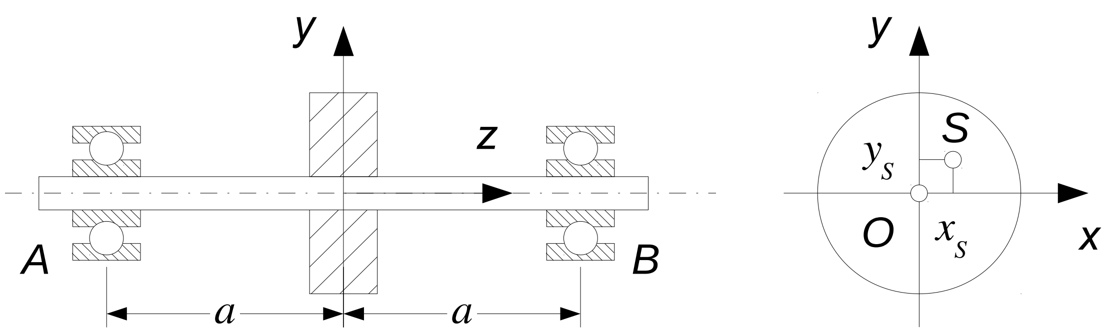
4.1 Rotation um eine feste Achse

Aufgaben

Aufgabe 1



Ein Körper der Masse m dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die raumfeste *z*-Achse. Die beiden Lager *A* und *B* haben jeweils den Abstand a von der Ebene des Körpers, in der sein Schwerpunkt liegt.

Im körperfesten Koordinatensystem *Oxyz* werden die Lagerkräfte A_x, A_y, B_x und B_y gemessen. Es handelt sich dabei um die Kräfte, die das Lager auf die Welle ausübt.

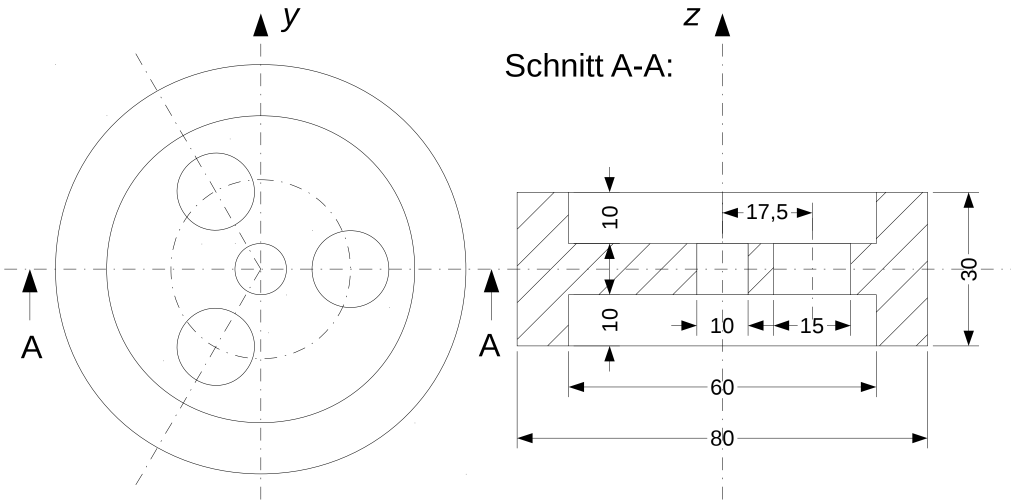
a) Bestimmen Sie die Koordinaten x_S und y_S des Schwerpunkts im körperfesten Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie die Deviationsmomente J^O_{xz} und J^O_{yz} bezüglich des Ursprungs *O* des körperfesten Koordinatensystems.

Zahlenwerte: $m = 20\text{ kg}$, $\omega = 100\text{ s}^{-1}$, $a = 0{,}25\text{ m}$, $A_x = 10\text{ kN}$, $A_y = 0\text{ kN}$, $B_x = -12\text{ kN}$, $B_y = -4{,}5\text{ kN}$ (positive Kräfte zeigen in Achsrichtung)

(Ergebnis: $x_S = 10\text{ mm}$, $y_S = 22{,}5\text{ mm}$; $J^O_{xz} = -0{,}55\text{ kgm}^2$, $J^O_{yz} = -0{,}1125\text{ kgm}^2$)

Aufgabe 2



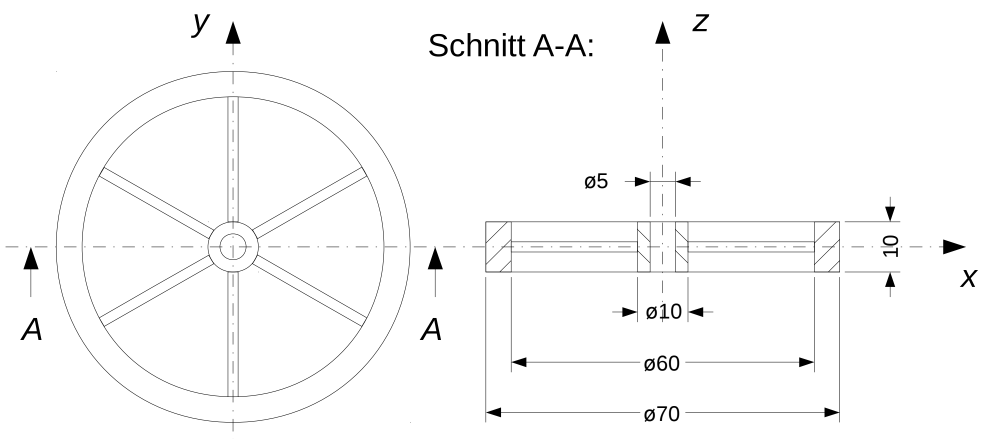
Alle Maße in cm

Für das dargestellte Rad sind die Masse m, die Koordinaten x_S und y_S des Schwerpunktes und das Massenträgheitsmoment J_z um die z-Achse zu bestimmen. Der Winkel zwischen den Bohrungen beträgt jeweils 120°.

Zahlenwert: Dichte $\rho = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/cm^3}$

(Ergebnis: $m = 692\,\mathrm{kg}$, $x_S = y_S = 0\,\mathrm{cm}$, $J_z = 733300\,\mathrm{kgcm^2}$)

Aufgabe 3



Alle Maße in cm

Für das dargestellte Speichenrad ist die Masse m und das Massenträgheitsmoment J_z um die z-Achse zu bestimmen. Der Winkel zwischen den Speichen beträgt jeweils 60°. Die Speichen sind dünne Stäbe mit der Querschnittsfläche A_s.

Zahlenwerte: Dichte $\rho = 7{,}85 \cdot 10^{-3}$ kg/cm^3, Querschnittsfläche $A_s = 12{,}5$ cm^2

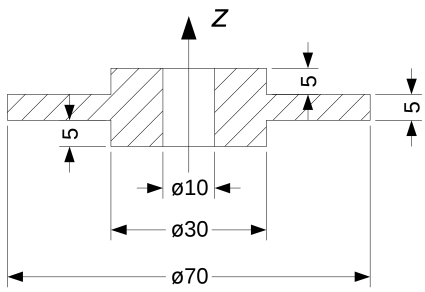
(Ergebnis: $m = 99{,}49$ kg, $J_z = 90510$ kgcm^2)

Aufgabe 4

Für das im Schnitt gezeichnete homogene Rad sind die Masse m und das Massenträgheitsmoment J_z um die z-Achse zu bestimmen.

Zahlenwert: Dichte $\rho = 7{,}85 \cdot 10^{-3}$ kg/cm^3

(Ergebnis: $m = 197{,}3$ kg; $J_z = 98640$ kgcm^2)



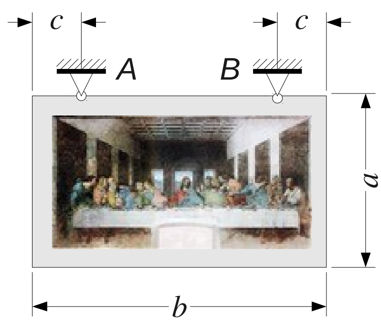
Alle Maße in cm

Aufgabe 5

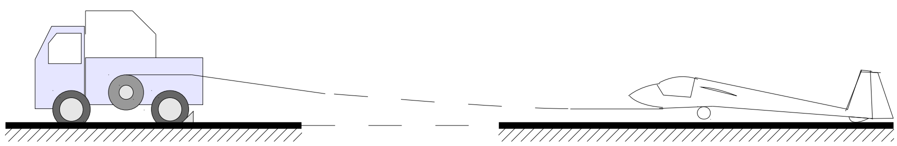
Ein Bild ist an den Punkten *A* und *B* gelenkig aufgehängt. Das Bild kann als homogene rechteckige Scheibe der Masse m betrachtet werden. Wie groß ist die anfängliche Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$, wenn die Aufhängung im Punkt *B* versagt?

Zahlenwerte: $m = 10$ kg, $a = 1m$, $b = 1{,}5$ m, $c = 0{,}3$ m

(Ergebnis: $\dot{\omega} = -6{,}103\,\mathrm{s}^{-2}$)



Aufgabe 6



Das Segelflugzeug mit der Masse m soll beim Windenstart mit der Beschleunigung a beschleunigt werden. Es kann angenommen werden, dass die Seilkraft in horizontaler Richtung am Flugzeug angreift.

Die Seiltrommel der Winde hat einen Durchmesser D und ein Massenträgheitsmoment J. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen dem Segelflugzeug und dem Boden ist μ. Die Masse des Seils und die Reibung des Seils am Boden können vernachlässigt werden.

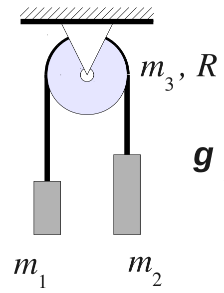
Wie groß ist das Drehmoment M, das an der Seiltrommel angreifen muss?

Zahlenwerte: m = 350 kg, a = 3 m/s^2, D = 1,5 m, J = 50 kgm^2, μ = 0,2

(Ergebnis: M = 1503 Nm)

Aufgabe 7

Die beiden Massen m_1 und m_2 sind durch ein masseloses dehnstarres Seil verbunden, das über eine Rolle der Masse m_3 mit Radius R läuft. Die Rolle ist eine homogene Kreisscheibe.



Wie groß ist die Beschleunigung a_2 der Masse m_2, wenn das System aus der Ruhe losgelassen wird?

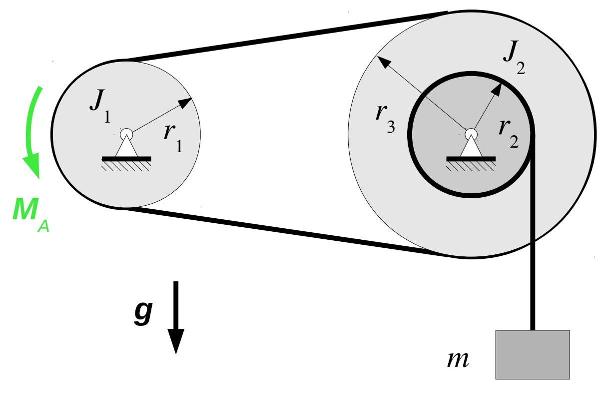
Zahlenwerte: m_1 = 5 kg, m_2 = 10 kg, m_3 = 2 kg

(Ergebnis: a_2 = 0,3125 g)

Aufgabe 8

Die Masse m wird mithilfe einer Winde gehoben. Die Winde besteht aus zwei reibungsfrei gelenkig gelagerten Rollen mit den Massenträgheitsmomenten J_1 und J_2, die durch einen massenlosen dehnstarren Riemen verbunden sind. Die linke Rolle wird durch das konstante Moment M_A angetrieben.

a) Wie hängen die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der beiden Rollen von der Geschwindigkeit v ab, mit der die Masse m angehoben wird?



b) Welche Beziehung besteht zwischen der Geschwindigkeit v und dem Weg s, um den die Masse angehoben wurde, wenn die Masse anfangs in Ruhe ist?

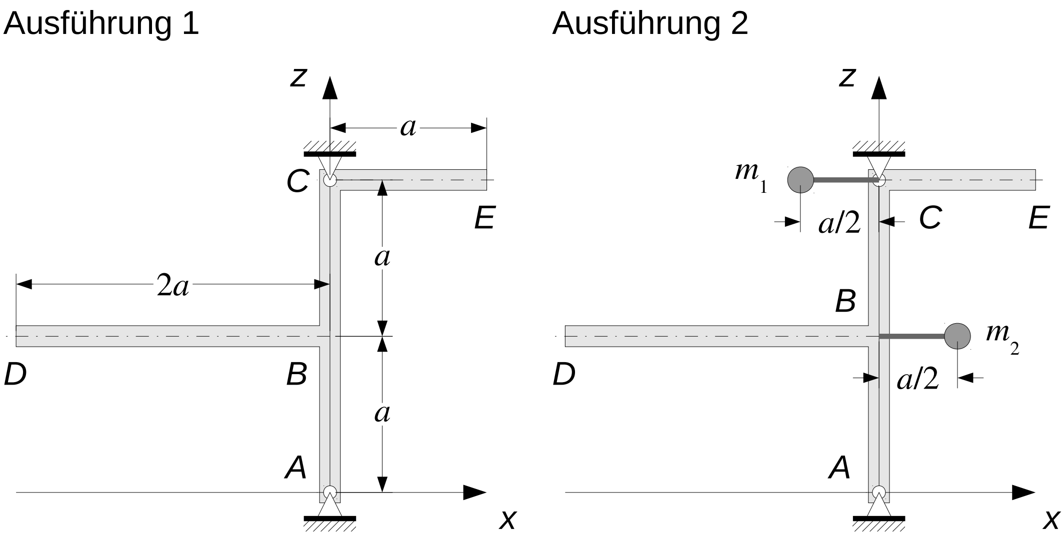
c) Welchen Wert hat das kleinste Antriebsmoment M_{Amin}, das zum Heben der Last erforderlich ist?

d) Welche Beschleunigung a erfährt die Masse für $M_A = 2M_{Amin}$?

Zahlenwerte: r_1 = 0,3 m, r_2 = 0,25 m, r_3 = 0,5 m, m = 100 kg, J_1 = 10 kgm^2, J_2 = 80 kgm^2

(Ergebnis: M_{Amin} = 147,2 Nm, a = 0,05481 g)

Aufgabe 9



Das abgebildete System besteht aus den <u>dünnen</u> Stäben *AC* (Masse m_{AC}), *CE* (Masse m_{CE}) und *BD* (Masse m_{BD}), die starr miteinander verbunden sind. In Ausführung 2 werden zusätzlich zwei Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2 angeschlossen.

a) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment J_{z1}^A und das Deviationsmoment J_{xz1}^A für Ausführung 1.

b) Bestimmen Sie die Massen m_1 und m_2 so, dass das System in Ausführung 2 statisch und dynamisch ausgewuchtet ist.

c) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment J_{z2}^A für Ausführung 2.

Gegeben: a, m, $m_{AC} = m_{BD} = 2m$, $m_{CE} = m$, $J_{yz}^A = 0$

(HM, Prüfung WS 2017)

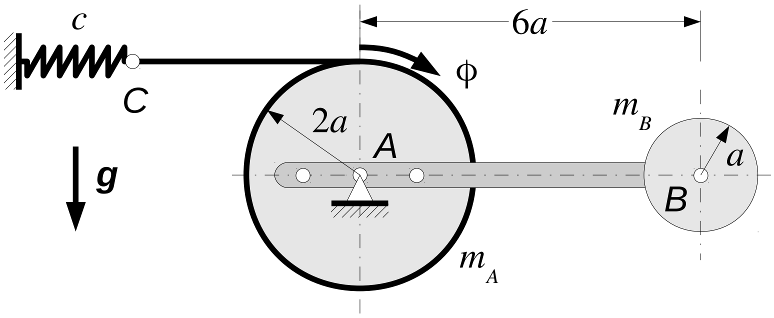
(Ergebnis: a) $J_{z1}^A = 3ma^2$, $J_{xz1}^A = ma^2$; b) $m_1 = m$, $m_2 = 4m$; c) $J_{z2}^A = 17ma^2/4$)

Aufgabe 10

Der abgebildete starre Körper besteht aus einer homogenen Scheibe (Radius $2a$, Masse m_A) und einer homogenen Kugel (Radius a, Masse m_B), die durch eine masselose Stange starr miteinander verbunden sind. Er ist im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert.

Auf der Scheibe ist ein masseloses dehnstarres Seil aufgespult, das im Punkt *C* an eine lineare Feder mit der Federkonstanten c angeschlossen ist.

In der dargestellten Lage ist die Feder entspannt, und der starre Körper ist in Ruhe.



a) Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment J^A des starren Körpers bezüglich des Punktes *A*.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Energieerhaltungssatzes die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\phi}$ in Abhängigkeit vom Winkel ϕ.

c) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ in Abhängigkeit vom Winkel ϕ.

Gegeben: a, c, m, $m_A = 9m$, $m_B = 5m$

(HM, Prüfung SS 2018)

(Ergebnis: a) $J^A = 200ma^2$; b) $\omega = \sqrt{\frac{3}{10}\frac{g}{a}\sin(\phi) - \frac{1}{50}\frac{c}{m}\phi^2}$;

c) $\dot{\omega} = \frac{3}{20}\frac{g}{a}\cos(\phi) - \frac{1}{50}\frac{c}{m}\phi$)