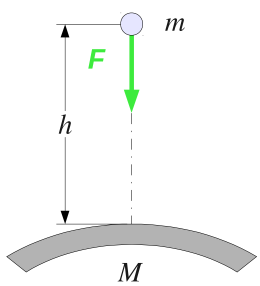
Zahlenwerte: $H = 5$ m, $L = 5$ m

(Ergebnis: $v_B = 9{,}905$ m/s)

Aufgabe 7

Für die Anziehungskraft, die die Erde auf einen Körper der Masse m ausübt, der sich in der Höhe h über der Erdoberfläche befindet, gilt:

$$F(h) = \gamma \frac{M\,m}{(R+h)^2} .$$



Dabei ist γ die Gravitationskonstante, M die Masse der Erde und R der Radius der Erde.

a) Welche Beziehung gilt für die potenzielle Energie $E^P(h)$, wenn als Nullniveau die Erdoberfläche gewählt wird? Welcher Zahlenwert ergibt sich für die Höhe H?

b) Welche Näherung gilt, wenn die Höhe h klein gegenüber dem Erdradius ist?

c) Welcher Zahlenwert folgt aus der Näherung für die Erdbeschleunigung

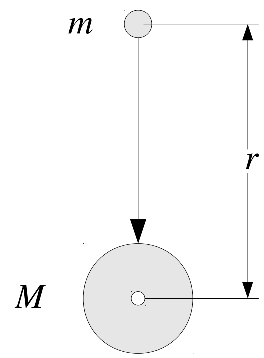
g in Bodennähe?

Zahlenwerte: $\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kgs^2}$, $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $R = 6371\ \mathrm{km}$, $H = 10000\ \mathrm{km}$, $m = 500\ \mathrm{kg}$

(Ergebnis: $E^P(H) = 1{,}911 \cdot 10^7\ \mathrm{kJ}$, $g = 9{,}821\ \mathrm{m/s^2}$)

Aufgabe 8

Ein Meteorit der Masse m fliegt auf gerader Bahn der Erde (Masse M, Radius R) entgegen. Im Abstand r_0 vom Erdmittelpunkt hat er die Geschwindigkeit v_0.



Die Erdanziehungskraft ist eine konservative Kraft mit dem Potenzial

$$E^P(r) = \gamma M m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

bezüglich der Erdoberfläche.

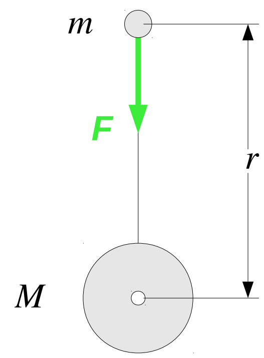
Berechnen Sie mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes die Geschwindigkeit v_E, mit der der Meteorit auf der Erde aufschlägt, wenn Widerstandskräfte vernachlässigt werden.

Daten: $m = 5\ \mathrm{kg}$, $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $R = 6371\ \mathrm{km}$, $\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kgs^2}$, $r_0 = 10000\ \mathrm{km}$, $v_0 = 1000\ \mathrm{km/h}$

(Lösung: $v_E = 24270\ \mathrm{km/h}$)

Aufgabe 9

Die Schwerkraft F, mit der die Erde (Masse M) auf einen Massenpunkt der Masse m ausübt, ist eine konservative Kraft, die zum Erdmittelpunkt hin zeigt. Sie hat den Betrag



$$F = \gamma \frac{M m}{r^2} .$$

a) Begründen Sie, dass die Schwerkraft keine Arbeit verrichtet, wenn der Massenpunkt entlang eines Kreises um den Erdmittelpunkt verschoben wird.

b) Der Bezugspunkt P_0 für das Potenzial der Schwerkraft wird auf die als Kugel mit dem Radius R angenommene Erdoberfläche gelegt. Begründen Sie, dass der Wert des Potenzials unabhängig davon ist, wo auf der Erdoberfläche der Bezugspunkt liegt.

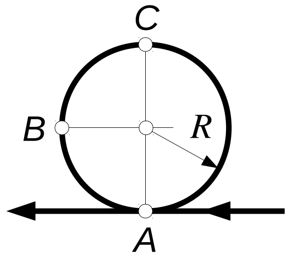
c) Zeigen Sie, dass das Potenzial durch die Funktion

$$E^P(r)=\gamma M m\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)$$

gegeben ist, wenn ein Bezugspunkt auf der Erdoberfläche gewählt wird.

Aufgabe 10

Ein Segelflugzeug fliegt einen Looping, der als idealer Kreis mit Radius R angenommen werden darf.



a) Berechnen Sie die Differenz $\Delta a_n = a_{nA} - a_{nC}$ zwischen den Zentripetalbeschleunigungen in den Punkten *A* und *C*.

b) Welche Geschwindigkeit v_A muss das Segelflugzeug im Punkt *A* haben, wenn die Zentripetalbeschleunigung im Punkt *C* gleich der Erdbeschleunigung sein soll?

c) Berechnen Sie für die in Teilaufgabe b) ermittelte Geschwindigkeit die Geschwindigkeit und die Zentripetalbeschleunigung im Punkt *B*.

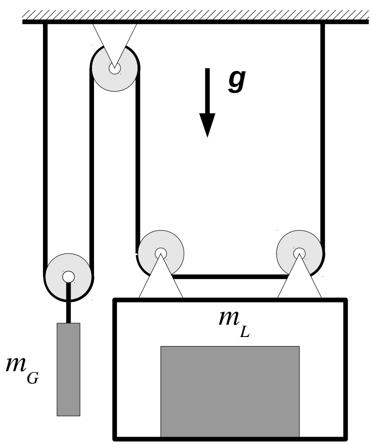
Der Luftwiderstand darf vernachlässigt werden.

Zahlenwert: $R = 75\ \mathrm{m}$

(Ergebnis: a) $\Delta a_n = 4\ \mathrm{g}$; b) $v_A = 218{,}3\ \mathrm{km/h}$; c) $v_B = 169{,}1\ \mathrm{km/h}$, $a_{nB} = 3\ \mathrm{g}$)

Aufgabe 11

Der abgebildete Aufzug besteht aus einem Förderkorb und einem Ausgleichsgewicht. Die Masse des Förderkorbes einschließlich der Ladung ist m_L. Die Masse des Gegengewichts ist m_G. Das Seil ist dehnstarr. Seil und Rollen sind masselos.



a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit des Förderkorbes und dem zurückgelegten Weg, wenn das System sich selbst überlassen wird.

b) Welche Geschwindigkeit v_1 erreicht der Förderkorb nach Zurücklegen des Weges s_1?

c) Welche Beschleunigung a erfährt der Förderkorb?

Zahlenwerte: $m_L = 5\ \mathrm{t}$, $m_G = 1\ \mathrm{t}$, $s_1 = 5\ \mathrm{m}$

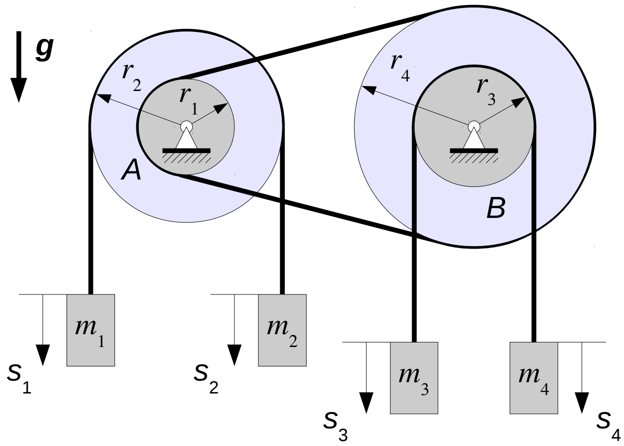
(Ergebnis: $v_1 = 8{,}087$ m/s; $a = 0{,}6667$ g)

Aufgabe 12

Die beiden Rollen *A* und *B* sind reibungsfrei gelenkig gelagert und durch einen dehnstarren Riemen verbunden, der auf den Rollen haftet.

Über den äußeren Umfang der Rolle *A* verläuft ein dehnstarres Seil, an dem die beiden Massen m_1 und m_2 befestigt sind.

Über den inneren Umfang der Rolle *B* verläuft ein dehnstarres Seil, an dem die Massen m_3 und m_4 befestigt sind.



Die Rollen, die Seile und der Riemen sind masselos.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 und v_4 der Massen in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg der jeweiligen Masse, wenn das System aus der Ruhe losgelassen wird.

b) Ermitteln Sie die Beschleunigungen a_1, a_2, a_3 und a_4 der Massen.

Zahlenwerte: $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 20$ cm, $r_3 = 15$ cm, $r_4 = 30$ cm, $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 24$ kg, $m_3 = 36$ kg, $m_4 = 60$ kg

(Ergebnis: $v_1(s_1)=\sqrt{2\,g\,s_1/3}$, $v_2(s_2)=-\sqrt{-2\,g\,s_2/3}$, $v_3(s_3)=\sqrt{8\,g\,s_3/3}/4$, $v_4(s_4)=-\sqrt{-8\,g\,s_4/3}/4$; $a_1 = g/3$, $a_2 = -a_1$, $a_3 = g/12$, $a_4 = -a_3$)

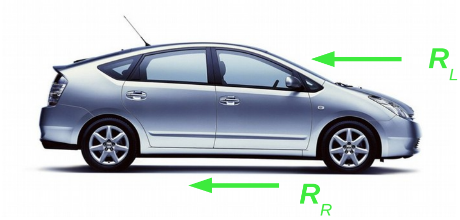
Aufgabe 13

Auf einen PKW der Masse m, der mit konstanter Geschwindigkeit v fährt, wirkt der Rollwiderstand R_R und der Luftwiderstand R_L.

Für den Rollwiderstand gilt: $R_R=\mu_r\,m\,g$

Der Luftwiderstand berechnet sich zu

$$R_L=\frac{1}{2}c_W\,A\,\rho\,v^2 .$$



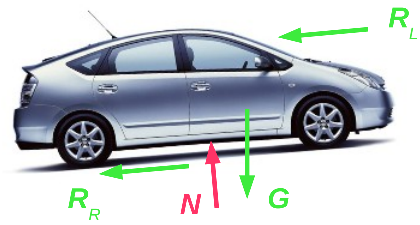
Dabei ist c_W der Luftwiderstandsbeiwert, A eine Bezugsfläche und ϱ die Dichte der Luft.

Wie groß ist die benötigte Antriebsleistung für die Geschwindigkeiten v_1, v_2 und v_3?

Zahlenwerte: $\mu_r = 0{,}014$, $m = 1500$ kg, $c_W = 0{,}26$, $A = 2{,}2\ \text{m}^2$, $\rho = 1{,}21\ \text{kg/m}^3$, $v_1 = 80$ km/h, $v_2 = 120$ km/h, $v_3 = 150$ km/h

(Lösung: $P_1 = 8{,}376$ kW, $P_2 = 19{,}68$ kW, $P_3 = 33{,}62$ kW)

Aufgabe 14



Ein PKW der Masse m fährt eine Steigung von 3% hinauf. Neben der Gewichtskraft wirkt der Rollwiderstand R_R und der Luftwiderstand R_L.

Für den Rollwiderstand gilt $R_R = \mu_r N$, wobei N die Normalkraft senkrecht zur Fahrbahn ist. Der Luftwiderstand berechnet sich zu

$$R_L = \frac{1}{2} c_W A \rho v^2 .$$

Dabei ist c_W der Luftwiderstandsbeiwert, A eine Bezugsfläche und ϱ die Dichte der Luft.

Wie groß ist die maximal mögliche Geschwindigkeit v für die Motorleistung P bei einem Wirkungsgrad η, der die Verluste in Getriebe, Antriebsstrang und sonstigen Aggregaten berücksichtigt?

Zahlenwerte: $\mu_r = 0{,}014$, $m = 1500$ kg, $c_W = 0{,}26$, $A = 2{,}2\ \text{m}^2$, $\rho = 1{,}21\ \text{kg/m}^3$, $P = 100$ kW, $\eta = 80\%$

(Ergebnis: $v = 185$ km/h)

Aufgabe 15

Ein Segelflugzeug der Masse m fliegt in ruhiger Luft mit der konstanten Geschwindigkeit v. Dabei nimmt seine Höhe in der Zeit t um h ab. Wie groß ist die Luftwiderstandskraft R_L?

Zahlenwerte: $m = 280$ kg, $v = 100$ km/h, $t = 5$ min, $h = 220$ m

(Ergebnis: $R_L = 72{,}52$ N)

Aufgabe 16

Ein Fahrzeug der Masse m wird aus dem Stand durch einen Motor beschleunigt, der die konstante Leistung P_0 abgibt. Wie lautet das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v(t)$ und das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz $a(t)$, wenn Widerstandskräfte vernachlässigt werden?

Aufgabe 17

Ein Motorflugzeug der Masse m fliegt nach dem Start mit der Bahngeschwindigkeit v und steigt dabei mit der Steiggeschwindigkeit v_S. Der Luftwiderstand beträgt 7 % der Gewichtskraft. Ermitteln Sie die dafür nötige Nutzleistung P_N des Motors.

Zahlenwerte: $m = 900\ \mathrm{kg}$, $v = 140\ \mathrm{km/h}$, $v_S = 3\ \mathrm{m/s}$

(Ergebnis: $P_N = 50{,}52\ \mathrm{kW}$)