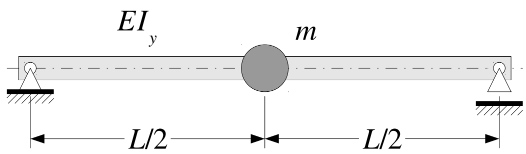
5.2 Freie Schwingungen

Aufgaben

Aufgabe 1

In der Mitte eines beidseitig gelenkig gelagerten masselosen Balkens der Länge L befindet sich die Masse m. Berechnen Sie die Frequenz f und die Periode T der freien ungedämpften Schwingung des Systems.

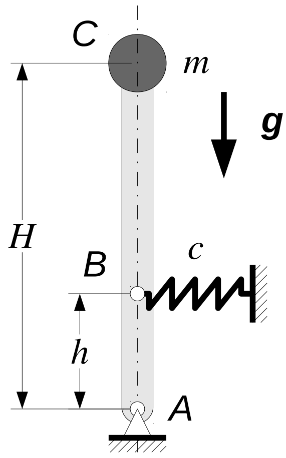


Zahlenwerte: $EI_y = 80000\ \mathrm{Nm}^2$, $m = 300\ \mathrm{kg}$, $L = 2\ \mathrm{m}$

(Ergebnis: $f = 6{,}366\ \mathrm{Hz}$, $T = 0{,}1571\ \mathrm{s}$)

Aufgabe 2

Der masselose starre Träger *AC* ist im Punkt *A* gelenkig gelagert. Im Punkt *B* ist eine lineare Feder mit der Federkonstanten c angeschlossen. Im Punkt *C* befindet sich die Masse m.



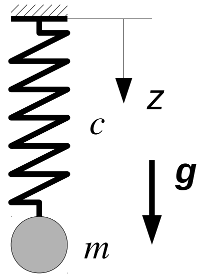
Berechnen Sie für kleine Auslenkungen die Frequenz f der freien ungedämpften Schwingung.

Zahlenwerte: $m = 5\ \mathrm{kg}$, $c = 30\ \mathrm{kN/m}$, $H = 30\ \mathrm{cm}$, $h = 10\ \mathrm{cm}$

(Ergebnis: $f = 4{,}007\ \mathrm{Hz}$)

Aufgabe 3

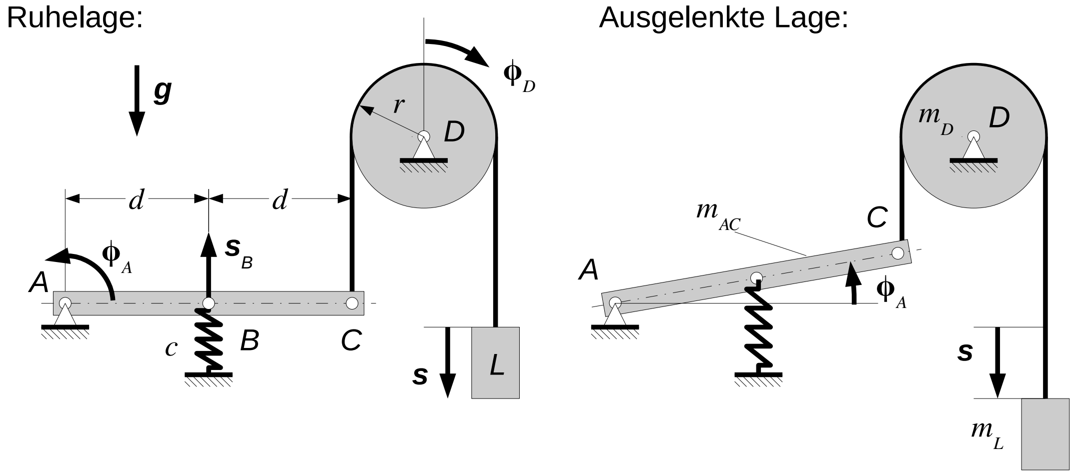
Ein Massenpunkt der Masse m hängt an einer linearen Feder mit der Federkonstanten c.



Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Frequenz f der ungedämpften freien Schwingung und der statischen Auslenkung w_S des Massenpunkts infolge der Gewichtskraft?

(Ergebnis: $f = \sqrt{g/w_S}/(2\pi)$)

Aufgabe 4



Das abgebildete System besteht aus der im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagerten homogenen dünnen Stange *AC* (Masse m_{AC}), der im Punkt *D* reibungsfrei gelenkig gelagerten homogenen Scheibe *D* (Masse m_D) und der Last *L* (Masse m_L). Die Last *L* hängt an einem dehnstarren Seil, das auf der Scheibe *D* haftet und im Punkt *C* an der Stange *AC* befestigt ist. Im Punkt *B* ist an die Stange *AC* eine lineare Feder (Federkonstante c) angeschlossen, die in der Ruhelage entspannt ist.

a) Geben Sie die Gesamtenergie E_s in der ausgelenkten Lage an. Verwenden Sie dabei die eingezeichneten kinematischen Variablen s, s_B, ϕ_A, ϕ_D sowie ihre zeitlichen Ableitungen. Die Auslenkung darf als klein angenommen werden. Wählen Sie als Nullniveau für die Lageenergie die Ruhelage.

b) Ermitteln Sie die kinematischen Beziehungen
$s_B = s_B(s), \quad \dot{\phi}_A = \omega_A(\dot{s}), \dot{\phi}_D = \omega_D(\dot{s})$.

c) Ermitteln Sie die Beschleunigung $a(s)$ der Last *L* in Abhängigkeit von der Auslenkung s.

d) Ermitteln Sie die Auslenkung s_S der statischen Gleichgewichtslage.

e) Ermitteln Sie die Eigenkreisfrequenz ω der Schwingung um die statische Gleichgewichtslage.

Gegeben: $m_{AC} = m_L = 6m$, $m_D = 4m$, d, r, c, $J_{AC}^A = \frac{4}{3} m_{AC} d^2$, $J_D^D = \frac{1}{2} m_D r^2$

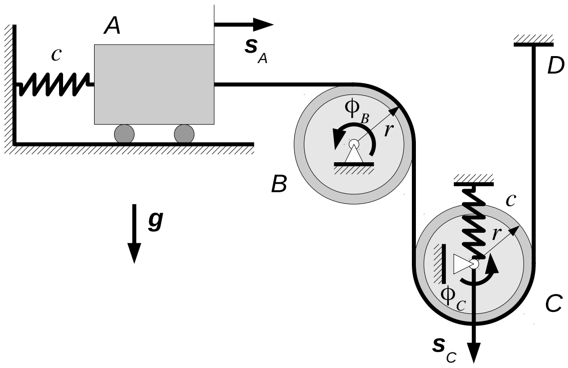
(HM, Prüfung WS 2015)

(Ergebnis: a) $E_s = m\left(8 d^2 \omega_A^2 + 2 r^2 \omega_D^2 + 6 v^2\right)/2 + 6 m g \left(s_B - s\right) + c s_B^2/2$;

b) $s_B = s/2$, $\omega_A = \dot{s}/(2d)$, $\omega_D = \dot{s}/r$; c) $a(s) = 3g/10 - cs/(40m)$;
d) $s_S = 12mg/c$; e) $\omega = \sqrt{c/(40m)}$)

Aufgabe 5

Das abgebildete System besteht aus dem Wagen *A* (Masse m_A), der reibungsfrei gelenkig gelagerten Rolle *B* (Massenträgheitsmoment J_B bezüglich dem Schwerpunkt) und der Rolle *C* (Masse m_C, Massenträgheitsmoment J_C bezüglich dem Schwerpunkt).



Die Rolle *C* wird durch ein Loslager gehalten, das sich in vertikaler Richtung frei verschieben kann.

Der Wagen *A* rollt reibungsfrei. Die Masse der Räder des Wagens darf vernachlässigt werden.

Am Wagen *A* und an der Rolle *C* sind lineare Federn mit der Federkonstanten c angeschlossen. Der Wagen *A* ist über ein masseloses dehnstarres Seil, das auf den Rollen *B* und *C* haftet, mit dem Punkt *D* verbunden.

In der dargestellten Lage sind beide Federn entspannt, und das System ist in Ruhe.

a) Geben Sie die Verschiebung s_A des Wagens *A* sowie die Drehwinkel ϕ_B und ϕ_C der Rollen *B* und *C* in Abhängigkeit von der Verschiebung s_C der Rolle *C* an.

b) Ermitteln Sie mithilfe des Energieerhaltungssatzes die Geschwindigkeit v_C der Rolle *C* in Abhängigkeit von der Verschiebung s_C.

c) Ermitteln Sie die Beschleunigung a_C der Rolle *C* in Abhängigkeit von der Verschiebung s_C.

d) Mit welcher Kreisfrequenz ω schwingt das System um die statische Gleichgewichtslage?

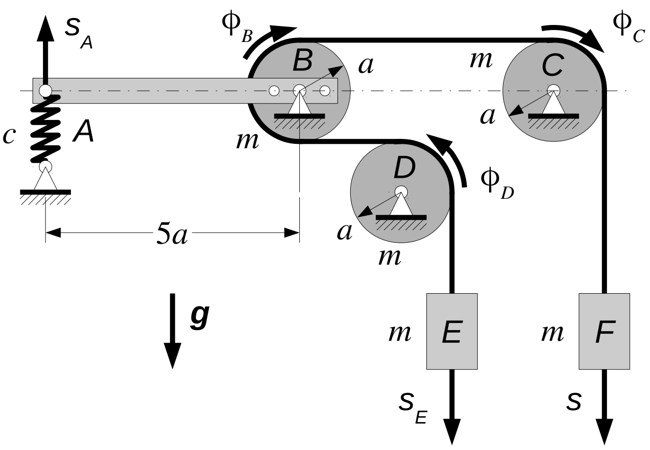
Gegeben: c, $m_A = 8m$, $m_C = 3m$, $J_B = J_C = mr^2$

(HM, Prüfung SS 2016)

(Ergebnis: a) $s_A = 2s_C$, $\phi_B = -2s_C/r$, $\phi_C = s_C/r$; b) $v_C = \sqrt{(6mgs_C - 5cs_C^2)/(40m)}$;
c) $a_C = 3g/40 - cs_C/(8m)$; d) $\omega = \sqrt{c/(8m)}$)

Aufgabe 6

Das abgebildete System besteht aus den reibungsfrei gelenkig gelagerten Rollen *B*, *C* und *D*, über die ein dehnstarres masseloses Seil verläuft. An den Enden des Seils hängen die Massen *E* und *F* (Masse m). An der Rolle *B* ist der Balken *AB* starr befestigt, der im Punkt *A* durch eine lineare Feder (Federsteifigkeit c) gehalten wird.



Alle drei Rollen sind homogene Scheiben mit Radius a und Masse m. Die Masse des Balkens *AB* darf vernachlässigt werden.

In der dargestellten Lage ist die Feder entspannt, und die Masse *F* hat die Geschwindigkeit $v_0 = \dot{s}(0)$.

Die Auslenkungen dürfen als klein angenommen werden.

a) Ermitteln Sie die kinematischen Zusammenhänge $s_A(s)$, $s_E(s)$, $\phi_B(s)$, $\phi_C(s)$ und $\phi_D(s)$.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(s)$ der Masse *F* mithilfe des Energieerhaltungssatzes.

c) Bestimmen Sie die Frequenz f der freien Schwingung des Systems.

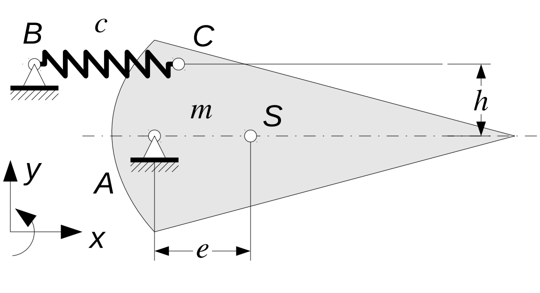
Gegeben: a, m, c

(HM, Prüfung WS 2016)

(Ergebnis: a) $s_A(s) = 5s$, $s_E(s) = -s$, $\phi_B(s) = s/a$, $\phi_D(s) = s/a$;
b) $v(s) = \pm\sqrt{v_0^2 - (50/7)(c/m)s^2}$; c) $f = 5\sqrt{2c/(7m)}/(2\pi)$)

Aufgabe 7

Das abgebildete Querruder ist im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert. Die Elastizität des Antriebs wird durch die im Punkt *C* angeschlossene Feder mit der Federkonstanten c abgebildet.



Das Querruder hat die Masse m und den Trägheitsradius i_S bezüglich dem

Schwerpunkt. Der Schwerpunkt liegt um die Strecke e hinter Punkt *A*. Punkt *C* liegt um die Höhe h über Punkt *A*.

Bestimmen Sie die Frequenz f der Drehschwingung um Punkt *A*. Die Auslenkung darf als klein angenommen werden.

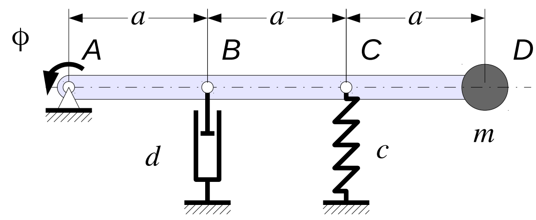
Gegeben: c, m, i_S, e, h

(HM, Prüfung SS 2017)

(Ergebnis: $f=\frac{1}{2\pi}\frac{h}{\sqrt{e^2+i_s^2}}\sqrt{\frac{c}{m}}$)

Aufgabe 8

Der starre masselose Träger *AD* ist im Punkt *A* gelenkig gelagert. Im Punkt *B* ist ein Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d und im Punkt *C* eine Feder mit der Federkonstanten c angeschlossen. Im Punkt *D* befindet sich die Masse m. Die Auslenkung wird durch den Winkel ϕ beschrieben, der als klein angenommen werden darf.



a) Wie lautet die Schwingungsgleichung?

b) Welche Werte haben die Kreisfrequenz ω der ungedämpften Schwingung und die Abklingkonstante δ?

c) Welche Werte haben das Lehrsche Dämpfungsmaß D sowie die Kreisfrequenz ω_d und die Periode T_d der gedämpften Schwingung?

d) Nach wie vielen Schwingungen ist die Amplitude auf 10 % der Anfangsauslenkung abgeklungen?

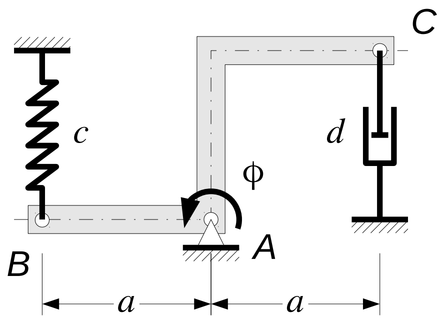
Zahlenwerte: $d = 36$ kg/s, $c = 4500$ N/m, $m = 5$ kg

(Ergebnis: $\omega = 20$ 1/s, $\delta = 0{,}4$ 1/s; $D = 2$ %, $\omega_d = 19{,}996$ 1/s, $T_d = 0{,}3142$ s; nach 19 Schwingungen)

Aufgabe 9

Der starre Rahmen *BAC* ist im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert. Im Punkt *B* ist eine linear Feder mit der Federkonstanten c und im Punkt *C* ein linearer Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d angeschlossen. Der Rahmen hat das Massenträgheitsmoment J^A bezüglich Punkt *A*.

a) Stellen Sie die Schwingungsgleichung auf und ermitteln Sie die Eigenkreisfrequenz ω der freien ungedämpften Schwingung und die Abklingkonstante δ in Abhängigkeit von c, d und a.

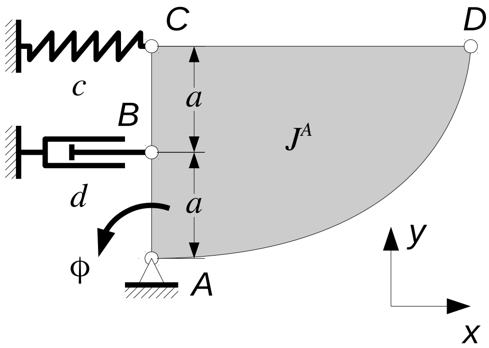


b) Eine Messung der Vertikalbeschleunigung im Punkt *C* zeigt, dass zwei benachbarte Maxima einen zeitlichen Abstand von $0{,}3\ \mathrm{s}$ haben und das Verhältnis zwischen zwei aufeinander folgenden Maxima $0{,}7$ beträgt. Ermitteln Sie daraus die Werte der Abklingkonstanten δ, der Eigenkreisfrequenz ω und des Lehrschen Dämpfungsmaßes D.

Der Winkel ϕ darf als klein angenommen werden.

(Ergebnis: a) $\omega = a\sqrt{c/J^A}$, $\delta = d\,a^2/(2J^A)$; b) $\delta = 1{,}189\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega = 20{,}97\ \mathrm{s}^{-1}$, $D = 5{,}670\ \%$)

Aufgabe 10



Der starre Körper *ABCD* ist im Punkt *A* reibungsfrei gelenkig gelagert. Im Punkt *B* ist ein linearer Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d und im Punkt *C* eine lineare Feder mit der Federkonstanten c angeschlossen. Der Körper hat das Massenträgheitsmoment J^A bezüglich Punkt *A*.

a) Stellen Sie die Schwingungsgleichung auf und ermitteln Sie daraus die Periode T der ungedämpften Schwingung und die Abklingkonstante δ in Abhängigkeit von a, J^A, c und d.

b) Im Punkt *D* wird die Vertikalbeschleunigung a_{Dy} gemessen. Dabei zeigt sich, dass das Verhältnis von zwei aufeinander folgenden Maxima den Wert $0{,}8$ hat und der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Maxima $0{,}12\ \mathrm{s}$ beträgt. Bestimmen Sie daraus die Werte der Abklingkonstanten δ, der Kreisfrequenz ω der ungedämpften Schwingung und des Lehrschen Dämpfungsmaßes D.

c) Bestimmen Sie die Werte des Massenträgheitsmoments J^A und der Dämpferkonstanten d für die unten angegebenen Zahlenwerte von a und c.

Der Winkel ϕ darf als klein angenommen werden.

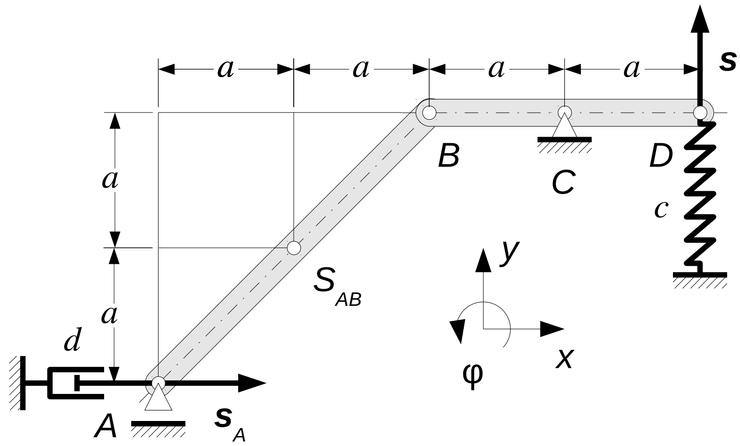
Gegeben: a, J^A, c, d

Zahlenwerte für c): $a = 10$ cm, $c = 1$ kN/mm

(HM, Prüfung SS 2018)

(Ergebnis: a) $T=\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{J^A}{c}}$, $\delta=\frac{a^2 d}{2J^A}$; b) $\delta = 1{,}860\ \mathrm{s}^{-1}$, $\omega = 52{,}39\ \mathrm{s}^{-1}$, $D = 3{,}550$ %; c) $J^A = 14{,}57\ \mathrm{kgm}^2$, $d = 5420$ kg/s)

Aufgabe 11



Das abgebildete System besteht aus den dünnen homogenen Stangen *AB* (Masse m_{AB}) und *BD* (Masse m_{BD}), die im Punkt *B* reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden sind. Die Stange *AB* wird im Punkt *A* durch ein Loslager und die Stange *BD* im Punkt *C* durch ein Festlager gehalten. Im Punkt *A* ist ein linearer Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d und im Punkt *D* eine lineare Feder mit der Federkonstanten c angeschlossen.

Die Auslenkungen dürfen als klein angenommen werden.

a) Berechnen Sie die Massenträgheitsmomente J_{AB}^S und J_{BD}^C der Stangen *AB* bzw. *BD*.

b) Ermitteln Sie die Winkelgeschwindigkeiten ω_{AB} und ω_{BD} der Stangen *AB* bzw. *BD*, die Geschwindigkeit $v_A=\dot{s}_A$ von Punkt *A* sowie die Geschwindigkeiten v_{Sx} und v_{Sy} des Schwerpunkts S_{AB} in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit $v=\dot{s}$ von Punkt *D*.

c) Stellen Sie alle kinetischen Gleichungen auf, die zum Aufstellen der Schwingungsgleichung benötigt werden. Die kinematischen Beziehungen aus b) sollen noch nicht eingesetzt werden

d) Stellen Sie die Schwingungsgleichung auf und ermitteln Sie die Abklingkonstante δ und die Eigenkreisfrequenz ω.

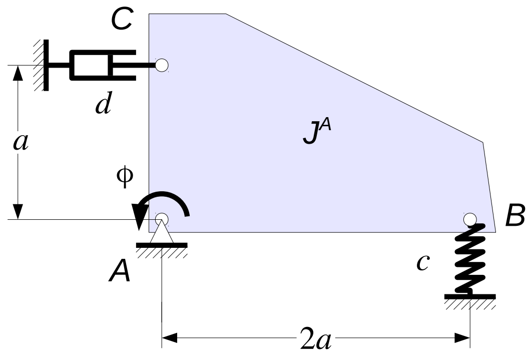
Gegeben: a, c, d, m, $m_{AB} = 2m$, $m_{BD} = m$

(HM, Prüfung WS 2018)

(Ergebnis: a) $J_{AB}^S=\frac{4}{3}m a^2$, $J_{BD}^C=\frac{1}{3}m a^2$; b) $\omega_{AB} = -v/(2a)$, $\omega_{BD} = v/a$, $v_A = -v$,

$v_{Sx} = v_{Sy} = -v/2$; d) $\delta = 0{,}3\,d/m$, $\omega = \sqrt{(0{,}6\,c/m)}$)

Aufgabe 12



Der abgebildete starre Körper *ABC* ist im Punkt *A* gelenkig gelagert. Er hat das Massenträgheitsmoment J^A bezüglich Punkt *A*. Im Punkt *B* ist eine lineare Feder mit der Federsteifigkeit c angeschlossen und im Punkt *C* ein geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer mit der Dämpferkonstanten d.

Die Auslenkung des Körpers wird durch den im Gegenuhrzeigersinn positiv gemessenen Winkel ϕ beschrieben, der als klein angenommen werden darf.

Eine Messung ergibt, dass während der Beobachtungszeit T_B insgesamt N volle Schwingungen ausgeführt werden. Dabei geht die Amplitude des Winkels von $\phi_0 = \phi(0)$ auf $\phi_N = \phi(T_B)$ zurück.

a) Stellen Sie die Schwingungsgleichung auf.

b) Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T_d und die Kreisfrequenz ω_d der gedämpften Schwingung.

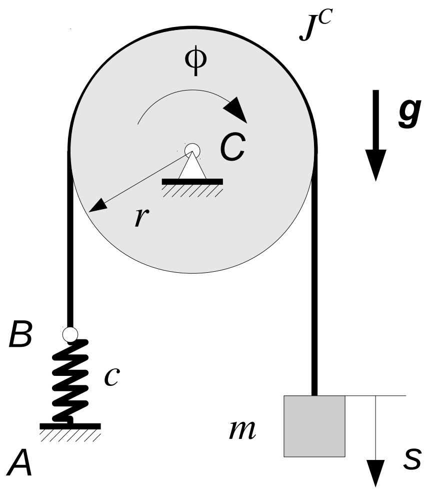
c) Bestimmen Sie die Abklingkonstante δ, das Lehrsche Dämpfungsmaß D, das Massenträgheitsmoment J^A und die Dämpferkonstante d.

Gegeben: $a = 1$ m, $c = 500$ N/m, $T_B = 50$ s, $N = 25$, $\phi_0 = 0{,}2$, $\phi_N = 0{,}02$

(HM, Prüfung WS 2019)

(Ergebnis: a) $\ddot{\phi} + (d\,a^2/J^A)\dot{\phi} + (4\,c\,a^2/J^A)\phi = 0$; b) $T_d = 2$ s, $\omega_d = 3{,}142$ s^{-1};
c) $\delta = 0{,}04605$ s^{-1}, $D = 1{,}466$ %, $J^A = 202{,}6$ kgm^2,
$d = 18{,}66$ kg/s)

Aufgabe 13



Die Masse m hängt an einem masselosen dehnstarren Seil, das über die im Punkt *C* reibungsfrei gelenkig gelagerte Rolle mit Massenträgheitsmoment J^C und Radius r umgelenkt wird. Im Punkt *B* wird das Seil durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten c gehalten. Die Feder ist im Punkt *A* fest eingespannt.

In der gezeichneten Ausgangslage ist die Feder entspannt, und die Masse hat die Geschwindigkeit v_0. Die Auslenkung der Masse wird durch den ab der Ausgangslage gemessenen Weg s beschrieben.

a) Welche kinematische Beziehung besteht zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\omega=\dot{\phi}$ der Rolle und der Geschwindigkeit $v=\dot{s}$ der Masse, wenn das Seil auf der Rolle haftet?

b) Welcher Zusammenhang $v(s)$ besteht zwischen der Geschwindigkeit der Masse und dem zurückgelegten Weg s?

c) Bestimmen Sie die Beschleunigung $a(s)$ der Masse.

d) Mit welcher Frequenz f schwingt das System um die Gleichgewichtslage?

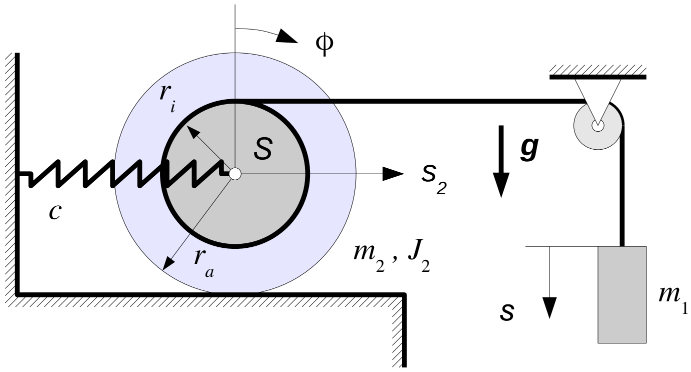
Gegeben: r, m, $J^C = 3mr^2$, c, v_0

(HM, Prüfung WS 2020)

(Ergebnis: a) $\omega=\frac{v}{s}$; b) $v(s)=\pm\sqrt{v_0^2+\frac{1}{2}g\,s-\frac{1}{4}\frac{c}{m}s^2}$; c) $a(s)=\frac{1}{4}\left(g-\frac{c}{m}s\right)$;

d) $f=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$)

Aufgabe 14



Ein Klotz der Masse m_1 hängt an einem dehnstarren masselosen Seil, das über eine masselose reibungsfrei gelenkig gelagerte Rolle geführt wird und auf einer Trommel mit Masse m_2 und Massenträgheitsmoment J_2 aufgewickelt ist. Die Trommel rollt auf einer horizontalen Fläche und wird durch eine lineare Feder mit der Federkonstanten c gehalten.

Die Wege s und s_2 sowie der Winkel ϕ werden ab der Ausgangslage gemessen, in der die Feder entspannt ist.

a) Welcher kinematischer Zusammenhang besteht zwischen dem Winkel ϕ und der Auslenkung s sowie zwischen der Auslenkung s_2 und der Auslenkung s?

b) Welcher Zusammenhang $v(s)$ besteht zwischen der Geschwindigkeit des Klotzes und seinem Weg s, wenn seine Geschwindigkeit in der Ausgangslage v_0 ist?

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Beschleunigung $a(s)$ des Klotzes und seinem Weg s?

d) Mit welcher Kreisfrequenz ω schwingt das System um die statische Gleichgewichtslage?

Verwenden Sie zur Lösung von Teilaufgabe b) den Energieerhaltungssatz.

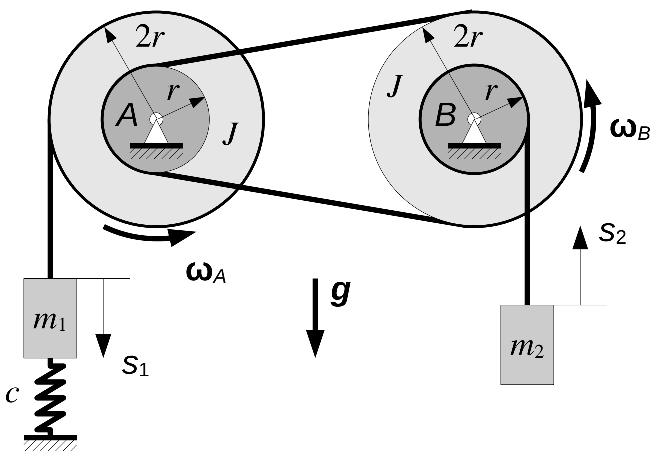
Gegeben: m_1, m_2, J_2, r_i, r_a, c, v_0

(HM, Prüfung SS 2021)

(Ergebnis: a) $\phi=\frac{s}{r_i+r_a}$, $s_2=\frac{r_a}{r_i+r_a}s$; b) $v(s)=\sqrt{v_0^2+\frac{2m_1 g(r_i+r_a)^2 s-c r_a^2 s^2}{m_1(r_i+r_a)^2+m_2 r_a^2+J_2}}$;

c) $a(s)=\frac{m_1 g(r_i+r_a)^2-c r_a^2 s}{m_1(r_i+r_a)^2+m_2 r_a^2+J_2}$; d) $\omega=\sqrt{\frac{c r_a^2}{m_1(r_i+r_a)^2+m_2 r_a^2+J_2}}$)

Aufgabe 15



Die beiden Rollen *A* und *B* sind in den Punkten *A* und *B* reibungsfrei gelenkig gelagert. Beide Rollen haben dasselbe Massenträgheitsmoment *J*. Sie sind durch ein Seil miteinander verbunden.

Außen auf der Rolle *A* ist ein Seil aufgespult, an dem die Masse m_1 hängt, an der eine lineare Feder mit der Federkonstanten c befestigt ist.

Auf den inneren Absatz der Rolle *B* ist ein Seil aufgespult, an dem die Masse m_2 hängt.

Alle Seile sind dehnstarr und masselos.

In der dargestellten Lage ist die Feder entspannt, und die Masse m_1 hat die Geschwindigkeit $\dot{s}_1=v_0$. Die Wege s_1 und s_2 der beiden Massen werden ab dieser Lage gemessen. Die Winkelgeschwindigkeiten ω_A und ω_B sind positiv im Gegenuhrzeigersinn.

a) Bestimmen Sie die kinematischen Beziehungen $\omega_A(\dot{s}_1)$, $\omega_B(\dot{s}_1)$, $\dot{s}_2(\dot{s}_1)$ und $s_2(s_1)$.

b) Bestimmen Sie die Gesamtenergie $E(s_1, \dot{s}_1)$ des Systems für eine beliebige Lage in Abhängigkeit von s_1 und $\dot{s}_1$.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v_1(s_1)=\dot{s}_1(s_1)$ der Masse m_1 in Abhängigkeit von s_1.

d) Bestimmen Sie die Beschleunigung $a_1(s_1)$ der Masse m_1 in Abhängigkeit von s_1.

e) Mit welcher Frequenz f schwingt das System?

Gegeben: v_0, c, m, $m_1 = 4m$, $m_2 = 16m$, $J = 16mr^2$

(HM, Prüfung WS 2021)

(Ergebnis: a) $\omega_A=\dot{s}_1/(2r)$, $\omega_B=\dot{s}_1/(4r)$, $\dot{s}_2=\dot{s}_1/4$, $s_2=s_1/4$;
b) $E=5m\dot{s}_1^2+c s_1^2/2$; c) $v_1=\pm\sqrt{v_0^2-(c/m)s_1^2/10}$; d) $a_1=(c/m)s_1/10$;
e) $f=(1/(2\pi))\sqrt{(c/m)/10}$)