4.2 Allgemeine ebene Bewegung

Aufgaben

Aufgabe 1

Eine Bowlingkugel der Masse m und mit Radius r wird mit verschwindender Winkelgeschwindigkeit horizontal auf die Bahn aufgesetzt. Dabei hat ihr Schwerpunkt die Anfangsgeschwindigkeit v_0.

a) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment J^S der Kugel, wenn die Fingerlöcher vernachlässigt werden und angenommen wird, dass die Kugel homogen ist?

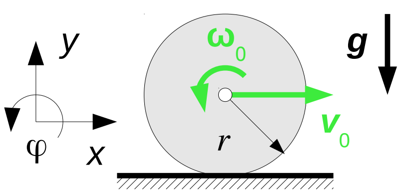
b) Welche Strecke s_G legt die Kugel zurück, bevor sie ohne Gleiten rollt?

Zahlenwerte: $m = 8$ kg, $r = 0{,}1125$ m, $v_0 = 2{,}4$ m/s, $\mu = 0{,}12$

(Ergebnis: $J^S = 0{,}0405$ kgm^2, $s_G = 1{,}198$ m)

Aufgabe 2

Eine Münze (homogene Kreisscheibe mit Radius r und Masse m) hat zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Geschwindigkeit v_0 und die Winkelgeschwindigkeit ω_0. Der Reibungskoeffizient zwischen Münze und Oberfläche ist μ.



a) Welche Beziehung gilt für die Zeit t_G, während der die Münze gleitet?

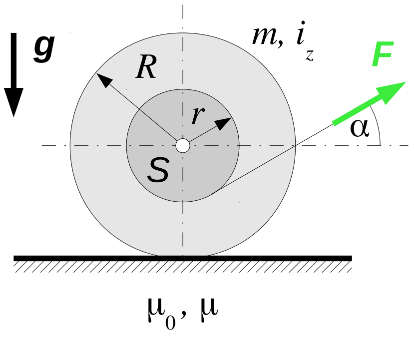
b) Welche Beziehungen gelten für die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_G? Welche drei Fälle können in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit ω_0 auftreten?

c) Welcher Fall tritt für die angegebenen Zahlenwerte ein? Welcher Wert ergibt sich für t_G?

Zahlenwerte: $r = 12{,}5$ mm, $m = 10$ g, $v_0 = 1$ m/s, $\omega_0 = 200$ s^{-1}, $\mu = 0{,}4$

(Ergebnis: a) $t_G = (v_0 + \omega_0 r)/(3\mu g)$; b) $\omega_0 > 2 v_0 / r$: Münze rollt zurück, $\omega_0 = 2 v_0 / r$: Münze bleibt stehen, $\omega_0 < 2 v_0 / r$: Münze rollt weiter; c) Münze rollt zurück, $t_G = 0{,}2973$ s)

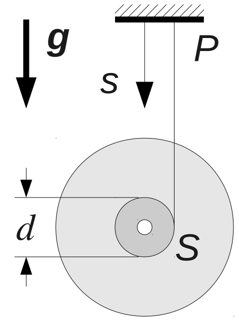
Aufgabe 3



An dem vom Jo-Jo (Masse m, Trägheitsradius i_z) abgewickelten Seil greift unter dem Winkel α die Kraft F an. Das Jo-Jo liegt auf einer rauen Oberfläche mit Haftungskoeffizient μ_0 und Reibungskoeffizient μ.

Ermitteln Sie die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ und die Schwerpunktsbeschleunigung a_S des Jo-Jo. Welche Fälle können auftreten?

Aufgabe 4



Das abgebildete Jo-Jo (Masse m, Trägheitsradius i_S) wird im Punkt P aus der Ruhe losgelassen.

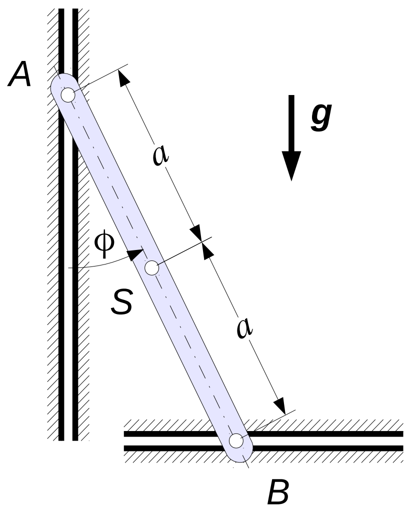
a) Wie groß ist die Beschleunigung a des Schwerpunkts, wenn angenommen wird, dass sich der Schwerpunkt geradlinig auf vertikaler Bahn bewegt?

b) Wie groß ist die Seilkraft S?

Zahlenwerte: $m = 10$ g, $d = 10$ mm, $i_S = 15$ mm

(Ergebnis: $a = 0{,}981\ \mathrm{m/s^2}$; $S = 0{,}08829$ N)

Aufgabe 5



Die Stange *AB* (Masse m, Trägheitsradius i_S) wird in den Punkten *A* und *B* reibungsfrei in vertikaler bzw. horizontaler Richtung geführt.

Ermitteln Sie

a) die Winkelgeschwindigkeit $\omega(\phi)=\dot{\phi}(\phi)$ der Stange in Abhängigkeit vom Winkel ϕ,

b) die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}(\phi)$ in Abhängigkeit vom Winkel ϕ,

c) die Führungskräfte $N_A(\phi)$ im Punkt *A* und $N_B(\phi)$ im Punkt *B* in Abhängigkeit vom Winkel ϕ,

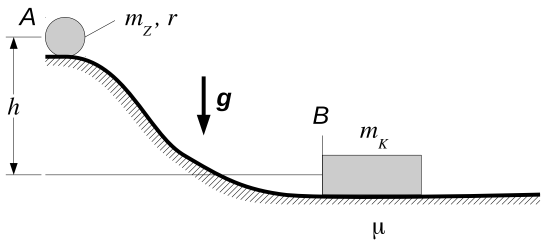
wenn die Stange mit dem Anfangswinkel ϕ_0 aus der Ruhe losgelassen wird.

Zahlenwert: $i_S/a=\sqrt{3}/3$

(Ergebnis:a) $\omega=\sqrt{1,5\,g\left(\cos(\phi_0)-\cos(\phi)\right)/a}$; b) $\dot{\omega}=0,75\,g\sin(\phi)/a$;
c) $N_A=3\,m\,g\sin(\phi)\left(3\cos(\phi)-2\cos(\phi_0)\right)/4$,
$N_B=m\,g\left(1+9\cos^2(\phi)-6\cos(\phi_0)\cos(\phi)\right)/4$)

Aufgabe 6

Ein homogener Zylinder (Masse m_Z , Radius r) wird im Punkt A aus der Ruhe losgelassen. Er rollt von Punkt A nach Punkt B und trifft dort auf einen Klotz (Masse m_K), der in Ruhe ist.



a) Mit welcher Geschwindigkeit v_Z trifft der Zylinder auf den Klotz?

b) Welche Geschwindigkeit v_K hat der Klotz unmittelbar nach dem Stoß, wenn es sich um einen geraden zentrischen Stoß mit der Stoßzahl k handelt?

c) Nach welcher Strecke s kommt der Klotz zur Ruhe, wenn er nach dem Stoß reibungsbehaftet (Reibungszahl μ) auf der waagerechten Ebene gleitet?

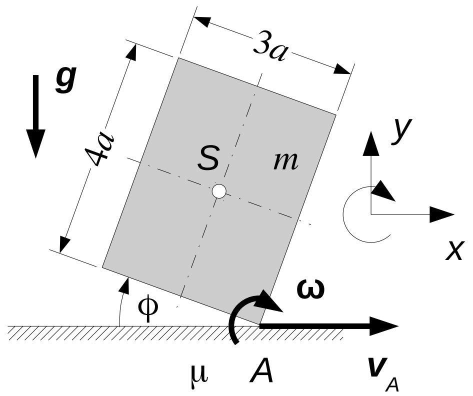
Gegeben: m_Z, $m_K = 5m_Z$, h, $k = 0,8$, μ

(HM, Prüfung SS 2016)

(Ergebnis: a) $v_Z=2\sqrt{g\,h/3}$; b) $v_K=\sqrt{3\,g\,h}/5$; c) $s=3\,h/(50\,\mu)$)

Aufgabe 7

Ein homogener Quader der Masse m gleitet reibungsbehaftet auf einer waagerechten Ebene und kippt dabei um die Kante A. Die momentane Geschwindigkeit der Kante A ist v_A.



a) Geben Sie das Massenträgheitsmoment J^S bezüglich des Schwerpunkts an.

b) Stellen Sie die vier kinetischen Gleichungen auf, die zur Beschreibung der Bewegung nötig sind.

c) Ermitteln Sie die Komponenten v_{Sx} und v_{Sy} der Geschwindigkeit des Schwerpunkts in Abhängigkeit von v_A, ϕ und ω.

d) Ermitteln Sie die Komponenten a_{Sx} und a_{Sy} der Beschleunigung des Schwerpunkts in Abhängigkeit von a_A, ϕ, ω und $\dot{\omega}$.

Gegeben: m, a, μ

(HM, Prüfung WS 2016)

(Ergebnis: a) $J^S=\frac{25}{12}m a^2$; c) $v_{Sx}=v_A+\frac{1}{2}\omega a\left(4\cos(\phi)+3\sin(\phi)\right)$,

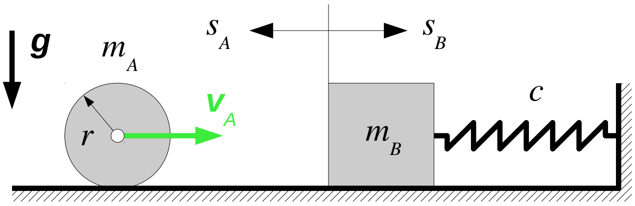
$v_{Sy}=\frac{1}{2}\omega a\left(3\cos(\phi)-4\sin(\phi)\right)$;

d) $a_{Sx}=a_A+\frac{1}{2}\dot{\omega}\left(4\cos(\phi)+3\sin(\phi)\right)+\frac{1}{2}\omega^2 a\left(3\cos(\phi)-4\sin(\phi)\right)$,

$a_{Sy}=\frac{1}{2}\dot{\omega}a\left(3\cos(\phi)-4\sin(\phi)\right)-\frac{1}{2}\omega^2 a\left(4\cos(\phi)+3\sin(\phi)\right)$)

Aufgabe 8

Eine homogene Kugel (Radius r, Masse m_A) rollt mit der konstanten Geschwindigkeit v_A und stößt dabei auf den ruhenden Klotz (Masse m_B). Der Klotz wird durch eine lineare Feder (Federkonstante c) gehalten, die zunächst entspannt ist.



Der Reibungskoeffizient zwischen Klotz und Boden und zwischen Kugel und Boden ist μ. Die Reibung zwischen Kugel und Klotz während des Stoßes darf vernachlässigt werden.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten w_A (Kugel) und w_B (Klotz) unmittelbar nach dem Stoß.

b) Bestimmen Sie den Weg s_B, den der Klotz nach dem Stoß zurücklegt, bis seine Geschwindigkeit null wird.

c) Bestimmen Sie die Ortskoordinate s_A (positiv nach links), bei der die Kugel nach dem Stoß vom Gleiten ins Rollen übergeht.

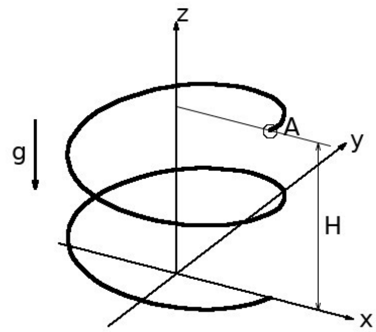
Gegeben: v_A, r, $m_A = m$, $m_B = 2m$, μ, c, Stoßzahl $k = 0{,}8$

(HM, Prüfung SS 2019)

(Ergebnis: a) $w_A = -0{,}2\, v_A$, $w_B = 0{,}6\, v_A$; b) $s_B=\sqrt{\left(\frac{2\mu m g}{c}\right)^2+\frac{18}{25}\frac{m}{c}v_A^2}-\frac{2\mu m g}{c}$;

c) $s_A=\frac{12}{1225}\frac{v_A^2}{\mu g}$)

Aufgabe 9



Eine homogene Kugel (Masse m, Radius r) rollt auf einer Bahn, die durch den Ortsvektor

$$\boldsymbol{r}(s)=\frac{1}{5}\left(4R\cos\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_x+4R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\boldsymbol{e}_y+(5H-3s)\boldsymbol{e}_z\right)$$

beschrieben wird. Dabei wird die Ortskoordinate s ab dem Punkt *A* gemessen, in dem die Kugel in Ruhe ist.

a) Bestimmen Sie die Bahngeschwindigkeit $v(s)$ und die Bahnbeschleunigung $a_t(s)$. Verwenden Sie dazu den Energieerhaltungssatz.

b) Bestimmen Sie das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz $v(t)$ und das Ort-Zeit-Gesetz $s(t)$, wenn die Kugel sich zum Zeitpunkt $t=0$ im Punkt *A* befindet.

c) Berechnen Sie den Einheitstangentenvektor $\boldsymbol{e}_t(s)$.

d) Berechnen Sie die Normalbeschleunigung $a_n(s)$.

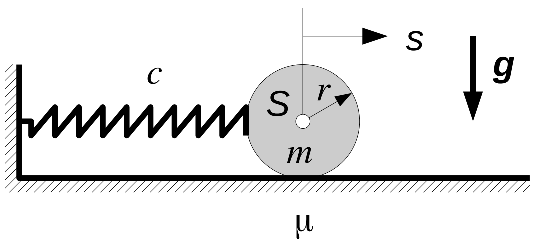
Gegeben: m, r, H, R

(HM, Prüfung WS 2019)

(Ergebnis: a) $v(s)=\sqrt{6gs/7}$, $a_t(s)=3g/7$; b) $v(t)=3gt/7$, $a(t)=3gt^2/14$;

c) $\boldsymbol{e}_t(s)=\left(-4\sin(s/R)\boldsymbol{e}_x+4\cos(s/R)\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z\right)/5$; d) $a_n(s)=24gs/(35R)$)

Aufgabe 10



Eine homogene Kugel (Masse m, Radius r) wird durch eine masselose lineare Feder (Federkonstante c) beschleunigt. In der Ausgangslage ist die Feder um die Strecke s_0 zusammengedrückt, und die Kugel ist in Ruhe. Der Weg s des Schwerpunkts der Kugel wird ab der Ausgangslage gemessen. Der Reibungskoeffizient zwischen Kugel und Boden ist μ.

a) Schneiden Sie die Kugel frei und bestimmen Sie die Beschleunigung $a(s)$ des Schwerpunkts sowie die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ für die Phase, während der die Kugel gleitet und die Feder noch nicht entspannt ist.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(s)$ des Schwerpunkts der Kugel.

Gegeben: m, r, c, μ

(HM, Prüfung SS 2021)

(Ergebnis: a) $a(s)=\frac{c}{m}(s_0-s)-\mu g$, $\dot{\omega}=\frac{5}{2}\mu\frac{g}{r}$ ↺;

b) $v(s)=\sqrt{\frac{c}{m}(2 s_0 s-s^2)-2\mu g s}$)