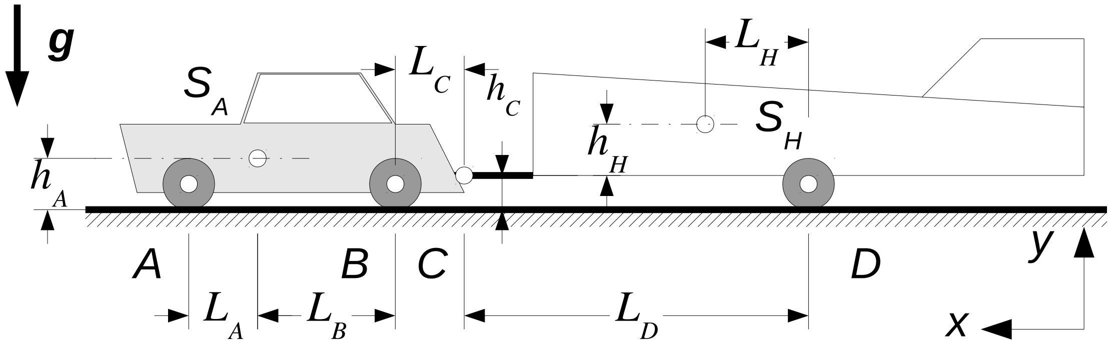
4.3 Systeme von starren Körpern

Aufgaben

Aufgabe 1



Ein PKW der Masse m_A mit Vorderradantrieb zieht einen Segelflugzeuganhänger der Masse m_H. Der Anhänger ist in der Kupplung *C* gelenkig an den PKW angeschlossen.

Bestimmen Sie die Kräfte auf die Räder sowie in der Kupplung *C*,

a) wenn das Gespann mit konstanter Geschwindigkeit fährt,

b) wenn das Gespann mit der Beschleunigung a_1 beschleunigt,

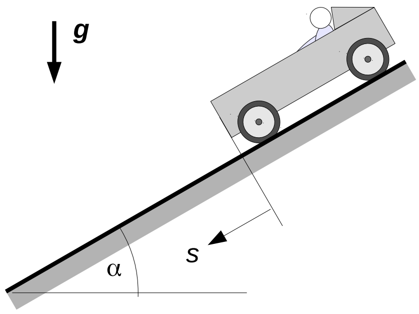
c) wenn das Gespann mit der Verzögerung a_2 abbremst und der Anhänger ungebremst ist. Beim Bremsen darf angenommen werden, dass nur die Vorderräder gebremst sind.

Zahlenwerte: $m_A = 2000$ kg, $m_H = 500$ kg, $L_A = 0{,}6$ m, $L_B = 1{,}2$ m, $L_C = 0{,}7$ m, $L_D = 4$ m, $L_H = 1$ m, $h_A = 0{,}5$ m, $h_C = 0{,}3$ m, $h_H = 1$ m, $a_1 = 0{,}5$ m/s², $a_2 = 1$ m/s²

(Ergebnis: Kräfte auf Vorderräder des PKW zusammen: a) $12{,}60 kN \uparrow$; b) $1{,}25$ kN $\leftarrow$, $12{,}31$ kN $\uparrow$; c) $2{,}5$ kN $\rightarrow$, $13{,}19$ kN $\uparrow$; Kräfte auf Hinterräder des PKW zusammen: a) $8{,}243$ kN $\uparrow$; b) $8{,}476$ kN $\uparrow$; c) $7{,}778$ kN $\uparrow$; Kräfte auf Räder des Anhängers zusammen: a) $3{,}679$ kN $\uparrow$; b) $3{,}741$ kN $\uparrow$; c) $3{,}554$ kN $\uparrow$; Kräfte auf PKW in der Kupplung: a) $1{,}226$ kN $\downarrow$; b) $0{,}250$ kN $\rightarrow$, $1{,}164$ kN $\downarrow$; c) $0{,}5$ kN $\leftarrow$, $1{,}351$ kN $\downarrow$)

Aufgabe 2

Die abgebildete Seifenkiste hat zusammen mit dem Fahrer, aber ohne die vier Räder, das Gewicht G_S. Die Räder haben jeweils das Gewicht G_R, den Radius r und den Trägheitsradius i_R bezüglich ihres Mittelpunktes.



a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion des zurückgelegten Weges, wenn die Räder ohne Gleiten rollen und der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Der zurückgelegte Weg wird ab dem Start aus dem Stand gemessen.

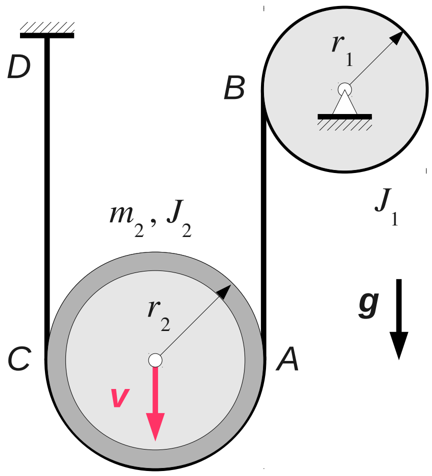
b) Welche Geschwindigkeit v_1 hat die Seifenkiste an der Stelle s_1?

c) Wie groß ist die Beschleunigung a?

Zahlenwerte: $G_S = 550$ N, $G_R = 25$ N, $i_R = 0{,}09$ m, $r = 0{,}15$ m, $\alpha = 30°$, $s_1 = 30$ m

(Ergebnis: $v_1 = 16{,}70$ m/s; $a = 0{,}4738$ g)

Aufgabe 3



Das abgebildete System besteht aus der reibungsfrei gelenkig gelagerten Rolle 1 mit Radius r_1 und Massenträgheitsmoment J_1 sowie der Rolle 2 mit Radius r_2, Masse m_2 und Massenträgheitsmoment J_2. Über die Rolle 2 läuft eine masseloses dehnstarres Seil, das von der Rolle 1 abgespult wird und im Punkt *D* befestigt ist. Das Seil haftet auf der Rolle 2.

a) Wie hängen die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der beiden Rollen von der Geschwindigkeit v ab, mit der sich die Rolle 2 nach unten bewegt?

b) Welche Beziehung gilt für die Geschwindigkeit v der Rolle 2 in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg s, wenn das System aus der Ruhe losgelassen wird?

c) Welche Beziehung gilt für die Beschleunigung a der Rolle 2?

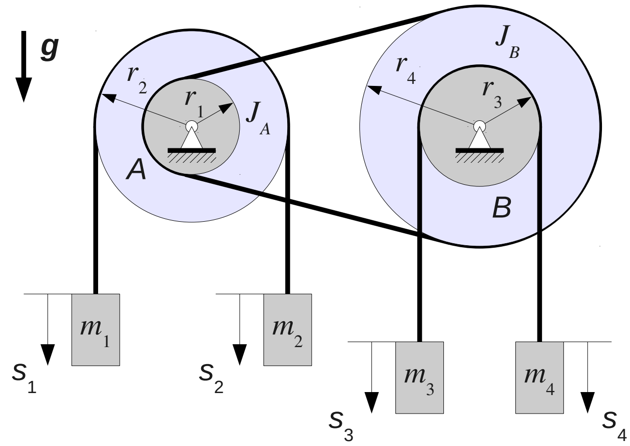
d) Welche Beziehungen gelten für die Kräfte S_{AB} und S_{CD} in den Seilabschnitten *AB* und *CD*?

(Ergebnis: $\omega_1 = 2v/r_1$, $\omega_2 = v/r_2$; $v(s) = \sqrt{\dfrac{2 m_2 g s}{m_2 + 4 J_1/r_1^2 + J_2/r_2^2}}$;

$$a=\frac{m_2}{m_2+4J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}g\ ;\quad S_{AB}=m_2 g\frac{2J_1/r_1^2}{m_2+4J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}\ ,$$
$$S_{CD}=m_2 g\frac{2J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}{m_2+4J_1/r_1^2+J_2/r_2^2}\ )$$

Aufgabe 4

Die beiden Rollen *A* und *B* sind reibungsfrei gelenkig gelagert und durch einen dehnstarren Riemen verbunden, der auf den Rollen haftet. Die Rollen haben die Massenträgheitsmomente J_A bzw. J_B bezüglich ihrer Lager.



Über den äußeren Umfang der Rolle *A* verläuft ein dehnstarres Seil, an dem die beiden Massen m_1 und m_2 befestigt sind.

Über den inneren Umfang der Rolle *B* verläuft ein dehnstarres Seil, an dem die Massen m_3 und m_4 befestigt sind.

Die Seile und der Riemen sind masselos.

a) Geben Sie die Geschwindigkeiten v_2, v_3 und v_4 der Massen 2 bis 4 sowie die Winkelgeschwindigkeiten ω_A und ω_B der Rollen *A* und *B* in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v_1 der Masse 1 an.

b) Ermitteln Sie die Beschleunigungen a_1, a_2, a_3 und a_4 der Massen sowie die Winkelbeschleunigungen $\dot{\omega}_A$ und $\dot{\omega}_B$ der Rollen.

c) Ermitteln Sie die Seilkräfte S_1 bis S_4 in den Seilen, an denen die Massen hängen.

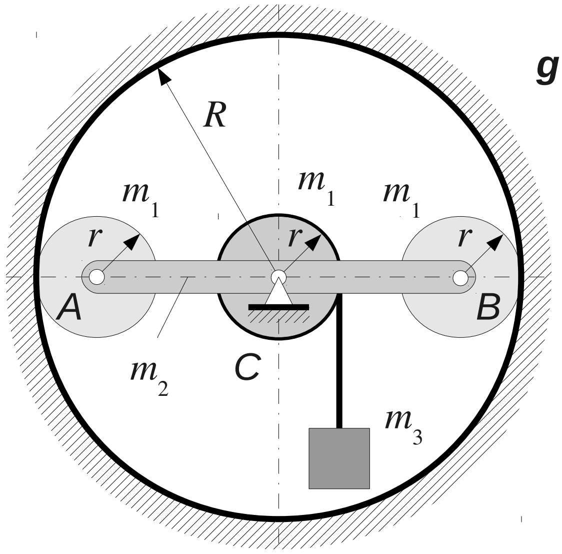
Zahlenwerte: r_1 = 10 cm, r_2 = 20 cm, r_3 = 15 cm, r_4 = 30 cm, m_1 = 60 kg, m_2 = 24 kg, m_3 = 36 kg, m_4 = 60 kg, J_A = 16000 kgcm², J_B = 72000 kgcm²

(Ergebnis: $v_2 = -v_1$, $v_3 = v_1/4$, $v_4 = -v_3$, $\omega_A = 5v_1/m$, $\omega_B = (5/3)v_1/m$; $a_1 = 0{,}2g$, $a_2 = -0{,}2g$, $a_3 = 0{,}05g$, $a_4 = -0{,}05g$, $\dot{\omega}_A=9{,}81\,\mathrm{s}^{-2}$, $\dot{\omega}_B=3{,}27\,\mathrm{s}^{-2}$; S_1 = 470,9 N, S_2 = 282,5 N, S_3 = 335,5 N, S_4 = 618,0 N)

Aufgabe 5

Die beiden homogenen Scheiben *A* und *B* (Masse m_1, Radius r) rollen auf der Innenseite des feststehenden Hohlrads (Radius R) ab. Sie sind durch die homogene dünne Stange *AB* (Masse m_2) miteinander verbunden, an der sie reibungsfrei gelenkig befestigt sind.

Die Stange *AB* ist fest mit der homogenen Scheibe *C* (Masse m_1, Radius r) verbunden, die im Punkt *C* reibungsfrei gelenkig gelagert ist.



Auf der Rolle *C* ist ein masseloses dehnstarres Seil aufgewickelt, an dem die Masse m_3 hängt.

a) Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten v_A und v_B der Punkte *A* und *B* sowie die Winkelgeschwindigkeiten ω_A und ω_B der Scheiben *A* und *B* sowie ω_C der Scheibe *C* und der Stange *AB* in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v_3 der Masse m_3.

b) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_3 der Masse m_3 in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg s_3 für den Fall, dass das System am Anfang in Ruhe ist.

c) Ermitteln Sie die Beschleunigung a_3 der Masse m_3.

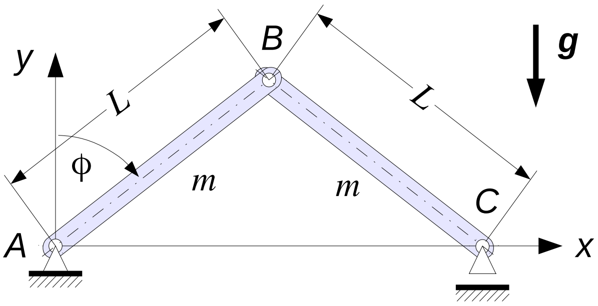
(Ergebnis: a) $v_A = v_B = (R/r - 1)v_3$, $\omega_A = \omega_B = (R/r - 1)v_3/r$, $\omega_C = v_3/r$;

b) $v_3 = \sqrt{\dfrac{2\,m_3\,g\,s_3}{(3\,m_1 + m_2/3)(R/r - 1)^2 + m_1/2 + m_3}}$;

c) $a_3 = \dfrac{m_3\,g}{(3\,m_1 + m_2/3)(R/r - 1)^2 + m_1/2 + m_3}$)

Aufgabe 6

Die beiden homogenen dünnen Stäbe *AB* und *BC* (Länge L, Masse m) sind im Punkt *B* gelenkig miteinander verbunden. Stab *AB* wird im Punkt *A* durch ein Festlager und Stab *BC* im Punkt *C* durch ein Loslager gehalten.



a) Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}$ in Abhängigkeit von ϕ und $\dot{\phi}$. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung für $\phi = 90°$?

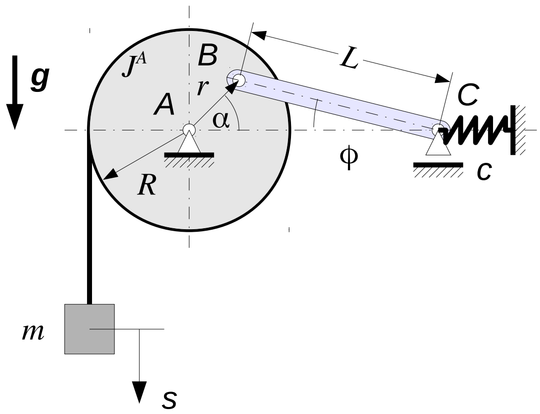
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Momentanpols des Stabs *BC* in Abhängigkeit vom Winkel ϕ (Rastpolbahn).

(Ergebnis: a) $\ddot{\phi} = \frac{3}{2} \frac{\sin(2\phi)\dot{\phi}^2 + (g/L)\sin(\phi)}{1+3\cos^2(\phi)}$, $\ddot{\phi}(90°) = \frac{3}{2}\frac{g}{L}$;

b) $x_\Pi = 2L\sin(\phi)$, $y_\Pi = 2L\cos(\phi)$)

Aufgabe 7

Die Rolle *A* (Massenträgheitsmoment J^A) ist im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert. Im Punkt *B* ist der masselose Stab *BC* gelenkig angeschlossen, der im Punkt *C* durch ein Loslager und eine lineare Feder mit der Federkonstanten c gehalten wird. In der Ruhelage ist die Feder entspannt.



Auf der Rolle ist ein masseloses dehnstarres Seil aufgewickelt, an dem die Masse m befestigt ist.

a) Ermitteln Sie unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen die Geschwindigkeit $v = \dot{s}$ der Masse m in Abhängigkeit vom Weg s, wenn das System aus der Ruhelage losgelassen wird.

b) Bestimmen Sie die kleinste Auslenkung s_{min} und die größte Auslenkung s_{max}.

(Ergebnis: a) $v(s) = \dot{s} = \sqrt{\dfrac{2mgs - c\dfrac{r^2}{R^2}\dfrac{\sin^2(\alpha+\phi)}{\cos^2(\phi)}s^2}{m + J^A/R^2}}$; b) $s_{min} = 0$,

$s_{max} = 2\frac{mg}{c}\frac{R^2}{r^2}\frac{\cos^2(\phi)}{\sin^2(\alpha+\phi)}$)

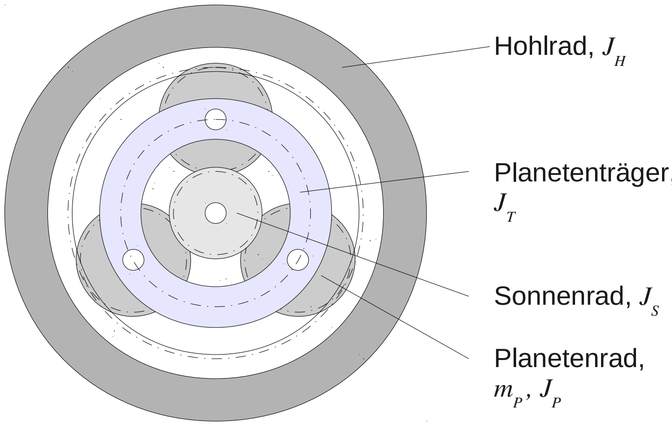
Aufgabe 8

Das abgebildete Planetengetriebe besteht aus dem Hohlrad mit Innenradius r_H, dem Sonnenrad mit Radius r_S, drei Planetenrädern mit Radius r_P sowie dem Planetenträger. Die Mittelpunkte der Planetenräder liegen auf einem Kreis mit Radius r_T.

Am Hohlrad greift das Moment M_H, am Planetenträger das Moment M_T und am Sonnenrad das Moment M_S an.

Winkelgeschwindigkeiten und Momente sind positiv im Gegenuhrzeigersinn.

Die Massenträgheitsmomente von Hohlrad, Planetenrad, Planententräger und Sonnenrad werden mit J_H, J_P, J_T und J_S bezeichnet. Das Planetenrad hat die Masse m_P.



Wie groß ist die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}_H$ des Hohlrads?

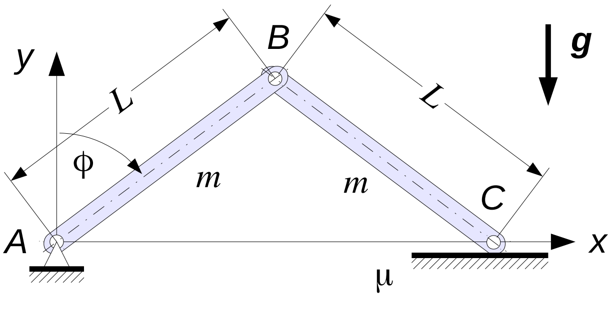
Hinweis: Der Arbeitssatz führt hier nicht zum Ziel. Das Auflösen der mit Schwerpunktsatz und Drallsatz gewonnenen Gleichungen nach der gesuchten Winkelbeschleunigung erfordert etwas Ausdauer.

(Ergebnis:

$$\dot{\omega}_H=\frac{1}{r_H}\frac{\left(3\frac{J_P}{r_P^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{M_S}{r_S}+\frac{M_T}{r_T}+\frac{M_H}{r_H}\right)+\left(3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}+2\frac{J_S}{r_S^2}\right)\left(\frac{M_H}{r_H}-\frac{M_S}{r_S}\right)}{3\frac{J_P}{r_P^2}\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}\right)+4\frac{J_H}{r_H^2}\frac{J_S}{r_S^2}+\left(3m_P+\frac{J_T}{r_T^2}\right)\left(\frac{J_H}{r_H^2}+\frac{J_S}{r_S^2}+3\frac{J_P}{r_P^2}\right)}$$)

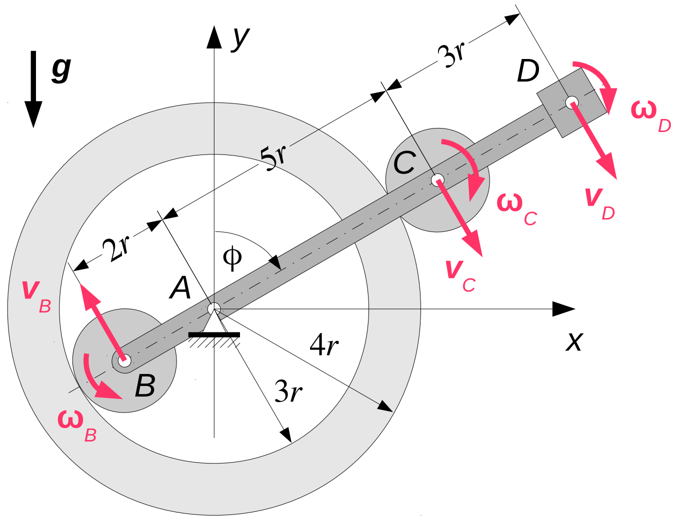
Aufgabe 9

Die beiden homogenen dünnen Stäbe *AB* und *BC* (Länge L, Masse m) sind im Punkt *B* gelenkig miteinander verbunden. Stab *AB* wird im Punkt *A* durch ein Festlager gehalten. Der Stab *BC* gleitet im Punkt *C* reibungsbehaftet in horizontaler Richtung (Reibungskoeffizient μ).



Stellen Sie alle Gleichungen auf, die zur Ermittlung der Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}(\phi,\dot{\phi})$ benötigt werden.

Aufgabe 10



Die beiden Rollen *B* und *C* sind reibungsfrei gelenkig an eine masselose Stange angeschlossen, die fest mit dem starren Körper *D* verbunden ist. Die Rolle *B* rollt auf der Innenseite und die Rolle *C* auf der Außenseite eines feststehenden Rings ab. Die Stange ist im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert.

Die beiden Rollen haben jeweils die Masse m und das Massenträgheitsmoment $J = m r^2/2$ bezüglich der Punkte *B* bzw. *C*. Der starre Körper hat die Masse $2m$ und das Massenträgheitsmoment $J_D = 2 m r^2$ bezüglich seinem Schwerpunkt, der sich im Punkt *D* befindet.

a) Geben Sie die Lageenergie und die kinetische Energie für die Körper *B*, *C* und *D* in einer beliebigen Lage an. Verwenden Sie dazu die Koordinaten y_B, y_C und y_D, die Geschwindigkeiten v_B, v_C und v_D sowie die Winkelgeschwindigkeiten ω_B, ω_C und ω_D. Wählen Sie das Nullniveau für die Lageenergie bei $y = 0$.

b) Geben Sie die Koordinaten y_B, y_C und y_D in Abhängigkeit vom Winkel ϕ sowie die Geschwindigkeiten v_B, v_C und v_D und die Winkelgeschwindigkeiten ω_B, ω_C und ω_D in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\phi}$ an.

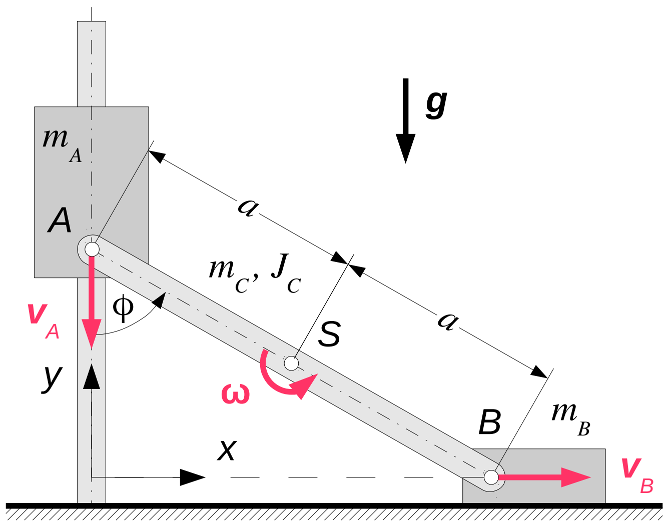
c) Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeit $\omega(\phi)$ für $\omega(\phi_0) = 0$ mit $\phi_0 = 60°$.

(HM, Prüfung SS 2014)

(Ergebnis: a) $E_B^G = m g y_B$, $E_C^G = m g y_C$, $E_D^G = 2 m g y_D$, $E_B^K = \frac{1}{2} m \left(v_B^2 + \frac{1}{2} r^2 \omega_B^2 \right)$, $E_C^K = \frac{1}{2} m \left(v_C^2 + \frac{1}{2} r^2 \omega_C^2 \right)$, $E_D^K = m \left(v_D^2 + r^2 \omega_D^2 \right)$; b) $y_B(\phi) = -2 r \cos(\phi)$, $y_C(\phi) = 5 r \cos(\phi)$, $y_D(\phi) = 8 r \cos(\phi)$, $v_B = 2 r \omega$, $v_C = 5 r \omega$, $v_D = 8 r \omega$, $\omega_B = 2 \omega$, $\omega_C = 5 \omega$, $\omega_D = \omega$; c) $\omega(\phi) = \sqrt{\frac{g}{r}} \sqrt{\frac{38 - 76 \cos(\phi)}{347}}$)

Aufgabe 11

Der Körper *A* (Masse m_A) gleitet reibungsfrei auf einer senkrechten Stange. Der Körper *B* (Masse m_B) gleitet reibungsbehaftet (Reibungskoeffizient μ) auf dem waagerechten Boden.



Die Stange *C* (Masse m_C, Massenträgheitsmoment J_C bezüglich Schwerpunkt *S*) ist in den Gelenken *A* und *B* reibungsfrei gelenkig an die Körper *A* bzw. *B* angeschlossen.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten x_Π und y_Π des Momentanpols der Stange *C* im angegebenen Koordinatensystem, und geben Sie die Geschwindigkeiten v_B, v_{Sx}, v_{Sy} und die Winkelgeschwindigkeit ω in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v_A an.

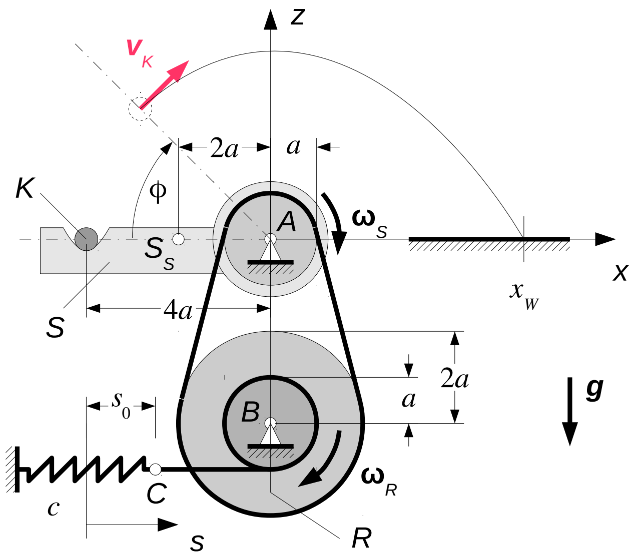
b) Schneiden Sie die Körper *A* und *B* und die Stange *C* frei und tragen Sie alle angreifenden Kräfte ein.

c) Stellen Sie alle Gleichungen auf, die zusätzlich zu den kinematischen Beziehungen aus a) noch benötigt werden, um die Beschleunigung $a_A = \dot{v}_A$ zu ermitteln. Die Gleichungen müssen nicht aufgelöst werden.

(HM, Prüfung SS 2014)

Aufgabe 12

Die Kugel *K* (Masse m_K) liegt auf der Schleuder *S* (Masse m_S, Massenträgheitsmoment J_S^A bezüglich Punkt *A*), die im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert ist. Die Schleuder ist über einen dehnstarren Riemen mit der im Punkt *B* reibungsfrei gelenkig gelagerten Rolle *R* (Massenträgheitsmoment J_R^B bezüglich Punkt *B*) verbunden. Der Riemen haftet auf beiden Rollen. Auf der Rolle *R* ist ein dehn-



starres Seil aufgespult, das im Punkt *C* mit einer Feder (Federkonstante c) verbunden ist. In der dargestellten Ruhelage hat die Feder die Auslenkung s_0.

a) Welcher kinematische Zusammenhang besteht zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω_R der Rolle und der Winkelgeschwindigkeit ω_S der Schleuder sowie zwischen dem Federweg s und dem Winkel ϕ?

b) Welche Geschwindigkeit v_K hat die Kugel, wenn die Schleuder bei dem Winkel $\phi = 45°$ gestoppt wird? Die Kugel darf als Massenpunkt betrachtet werden.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Koordinate x_W, bei der die Kugel auf dem Boden aufkommt ($z = 0$), und der Abwurfgeschwindigkeit v_K? (Das Ergebnis aus b) muss nicht eingesetzt werden.)

Hinweis: Verwenden Sie für Teilaufgabe b) den Energieerhaltungssatz.

Gegeben: $a,\ m_K,\ m_S,\ J_S^A,\ J_R^B,\ c,\ s_0 = a\pi/8$

(HM, Prüfung WS 2014)

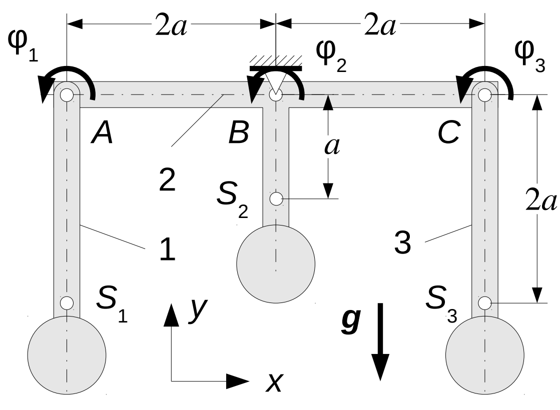
(Ergebnis: a) $\omega_R = \omega_S/2,\ s = s_0 - a\phi/2$;

b) $v_K = 4a\sqrt{\dfrac{c\,a^2\pi^2/64 - 2\sqrt{2}\,(2m_K + m_S)\,a\,g}{16\,m_K a^2 + J_S^A + J_R^B/4}}$;

c) $x_W = \dfrac{v_K^2}{2g}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{8\sqrt{2}\,a\,g}{v_K^2}}\right) - 2\sqrt{2}\,a$)

Aufgabe 13

Das abgebildete Dreifachpendel besteht aus den Trägern 1, 2 und 3. Der Träger 2 ist im Punkt *B* gelenkig gelagert. In den Punkten *A* bzw. *C* sind die Träger 1 bzw. 3 gelenkig angeschlossen. Die Lage der Träger wird durch die gegenüber der dargestellten Lage positiv im Gegenuhrzeigersinn gemessenen Winkel ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 beschrieben.



a) Bestimmen Sie die Komponenten a_{1x}, a_{1y} und a_{3x}, a_{3y} der Beschleunigungen der Schwerpunkte S_1 und S_3 der Träger 1 und 3 in Abhängigkeit von den Winkeln.

b) Stellen Sie alle kinetischen Gleichungen auf, die nötig sind, um die Bewegung des Systems zu berechnen.

c) Ermitteln Sie die gekoppelten Differentialgleichungen für die drei Winkel (anspruchsvoll!).

Gegeben: $m_1 = m_3 = m$, $m_2 = 2m$, $J^S_1 = J^S_3 = mi_1^2$, $J^B_2 = 2mi_2^2$

(Ergebnis: a) $a_{1x} = 2a\left(\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 + \sin(\phi_2)\ddot{\phi}_2 - \sin(\phi_1)\dot{\phi}_1^2 + \cos(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right)$,

$a_{1y} = 2a\left(\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 - \cos(\phi_2)\ddot{\phi}_2 + \cos(\phi_1)\dot{\phi}_1^2 + \sin(\phi_1)\ddot{\phi}_1\right)$,

$a_{3x} = -2a\left(\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 + \sin(\phi_2)\ddot{\phi}_2 + \sin(\phi_3)\dot{\phi}_3^2 - \cos(\phi_3)\ddot{\phi}_3\right)$,

$a_{3y} = -2a\left(\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 - \cos(\phi_2)\ddot{\phi}_2 - \cos(\phi_3)\dot{\phi}_3^2 - \sin(\phi_3)\ddot{\phi}_3\right)$;

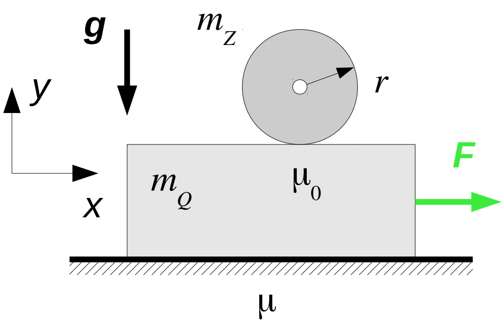
c)
$$\begin{bmatrix} 4+i_1^2/a^2 & 4\sin(\phi_2-\phi_1) & 0 \\ 4\sin(\phi_2-\phi_1) & 8+2i_2^2/a^2 & 4\sin(\phi_3-\phi_2) \\ 0 & 4\sin(\phi_3-\phi_2) & 4+i_1^2/a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{bmatrix}$$
$$= 4 \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\phi_1-\phi_2) & 0 \\ \cos(\phi_1-\phi_2) & 0 & -\cos(\phi_2-\phi_3) \\ 0 & \cos(\phi_2-\phi_3) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1^2 \\ \dot{\phi}_2^2 \\ \dot{\phi}_3^2 \end{bmatrix} - 2\frac{g}{a} \begin{bmatrix} \sin(\phi_1) \\ \sin(\phi_2) \\ \sin(\phi_3) \end{bmatrix}$$
)

Aufgabe 14

Ein homogener Zylinder (Masse m_Z, Radius r) liegt auf einem Quader (Masse m_Q). Am Quader greift die Kraft F an.

Der Reibungskoeffizient zwischen Boden und Quader ist μ, der Haftungskoeffizient zwischen Quader und Zylinder ist μ_0.

Es darf angenommen werden, dass zwischen Zylinder und Quader kein Gleiten auftritt.



a) Schneiden Sie die beiden Körper frei und stellen Sie alle kinetischen Gleichungen auf.

b) Geben Sie die kinematische Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v_Q des Quaders, der Geschwindigkeit v_Z des Schwerpunkts des Zylinders und der Winkelgeschwindigkeit ω des Zylinders an. Wählen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders positiv im Gegenuhrzeigersinn.

c) Bestimmen Sie die Beschleunigung a_Z des Zylinders in Abhängigkeit von der Beschleunigung a_Q des Quaders.

d) Bestimmen Sie die Beschleunigung a_Q des Quaders.

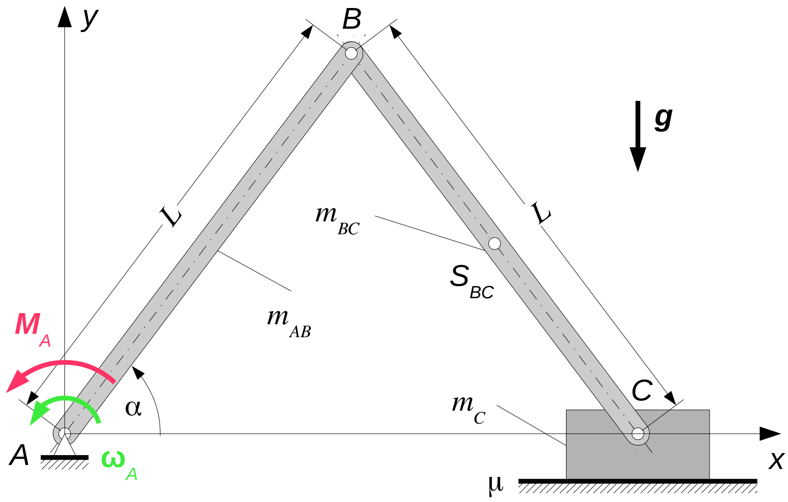
Gegeben: m_Z, r, m_Q, F, μ, μ_0

(HM, Prüfung SS 2015)

(Ergebnis: b) $v_Z + \omega r = v_Q$; c) $a_Z = a_Q/3$; d) $a_Q = \dfrac{F - \mu(m_Q + m_Z) g}{m_Q + m_Z/3}$)

Aufgabe 15

Die beiden dünnen homogenen Stäbe *AB* und *BC* sind im Punkt *B* reibungsfrei gelenkig verbunden. Der Stab *AB* wird im Punkt *A* durch ein Festlager gehalten. Dort greift das Moment $M_A(t)$ an, das dafür sorgt, dass sich der Stab *AB* mit der <u>konstanten</u> Winkelgeschwindigkeit ω_A um Punkt *A* dreht.



Der Stab *BC* ist im Punkt *C* reibungsfrei gelenkig mit dem Klotz *C* verbunden, der reibungsbehaftet (Reibungskoeffizient μ) auf dem Boden gleitet.

a) Bestimmen Sie zeichnerisch die Lage des Momentanpols des Stabs *BC.* Lesen Sie daraus eine Beziehung für seine Winkelgeschwindigkeit ω_{BC} ab (positiv im Gegenuhrzeigersinn).

b) Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der Koordinaten $x_S(t)$ und $y_S(t)$ des Schwerpunkts S_{BC} des Stabs *BC* sowie der Koordinate $x_C(t)$ von Punkt *C*. Leiten Sie daraus Beziehungen für die Beschleunigungen $a_{Sx}(t)$, $a_{Sy}(t)$ sowie $a_{Cx}(t)$ ab.

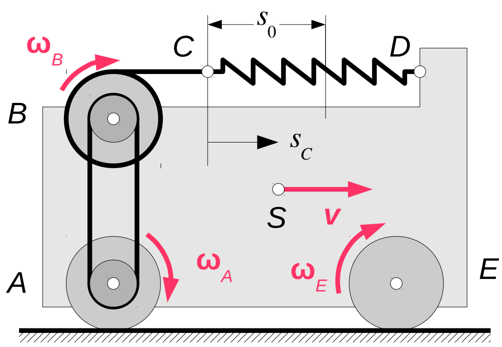
c) Stellen Sie alle kinetischen Gleichungen auf, die zur Bestimmung des Antriebsmoments $M_A(t)$ benötigt werden. Die Gleichungen müssen nicht aufgelöst werden.

Gegeben: L, $m_{AB} = m_{BC} = m$, m_C, ω_A, $\alpha(t) = \omega_A t$, μ

(HM, Prüfung WS 2015)

Aufgabe 16

Das abgebildete Spielzeugfahrzeug besteht aus einem Klotz der Masse m, an den in den Punkten A, B und E die Rollen A, B und E reibungsfrei gelenkig angeschlossen sind. Die Rollen A und B sind durch einen Riemen verbunden, der auf den Rollen haftet. Von der Rolle B wird ein Seil abgespult, das im Punkt C mit einer Feder mit der Federsteifigkeit c verbunden ist, die im Punkt D am Klotz befestigt ist. Die Rollen A und E rollen auf dem Untergrund.



Die Rollen A und B haben jeweils die Masse m_1, den Außenradius R, den Innenradius r und den Trägheitsradius i_1. Die Rolle E hat die Masse m_2, den Außenradius R und den Trägheitsradius i_2.

In der dargestellten Ruhelage hat die Feder die Auslenkung s_0 aus der entspannten Lage.

a) Geben Sie die Gesamtenergie für die Ruhelage und eine beliebige spätere Lage an.

b) Geben Sie die kinematischen Beziehungen zwischen den Winkelgeschwindigkeiten ω_A, ω_B und ω_E und der Geschwindigkeit $v_C = \dot{s}_C$ sowie zwischen der Geschwindigkeit v des Schwerpunkts und der Geschwindigkeit v_C an.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von s_C.

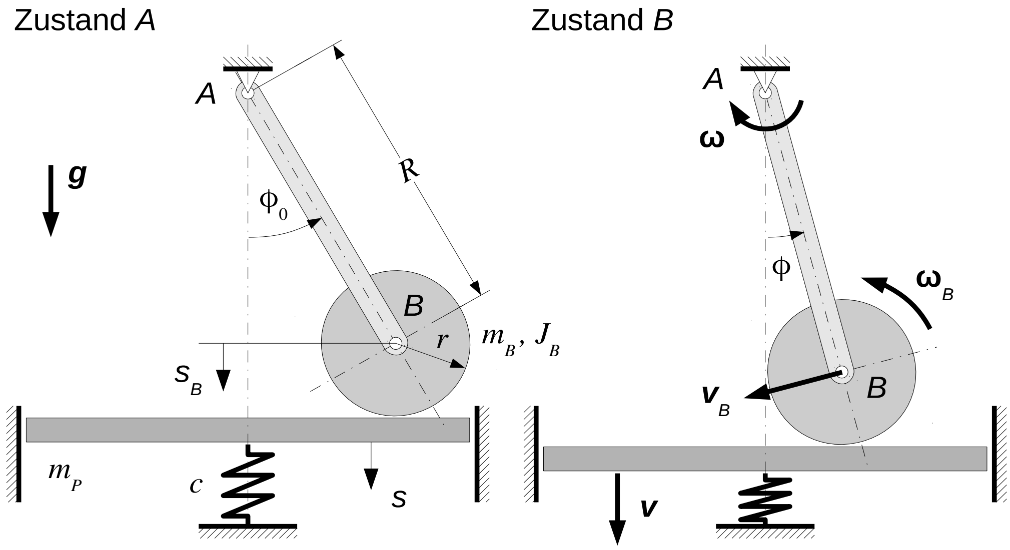
Gegeben: c, s_0, m, m_1, m_2, r, R, i_1, i_2

(HM, Prüfung SS 2017)

(Ergebnis: a) $2E_1 = m v^2 + m_1\left(v^2 + i_1^2\omega_A^2\right) + m_1\left(v^2 + i_1^2\omega_B^2\right) + m_2\left(v^2 + i_2^2\omega_E^2\right) + c\left(s_0 - s_C\right)^2$, $2E_0 = c s_0^2$; b) $\omega_A = \omega_B = \omega_C = v_C / R$, $v = v_C$;

c) $v = \sqrt{\dfrac{c\left(2 s_0 s_C - s_C^2\right)}{m + 2m_1\left(1 + i_1^2/R^2\right) + m_2\left(1 + i_2^2/R^2\right)}}$)

Aufgabe 17



Die starre <u>masselose</u> Stange *AB* ist im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert. Im Punkt *B* ist eine Rolle (Masse m_B, Massenträgheitsmoment J_B bezüglich Punkt *B*) reibungsfrei gelenkig angeschlossen, die auf einer starren Platte (Masse m_P) rollt. Die Platte wird reibungsfrei so geführt, dass sie sich nur in vertikaler Richtung bewegen kann. An der Platte ist eine lineare Feder (Federkonstante c) angeschlossen.

Im Zustand *A* ist die Feder entspannt, und das System ist in Ruhe. Zustand *B* ist eine beliebige ausgelenkte Lage mit $\phi < \phi_0$. Die Vertikalverschiebung s der Platte und die Vertikalverschiebung s_B der Rolle werden ab der Position in Zustand *A* gemessen.

a) Stellen Sie für beide Zustände sämtliche Energien tabellarisch zusammen. Verwenden Sie dabei die in der Zeichnung angegebenen Bezeichnungen und legen Sie die Nullniveaus in die Positionen von Zustand *A*.

b) Geben Sie die Verschiebungen s und s_B in Abhängigkeit vom Winkel ϕ an. Geben Sie die Geschwindigkeiten v_B und $v=\dot{s}$ und die Winkelgeschwindigkeit ω_B in Abhängigkeit vom Winkel ϕ und von der Winkelgeschwindigkeit $\omega=-\dot{\phi}$ an.

c) Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeit ω in Abhängigkeit vom Winkel ϕ.

d) Ermitteln Sie die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ in Abhängigkeit vom Winkel ϕ.

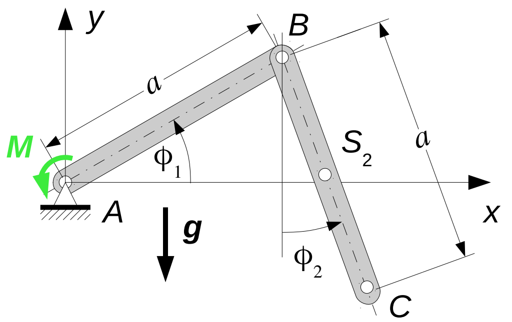
Gegeben: r, R, c, m, $m_B = 2m$, $J_B = mr^2$, $m_P = m$

(HM, Prüfung WS 2017)

(Ergebnis: b) $s = s_B = R\left(\cos(\phi) - \cos(\phi_0)\right)$, $v_B = \omega R$, $v = \omega R \sin(\phi)$,
$\omega_B = \frac{R}{r}\omega\cos(\phi)$; c) $\omega = \pm\sqrt{2\frac{g}{R}\left(\cos(\phi)-\cos(\phi_0)\right) - \frac{c}{3m}\left(\cos(\phi)-\cos(\phi_0)\right)^2}$;
d) $\dot{\omega} = \frac{g}{R}\sin(\phi) - \frac{c}{3m}\left(\cos(\phi)-\cos(\phi_0)\right)\sin(\phi)$)

Aufgabe 18

Das abgebildete System besteht aus den beiden dünnen homogenen Stäben *AB* und *BC*, die im Punkt *B* reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. Beide Stäbe haben die gleiche Masse m und die gleiche Länge a. Der Stab *AB* ist im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert. Im Punkt *A* greift das äußere Moment M an.



a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_1^A von Stab *AB* bezüglich Punkt *A* und das Massenträgheitsmoment J_2^S von Stab *BC* bezüglich des Schwerpunkts S_2.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten x_2 und y_2 sowie die Komponenten des Geschwindigkeits- und des Beschleunigungsvektors des Schwerpunkts S_2 in Abhängigkeit von den Winkeln ϕ_1 und ϕ_2 und ihrer zeitlichen Ableitungen.

c) Schneiden Sie beide Stäbe frei und stellen Sie die vier kinetischen Gleichungen auf, die zur Ermittlung von $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ benötigt werden. Die Ergebnisse aus den Teilaufgaben a) und b) müssen <u>nicht</u> eingesetzt werden.

Gegeben: a, m, M

(HM, Prüfung SS 2018)

(Ergebnis: a) $J_1^A = \frac{1}{3}ma^2$, $J_2^S = \frac{1}{12}ma^2$;

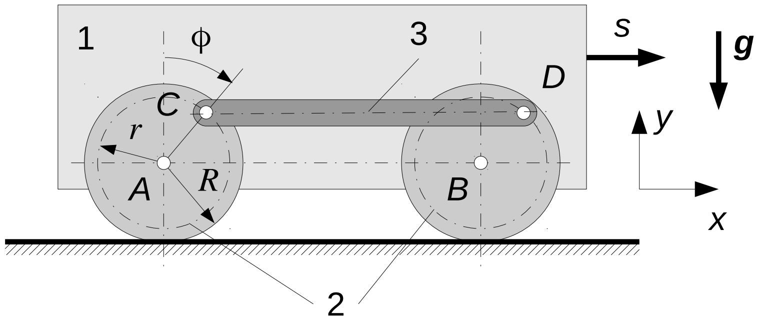
b) $x_2 = a\left(\cos(\phi_1) + \frac{1}{2}\sin(\phi_2)\right)$, $y_2 = a\left(\sin(\phi_1) - \frac{1}{2}\cos(\phi_2)\right)$;

$\dot{x}_2 = a\left(-\dot{\phi}_1\sin(\phi_1) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2\cos(\phi_2)\right)$, $\dot{y}_2 = a\left(\dot{\phi}_1\cos(\phi_1) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2\sin(\phi_2)\right)$;

$$\ddot{x}_2 = a\left(-\ddot{\phi}_1 \sin(\phi_1) - \dot{\phi}_1^2 \cos(\phi_1) + \frac{1}{2}\ddot{\phi}_2 \cos(\phi_2) - \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_2)\right),$$

$$\ddot{y}_2 = a\left(\ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1) - \dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1) + \frac{1}{2}\ddot{\phi}_2 \sin(\phi_2) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_2^2 \cos(\phi_2)\right))$$

Aufgabe 19



Das abgebildete Fahrzeug besteht aus dem Klotz 1 (Masse m_1), an den in den Punkten *A* und *B* rechts und links jeweils ein Rad (Masse m_2, Massenträgheitsmoment J_2 bezüglich Schwerpunkt, Radius R) reibungsfrei gelenkig angeschlossen ist. An die Räder auf beiden Seiten ist in den Punkten *C* und *D* jeweils eine starre Stange (Masse m_3) reibungsfrei gelenkig angeschlossen. Die Punkte *C* und *D* haben jeweils den Abstand r vom Radmittelpunkt.

Die Position des Fahrzeugs wird durch die Ortskoordinate s beschrieben und die Stellung der Räder durch den Winkel ϕ. Für $s = 0$ gilt $\phi = 0$ und $v = \dot{s} = v_0$.

a) Ermitteln Sie die Gesamtenergie E_s für eine beliebige Verschiebung s in Abhängigkeit von ϕ, $v = \dot{s}$, $\omega = \dot{\phi}$ sowie den Komponenten v_{3x} und v_{3y} des Geschwindigkeitsvektors der starren Stangen. Wählen Sie als Bezugsniveau für die Lageenergie den Boden. Setzen Sie die gegebenen Daten ein und fassen Sie zusammen.

b) Ermitteln Sie die kinematischen Beziehungen $\omega(v)$, $\phi(s)$, $v_{3x}(s, v)$ und $v_{3y}(s, v)$.

c) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit $v(s)$ für beliebiges s.

Gegeben: m, R, $r/R = 4/5$, $m_1 = 10m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $J_2 = mR^2$, $v_0^2 = g\,R$

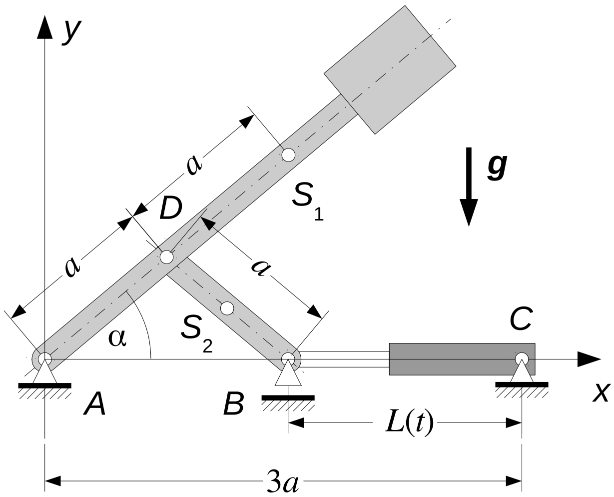
(HM, Prüfung WS 2018)

(Ergebnis: a) $E_S = m\left(9v^2 + 2R^2\omega^2 + v_{3x}^2 + v_{3y}^2\right) + 2mgR\left(1 + \frac{4}{5}\cos(\phi)\right)$; b) $\omega = v/R$, $\phi = s/R$, $v_{3x} = v(1 + 0{,}8\cos(s/R)$, $v_{3y} = -0{,}8v\sin(s/R)$;
c) $v(s) = v_0\sqrt{\dfrac{396 - 40\cos(s/R)}{316 + 40\cos(s/R)}}$)

Aufgabe 20

Der starre Körper 1 (Masse m_1, Massenträgheitsmoment J_1^A bezüglich Punkt *A*) wird im Punkt *A* durch ein Festlager gehalten. Im Punkt *D* ist der starre Körper 2 (Masse m_2, Massenträgheitsmoment J_2^S bezüglich Schwerpunkt S_2) gelenkig angeschlossen, der im Punkt *B* durch ein Loslager gehalten wird. Im Punkt *B* ist außerdem ein Hubzylinder angeschlossen, der im Punkt *C* durch ein Festlager gehalten wird.

Der Schwerpunkt S_2 von Körper 2 befindet sich in der Mitte zwischen den Gelenken *B* und *D*. Alle Gelenke sind reibungsfrei. Der Hubzylinder wird mit der konstanten Geschwindigkeit $v_0 = \dot{L}(t)$ ausgefahren.



a) Ermitteln Sie die Koordinate $x_B(t)$ in Abhängigkeit von $L(t)$ sowie Sinus und Kosinus des Winkels α in Abhängigkeit von $x_B(t)$.

b) Zeichnen Sie den Momentanpol *Π* des Körpers 2 ein und bestimmen Sie seine Koordinaten x_Π und y_Π in Abhängigkeit von x_B.

c) Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der Körper 1 bzw. 2 in Abhängigkeit von x_B und v_0. Positive Winkelgeschwindigkeiten sollen entgegen dem Uhrzeigersinn drehen.

d) Stellen Sie die vier kinetischen Gleichungen auf, die zur Berechnung der Hubzylinderkraft H benötigt werden, die im Punkt *B* am Körper 2 angreifen muss.

Gegeben: a, m_1, J_1^A, m_2, J_2^S, v_0

(HM, Prüfung WS 2019)

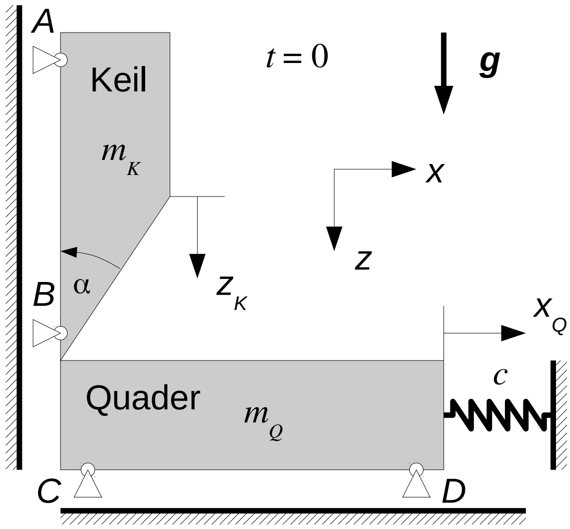
(Ergebnis: a) $x_B(t) = 3a - L(t)$, $\sin(\alpha) = \sqrt{4a^2 - x_B^2}/2a$, $\cos(\alpha) = x_B/2a$;
b) $x_\Pi = x_B$, $y_\Pi = \sqrt{4a^2 - x_B^2}$; c) $\omega_1 = v_0/\sqrt{4a^2 - x_B^2}$, $\omega_2 = -\omega_1$)

Aufgabe 21

Der Keil (Masse m_K) wird durch zwei Loslager in den Punkten *A* und *B* reibungsfrei vertikal geführt, während der Quader (Masse m_Q) durch zwei Loslager in den Punkten *C* und *D* reibungsfrei horizontal geführt wird. Der Quader wird durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten c gehalten.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das System in Ruhe und die Feder ist entspannt. Die Spitze des Keils berührt gerade die linke obere Kante des Quaders.

Der Reibungskoeffizient zwischen Keil und Quader ist μ. Die Position des Keils wird durch die Koordinate z_K und die Position des Quaders durch die Koordinate x_Q beschrieben. Beide Koordinaten werden ab der Position zum Zeitpunkt $t = 0$ gemessen.



a) Geben Sie die kinematische Beziehung zwischen den Koordinaten x_Q und z_K an.

b) Zeichnen Sie die Freischnitte beider Körper für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$. Zeichnen Sie alle auftretenden Kräfte ein.

c) Stellen Sie die kinetischen Gleichungen auf, die zur Ermittlung der Bewegung beider Körper nötig sind. Die Gleichungen müssen nicht aufgelöst werden.

Gegeben: α, μ, m_K, m_Q, c

(HM, Prüfung WS 2020)

(Ergebnis: a) $x_Q = \tan(\alpha) z_K$)