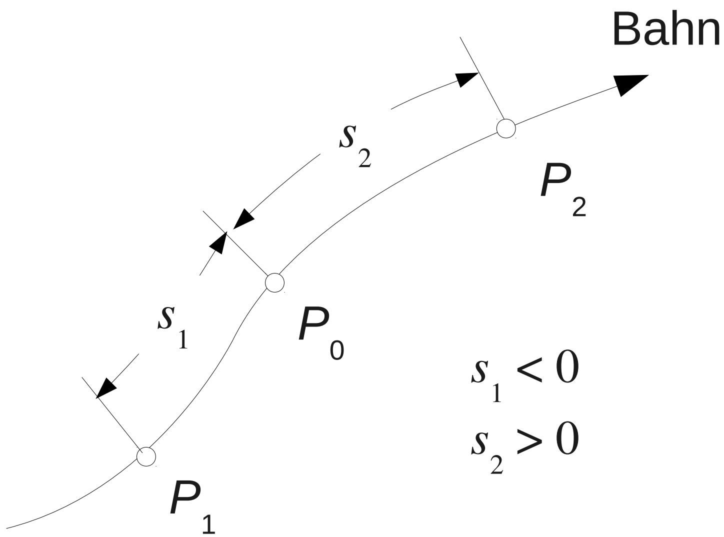
1. Eindimensionale Bewegung

- Die Gesamtheit aller Orte, die ein Punkt während seiner Bewegung einnimmt, wird als *Bahnkurve* oder *Bahn* bezeichnet.
- Bei einer eindimensionalen Bewegung bewegt sich der Punkt auf einer vorgegebenen Bahn:
  - Schienenfahrzeuge
  - Schlitten von Werkzeugmaschinen
  - Magnetschwebebahn
- Diese Bewegung wird auch als *geführte Bewegung* bezeichnet.

1. Eindimensionale Bewegung

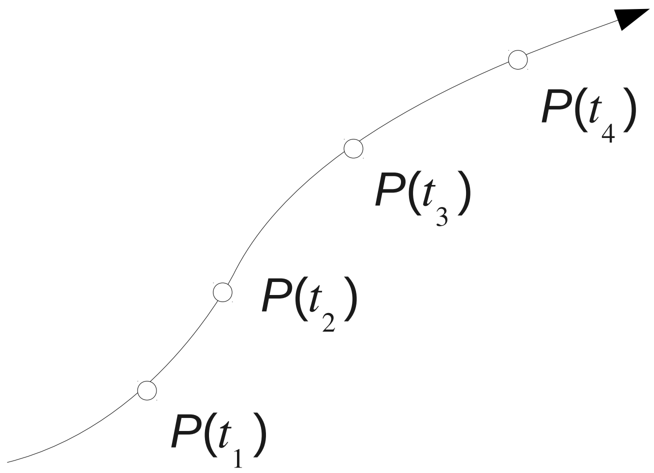
1.1 Grundbegriffe

- Ort:
  - Bei vorgegebener Bahn ist der Ort eines Punktes durch die Angabe der von einem festen Ort P_0 aus gemessenen *Bogenlänge* s eindeutig festgelegt.
  - Die Bogenlänge s ist die *Ortskoordinate* des Punktes.
  - Die Orientierung der Bahn legt das Vorzeichen der Ortskoordinate fest.



1.1 Grundbegriffe

- Bewegung:
  - Zum Zeitpunkt t_i befindet sich der Punkt am Ort $P(t_i)$ mit der Ortskoordinate $s(t_i)$.
  - Der Bewegungsablauf ist vollständig beschrieben, wenn die Ortskoordinate s in Abhängigkeit von der Zeit t bekannt ist.



1.1 Grundbegriffe

- Bahngeschwindigkeit:
  - Der Differenzenquotient

$$v_m = \frac{s(t_{i+1}) - s(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i}$$

    ist ein Maß für die mittlere Änderung der Ortskoordinate mit der Zeit.

  - Er wird als *mittlere Bahngeschwindigkeit* zwischen den Punkten *P*(t_i) und *P*(t_{i+1}) bezeichnet.

1.1 Grundbegriffe

- Je kleiner der Abstand der Zeiten t_i und t_{i+1} gewählt wird, desto genauer gibt die mittlere Geschwindigkeit die zeitliche Änderung der Ortskoordinate zum Zeitpunkt t_i an.
- Der Grenzwert

$$v(t_i) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} = \frac{ds}{dt}(t_i) = \dot{s}(t_i)$$

definiert die *Bahngeschwindigkeit* am Ort $P(t_i)$.
- Die Bahngeschwindigkeit ist die Ableitung der Ortskoordinate s nach der Zeit.

1.1 Grundbegriffe

- Einheiten:
  - Die Einheit der Bahngeschwindigkeit ist Längeneinheit pro Zeiteinheit.
  - Gängige Einheiten sind $\mathrm{m/s}$ und $\mathrm{km/h}$:

$$1\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,, \quad 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

- Vorzeichen:
  - Ein positiver Wert der Bahngeschwindigkeit gibt an, dass sich der Punkt in Richtung zunehmender Ortskoordinate, d. h. entsprechend der Orientierung der Bahn bewegt.
  - Ein negativer Wert der Bahngeschwindigkeit gibt an, dass sich der Punkt entgegen der Orientierung der Bahn bewegt.

1.1 Grundbegriffe

- Bahnbeschleunigung:
  - Die Bahnbeschleunigung ist ein Maß für die Änderung der Bahngeschwindigkeit.
  - Der Differenzenquotient

$$a_m = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{\Delta v_i}{\Delta t_i}$$

wird als *mittlere Bahnbeschleunigung* zwischen den Punkten $P(t_i)$ und $P(t_{i+1})$ bezeichnet.

1.1 Grundbegriffe

- Der Grenzwert

$$a(t_i) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta v_i}{\Delta t_i} = \frac{dv}{dt}(t_i) = \dot{v}(t_i) = \ddot{s}(t_i)$$

definiert die *Bahnbeschleunigung* im Punkt $P(t_i)$.

- Die Bahnbeschleunigung ist die erste Ableitung der Bahngeschwindigkeit nach der Zeit oder die zweite Ableitung der Ortskoordinate nach der Zeit.

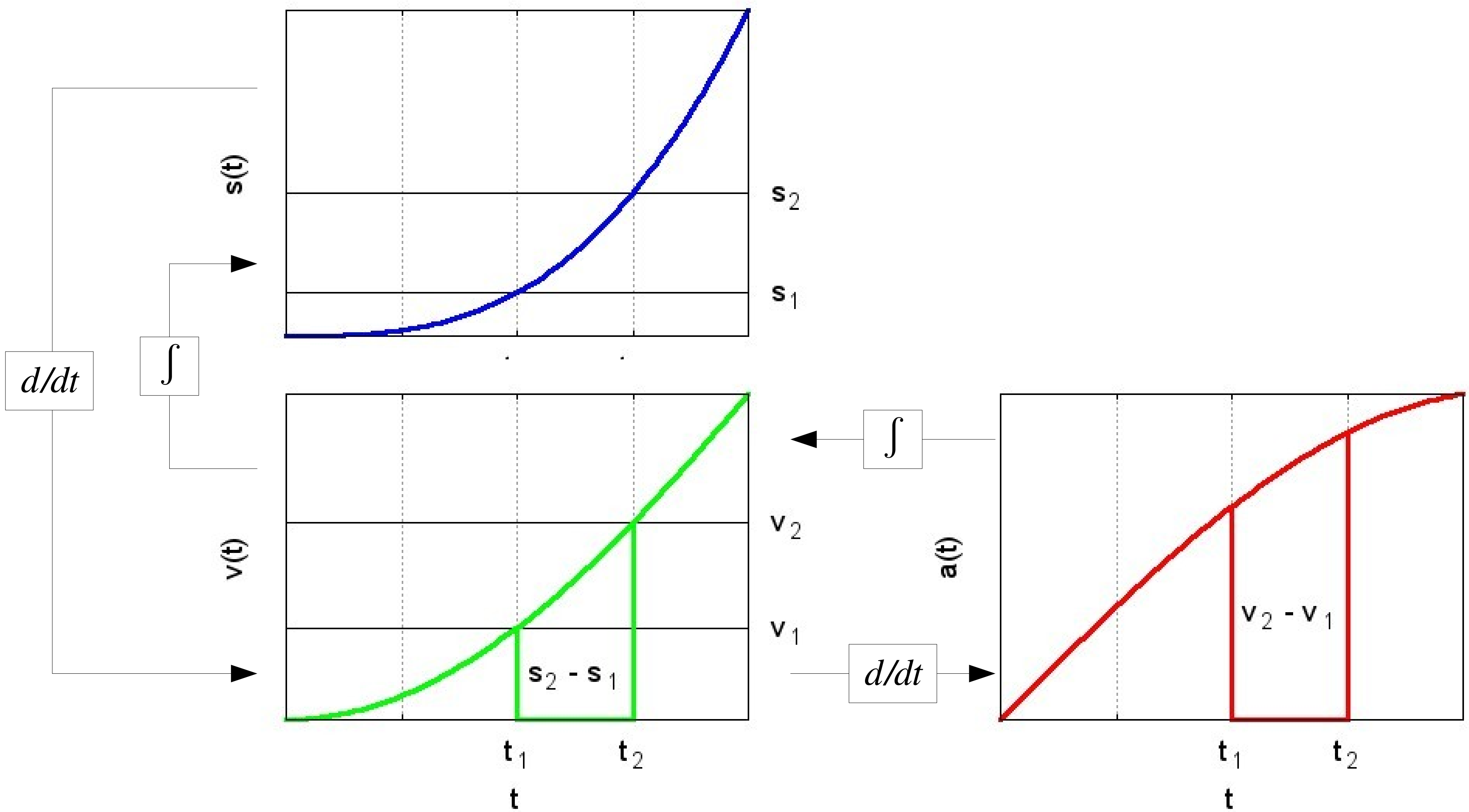
1.1 Grundbegriffe

- Einheiten:
  - Die Einheit der Bahnbeschleunigung ist Länge pro Zeit zum Quadrat.
  - Gängige Einheiten sind $\mathrm{m/s^2}$ und g (Erdbeschleunigung):

$$1\,\mathrm{g} = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

- Vorzeichen:
  - Haben Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung das gleiche Vorzeichen, so nimmt der Betrag der Bahngeschwindigkeit zu. Die Bewegung wird beschleunigt.
  - Haben Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung entgegengesetzte Vorzeichen, so nimmt der Betrag der Bahngeschwindigkeit ab. Die Bewegung wird verzögert.

1.1 Grundbegriffe



1.2 Gleichförmige Bewegung

- Definition:
  - Eine Bewegung heißt *gleichförmig*, wenn die Bahngeschwindigkeit konstant ist:

$$v(t) = v_0 = const.$$

- Bahnbeschleunigung:
  - Aus der Definition der Bahnbeschleunigung folgt:

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

- Ortskoordinate:
  - Aus der Definition der Bahngeschwindigkeit folgt durch Trennung der Variablen:

$$ds = v(t)\,dt$$

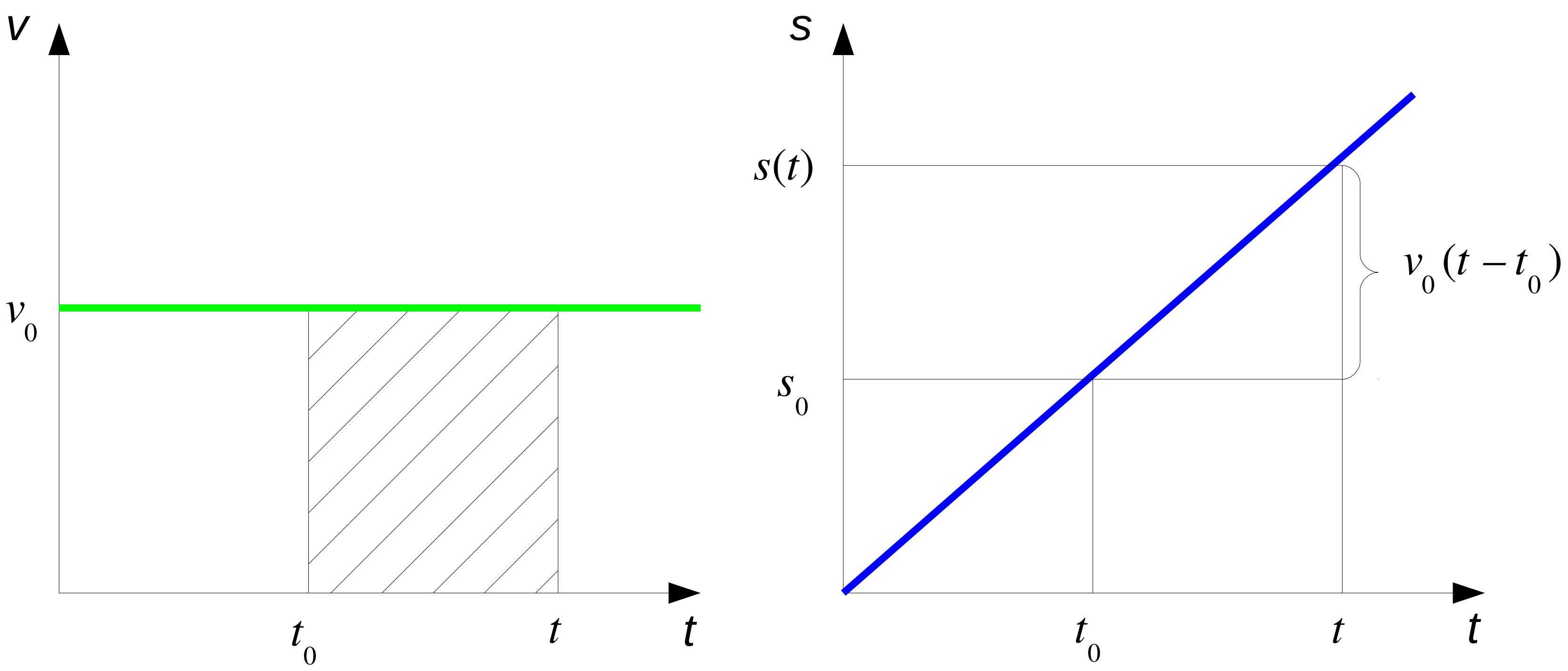
  - Integration ergibt:

$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} v(\bar{t})\,d\bar{t} = v_0 \int_{t_0}^{t} d\bar{t}$$
$$= v_0 (t - t_0)$$

1.2 Gleichförmige Bewegung

- Mit
$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = s(t) - s_0$$
  folgt für das *Ort-Zeit-Gesetz*:
$$s(t) - s_0 = v_0 (t - t_0) \rightarrow \boxed{s(t) = s_0 + v_0 (t - t_0)}$$
- Dabei ist s_0 die Ortskoordinate zum Zeitpunkt t_0 (Anfangs-bedingung).

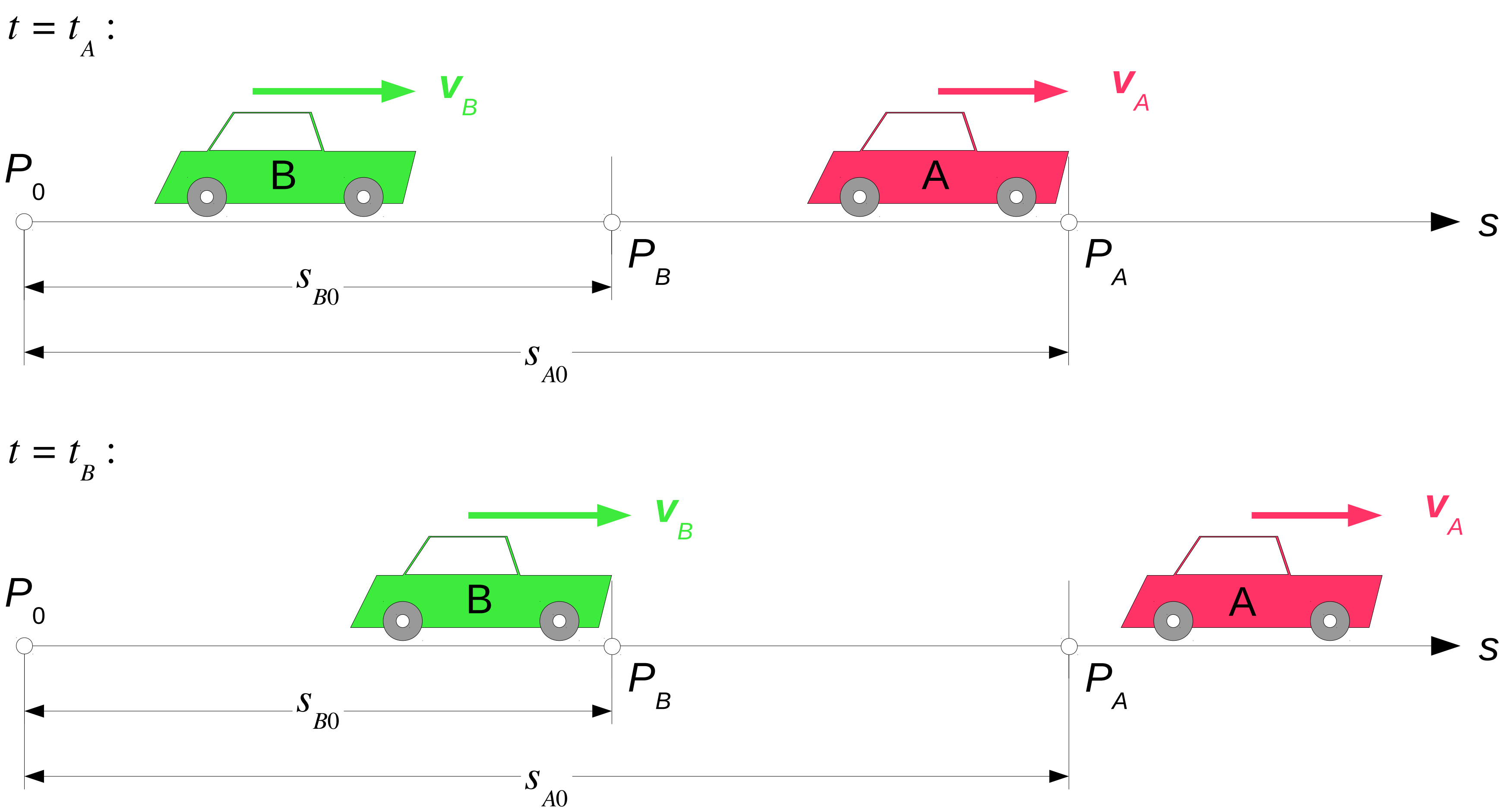
1.2 Gleichförmige Bewegung



1.2 Gleichförmige Bewegung

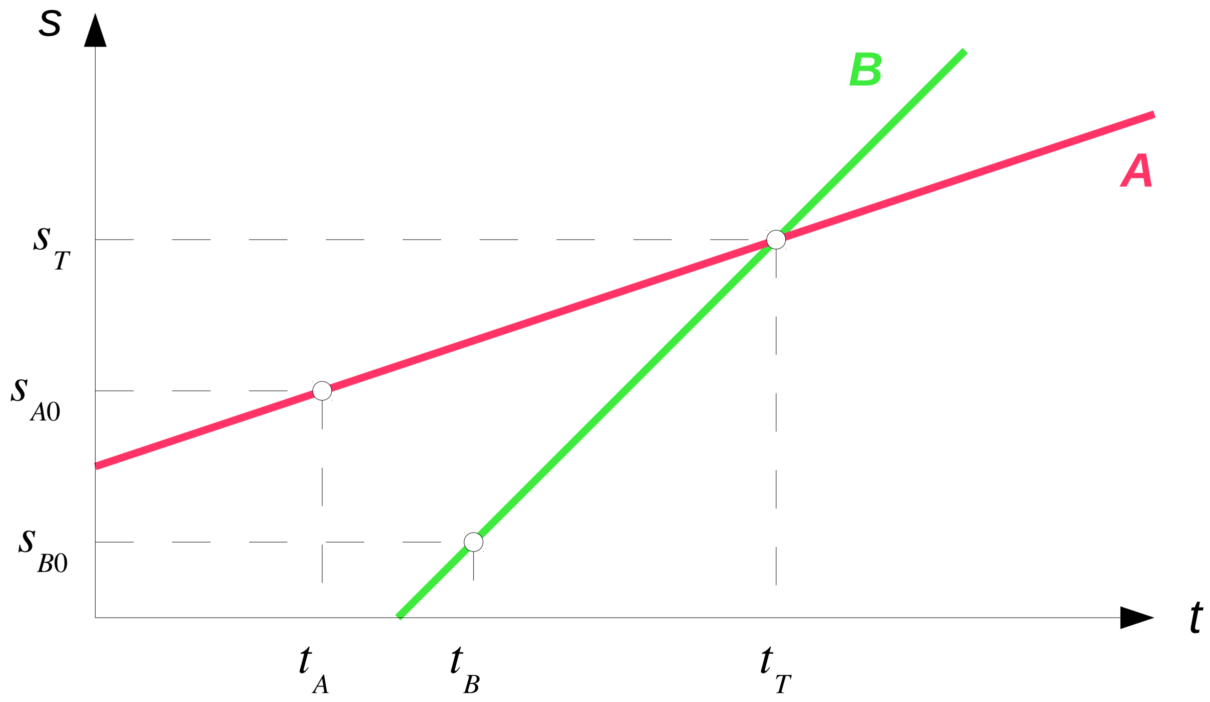
- Beispiel:
  - Fahrzeug *A* befindet sich zum Zeitpunkt t_A am Ort P_A mit der Ortskoordinate s_{A0} und fährt mit der konstanten Bahngeschwindigkeit v_A.
  - Fahrzeug *B* befindet sich zum Zeitpunkt $t_B > t_A$ am Ort P_B mit der Ortskoordinate s_{B0} und fährt mit der konstanten Bahngeschwindigkeit v_B.
  - Wo treffen sich die beiden Fahrzeuge?

1.2 Gleichförmige Bewegung



1.2 Gleichförmige Bewegung

- Darstellung im Ort-Zeit-Diagramm:



1.2 Gleichförmige Bewegung

- Ort-Zeit-Gesetze:
  - Fahrzeug *A*: $s_A(t) = s_{A0} + v_A(t - t_A)$
  - Fahrzeug *B*: $s_B(t) = s_{B0} + v_B(t - t_B)$
- Bedingung für Treffen: $s_A(t_T) = s_B(t_T) = s_T$
  - Ermittlung von t_T:

$$s_{A0} + v_A(t_T - t_A) = s_{B0} + v_B(t_T - t_B)$$

$$s_{A0} - s_{B0} - v_A t_A + v_B t_B = (v_B - v_A) t_T$$

$$\rightarrow \quad t_T = \frac{s_{A0} - s_{B0} - v_A t_A + v_B t_B}{v_B - v_A}$$

1.2 Gleichförmige Bewegung

- Ermittlung von s_T aus Ort-Zeit-Gesetz für Fahrzeug *A*:

$$s_T = s_{A0} + v_A \left(\frac{s_{A0} - s_{B0} - v_A t_A + v_B t_B}{v_B - v_A} - t_A \right)$$

$$= s_{A0} + \frac{v_A}{v_B - v_A} \left(s_{A0} - s_{B0} - v_A t_A + v_B t_B - v_B t_A + v_A t_A \right)$$

$$= \frac{1}{v_B - v_A} \left(s_{A0} v_B - s_{A0} v_A + s_{A0} v_A - s_{B0} v_A + v_A v_B \left(t_B - t_A \right) \right)$$

$$= \frac{s_{A0} v_B - s_{B0} v_A + v_A v_B \left(t_B - t_A \right)}{v_B - v_A}$$

- Aus dem Ort-Zeit-Gesetz für Fahrzeug *B* folgt das gleiche Ergebnis (Übung).

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Definition:
  - Eine Bewegung heißt *gleichmäßig beschleunigt*, wenn die Bahnbeschleunigung konstant ist:

$$a(t) = a_0 = const.$$

- Anfangsbedingungen:
  - Ort: $s(t_0) = s_0$
  - Geschwindigkeit: $v(t_0) = v_0$

- Bahngeschwindigkeit:
  - Aus der Definition der Bahnbeschleunigung folgt durch Trennung der Variablen:

$$dv = a(t)\,dt$$

  - Integration ergibt:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(\bar{t})\,d\bar{t} = a_0 \int_{t_0}^{t} d\bar{t}$$
$$= a_0(t - t_0)$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Mit

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = v(t) - v_0$$

folgt das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz*:

$$v(t) - v_0 = a_0 (t - t_0)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0 (t - t_0)}$$

- Ortskoordinate:
  - Integration von $ds = v(t)dt$ ergibt:

$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} v(\bar{t})\, d\bar{t}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(v_0 + a_0 (\bar{t} - t_0) \right) d\bar{t}$$

$$= v_0 \int_{t_0}^{t} d\bar{t} + a_0 \int_{t_0}^{t} (\bar{t} - t_0)\, d\bar{t}$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Die Berechnung der Integrale führt auf:

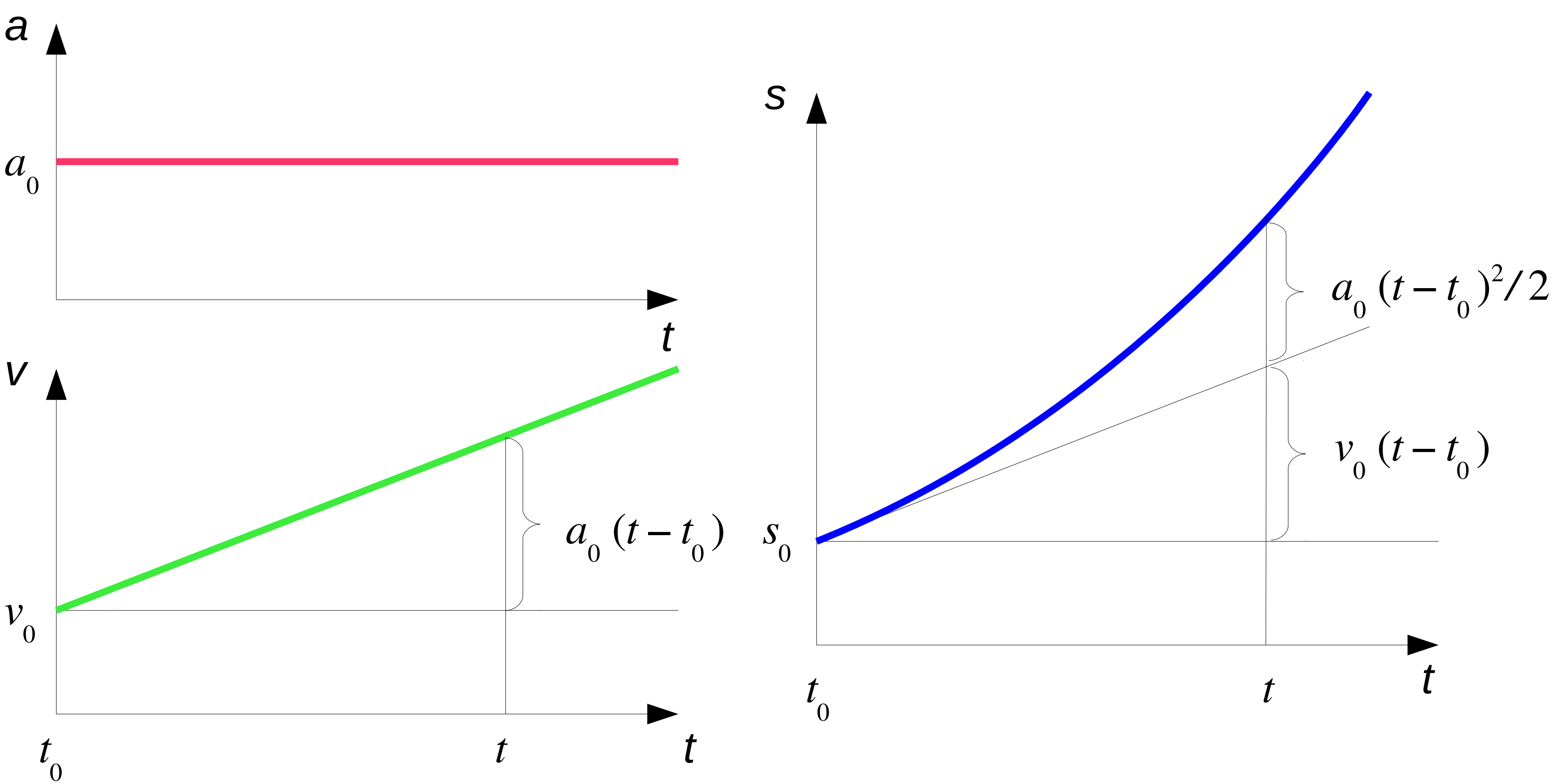
$$s(t)-s_0=v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$$

- Damit lautet das Ort-Zeit-Gesetz:

$$\boxed{s(t)=s_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2}$$

- Dabei ist s_0 die Ortskoordinate zum Zeitpunkt t_0 und v_0 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0.

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung



1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Bahngeschwindigkeit als Funktion des Orts:
  - Aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz folgt: $t-t_0=\dfrac{v-v_0}{a_0}$
  - Einsetzen in das Ort-Zeit-Gesetz führt auf

$$s-s_0=v_0\left(\frac{v-v_0}{a_0}\right)+\frac{a_0}{2}\left(\frac{v-v_0}{a_0}\right)^2=\left(\frac{v-v_0}{a_0}\right)\left(v_0+\frac{v-v_0}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{v-v_0}{a_0}\right)\left(\frac{v+v_0}{2}\right)=\frac{v^2-v_0^2}{2a_0}$$

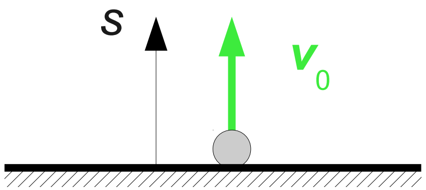
$$2a_0(s-s_0)=v^2-v_0^2 \rightarrow \boxed{v(s)=\pm\sqrt{v_0^2+2a_0(s-s_0)}}$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Beispiel: Senkrechter Wurf
  - Aufgabenstellung:
    - Ein Körper wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ von der Erdoberfläche mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 nach oben geworfen.
  - Gegeben:
    - Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$
    - Anfangsgeschwindigkeit: $v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$
  - Gesucht:
    - Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz
    - Ort-Zeit-Gesetz
    - Geschwindigkeit-Ort-Gesetz
    - Steigzeit T, Steighöhe H

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Wahl des Koordinatensystem:
  - Die Ortskoordinate s beginnt am Erdboden und ist nach oben positiv.
  - Die Zeit wird ab Abwurf des Körpers gemessen, d. h. $t_0 = 0$.
- Anfangsbedingungen:
  - $s(0) = s_0 = 0$
  - $v(0) = v_0$



- Die Beschleunigung ist gleich der Erdbeschleunigung. Sie wirkt entgegen der positiven Ortskoordinate:

$$a(t) = a_0 = -g$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz: $v(t) = v_0 - g\,t$
- Ort-Zeit-Gesetz: $s(t) = v_0\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2$
- Geschwindigkeit-Ort-Gesetz: $v(s) = \pm\sqrt{v_0^2 - 2\,g\,s}$
- Steigzeit:
  - Bei Erreichen des höchsten Punktes ist die Geschwindigkeit null:

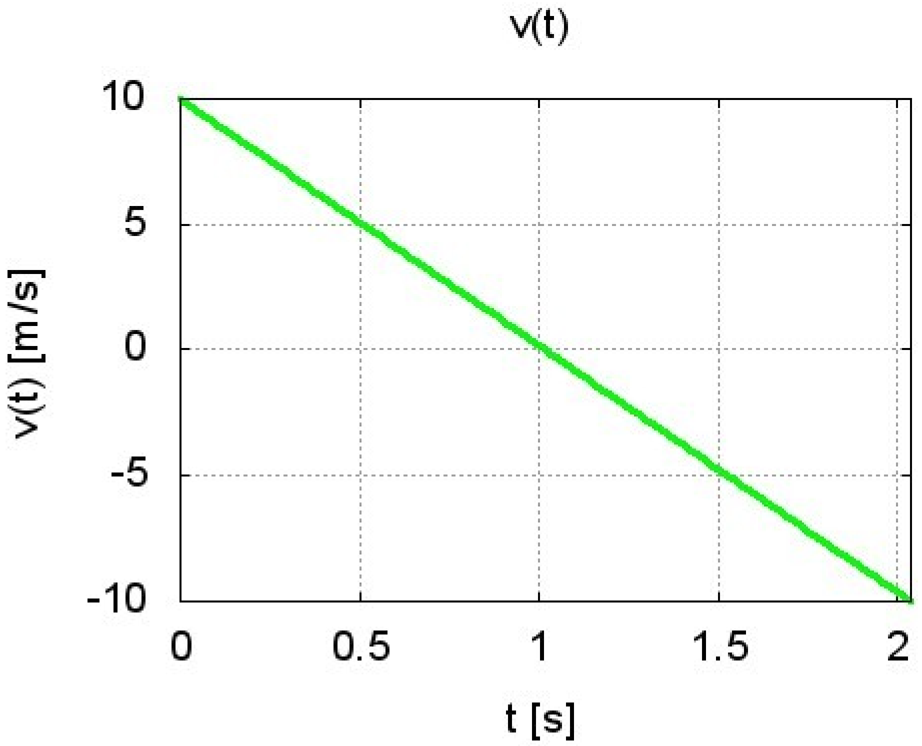
$$0 = v(T) = v_0 - g\,T \quad \rightarrow \quad T = \frac{v_0}{g}$$

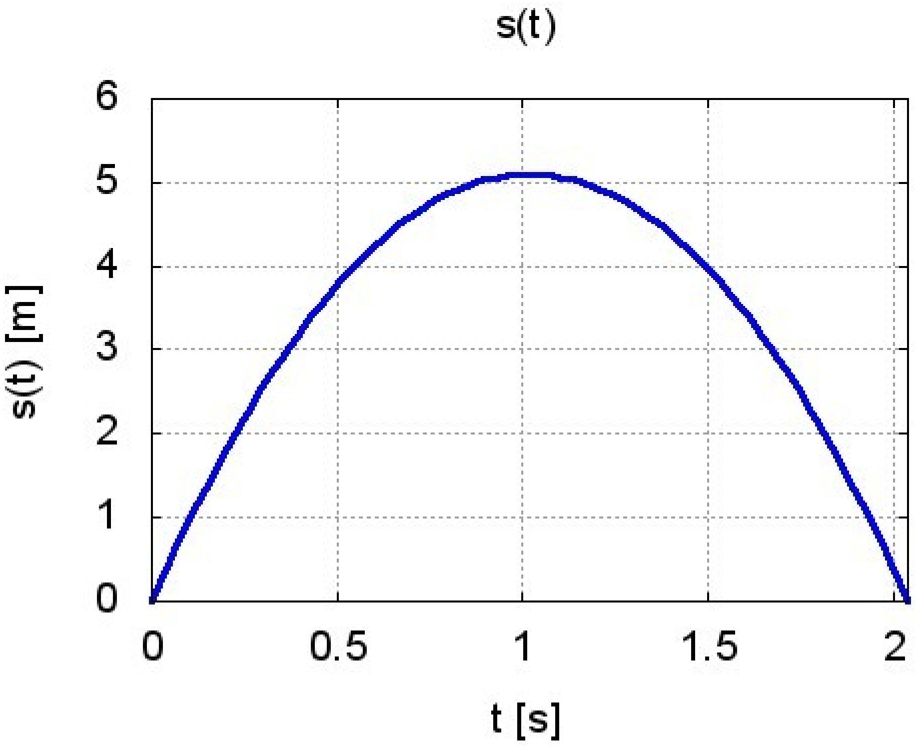
1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- Steighöhe: $$0 = v(H) = \sqrt{v_0^2 - 2\,g\,H} \;\rightarrow\; H = \frac{v_0^2}{2\,g}$$

- Zahlenwerte:
  - Steigzeit: $$T = \frac{10\,\mathrm{m/s}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{1{,}019\,\mathrm{s}}$$
  - Steighöhe: $$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2\,\mathrm{m^2/s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = \underline{5{,}097\,\mathrm{m}}$$

1.3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung





1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

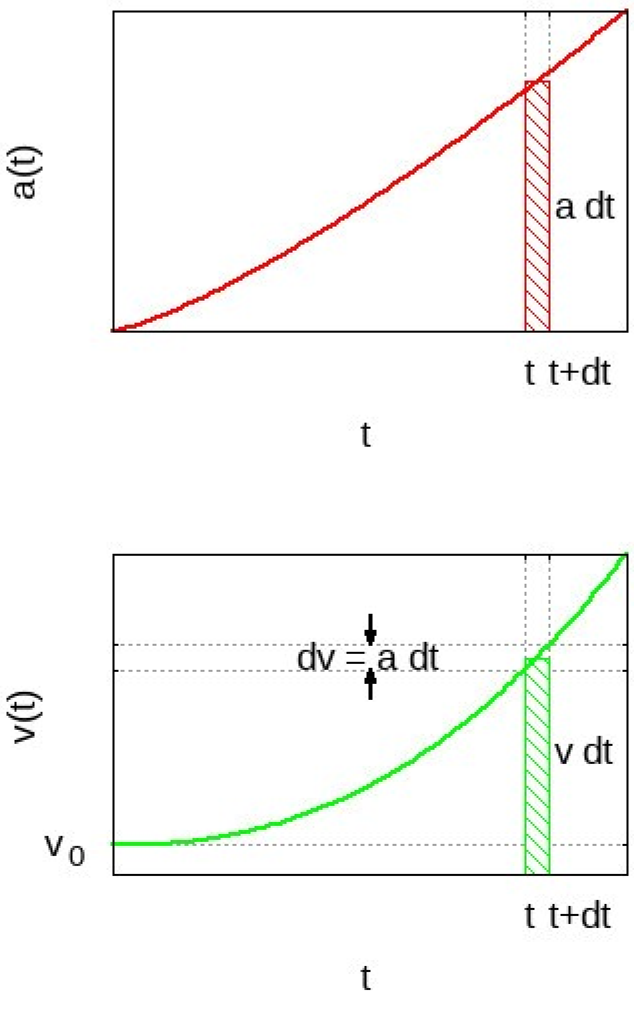
- Aufgabenstellung:
  - Gegeben:
    - allgemeine zeitabhängige Beschleunigung $a(t)$
    - Anfangsbedingungen: $v(t_0) = v_0$, $s(t_0) = s_0$
  - Gesucht:
    - Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz
    - Ort-Zeit-Gesetz

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:
  - Integration von $dv = a(t)dt$ ergibt:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a(\bar{t})\, d\bar{t}$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\bar{t})\, d\bar{t}}$$

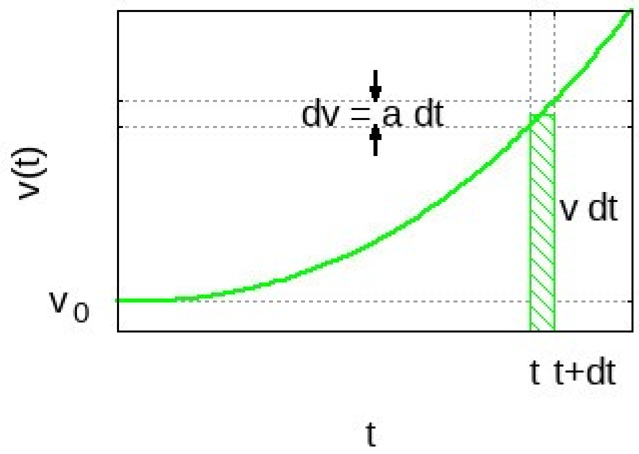


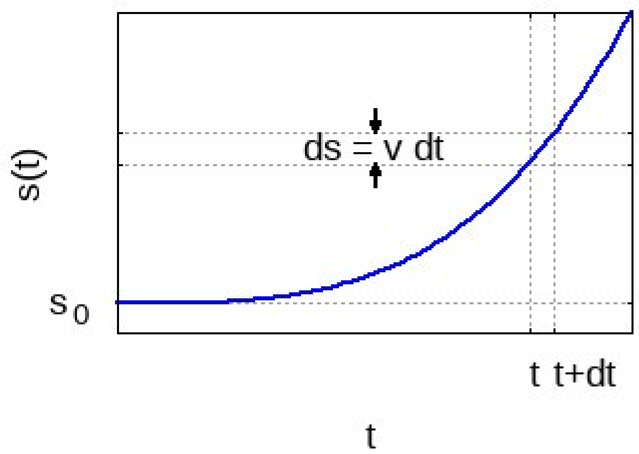
1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Ort-Zeit-Gesetz:
  - Integration von $ds = v(t)dt$ ergibt:

$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_{t_0}^{t} v(\bar{t})\,d\bar{t}$$

$$\boxed{s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\bar{t})\,d\bar{t}}$$





1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Beispiel:
  - Ein Fahrzeug hat zum Zeitpunkt $t_1 = 0\ \mathrm{s}$ die Geschwindigkeit $v_1 = 50\ \mathrm{km/h}$.
  - Vom Zeitpunkt t_1 bis zum Zeitpunkt $t_2 = 7\ \mathrm{s}$ erfährt es die Beschleunigung

$$a(t) = a_0 \sin\left(\pi \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right), \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

  - Zum Zeitpunkt t_2 erreicht es die Geschwindigkeit $v_2 = 100\ \mathrm{km/h}$.

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Gesucht ist das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und das Ort-Zeit-Gesetz während der Beschleunigung, der Wert der Konstanten a_0 sowie der während der Beschleunigung zurückgelegte Weg s_{12}.
- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:

$$v(t)=v_1+\int_{t_1}^{t} a_0 \sin\left(\pi \frac{\bar{t}-t_1}{t_2-t_1}\right) d\bar{t}=v_1+a_0\left[-\frac{t_2-t_1}{\pi}\cos\left(\pi \frac{\bar{t}-t_1}{t_2-t_1}\right)\right]_{\bar{t}=t_1}^{\bar{t}=t}$$

$$=v_1+a_0 \frac{t_2-t_1}{\pi}\left(1-\cos\left(\pi \frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)\right)$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Ort-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = s_1 + v_1(t - t_1) + a_0 \frac{t_2 - t_1}{\pi} \int_{t_1}^{t} \left(1 - \cos\left(\pi \frac{\bar{t} - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right) d\bar{t}$$

$$= s_1 + v_1(t - t_1) + a_0 \frac{t_2 - t_1}{\pi} \left(t - t_1 - \left[\frac{t_2 - t_1}{\pi} \sin\left(\pi \frac{\bar{t} - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right]_{\bar{t} = t_1}^{\bar{t} = t} \right)$$

$$= s_1 + v_1(t - t_1) + \frac{a_0}{\pi}(t_2 - t_1)(t - t_1) - a_0 \left(\frac{t_2 - t_1}{\pi}\right)^2 \sin\left(\pi \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Wert der Konstanten a_0:

$$v_2 = v(t_2) = v_1 + a_0 \frac{t_2 - t_1}{\pi}\left(1 - \cos\left(\pi \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1}\right)\right) = v_1 + 2\,a_0 \frac{t_2 - t_1}{\pi}$$

$$\rightarrow \quad a_0 = \frac{\pi(v_2 - v_1)}{2(t_2 - t_1)}$$

- Zurückgelegter Weg s_{12}:

$$s_{12} = s(t_2) - s_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{a_0}{\pi}(t_2 - t_1)^2 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{v_2 - v_1}{2}(t_2 - t_1)$$

$$= \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1)$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Zahlenwerte:
  - Geschwindigkeiten:

$$v_1 = 50\,\mathrm{km/h} = 13{,}89\,\mathrm{m/s}, \quad v_2 = 100\,\mathrm{km/h} = 27{,}78\,\mathrm{m/s}$$

  - Konstante a_0:

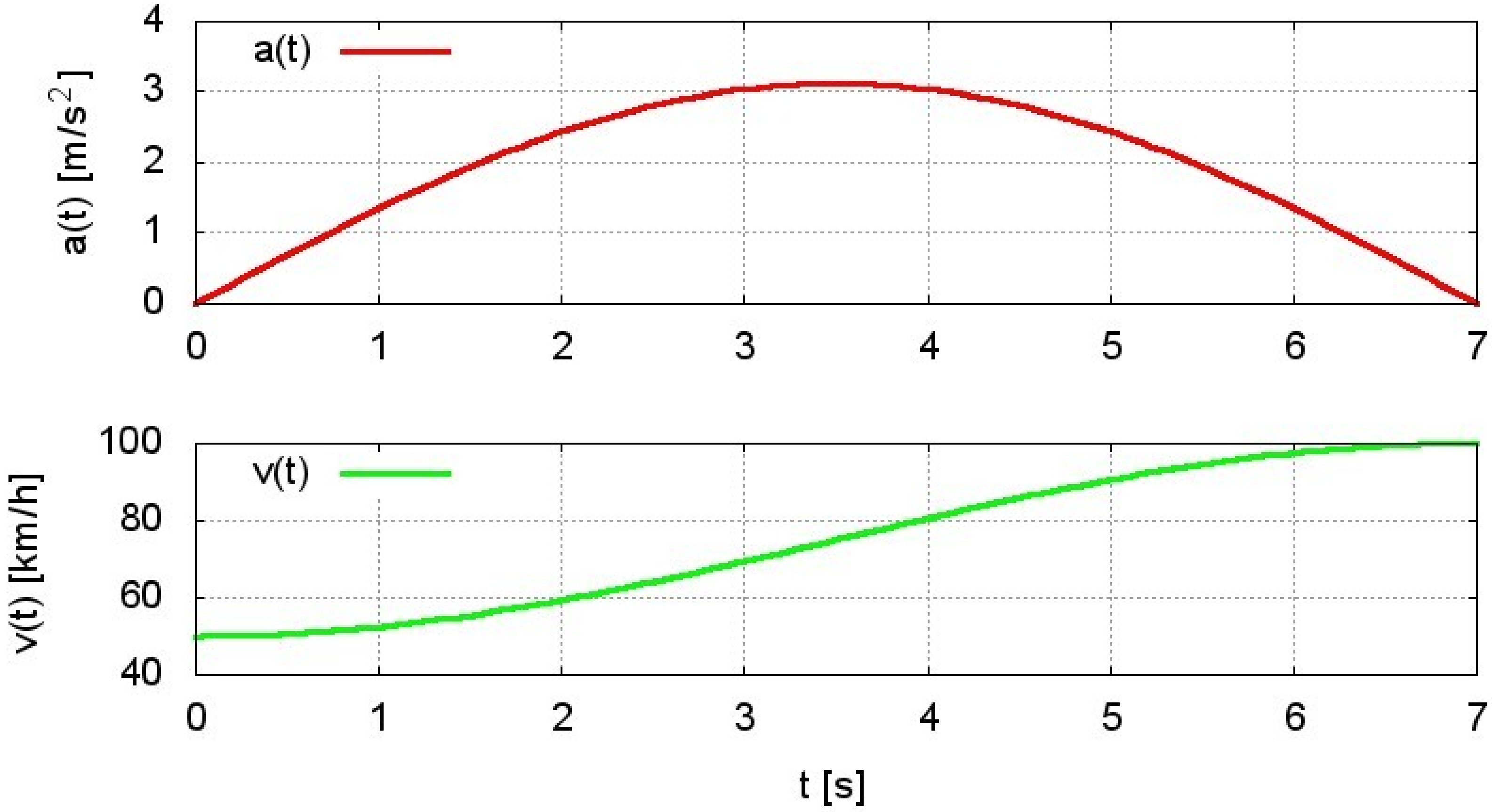
$$a_0 = \frac{\pi}{2}\,\frac{27{,}78\,\mathrm{m/s} - 13{,}89\,\mathrm{m/s}}{7\,\mathrm{s}} = \underline{3{,}117\,\mathrm{m/s^2}}$$

  - Zurückgelegter Weg s_{12}:

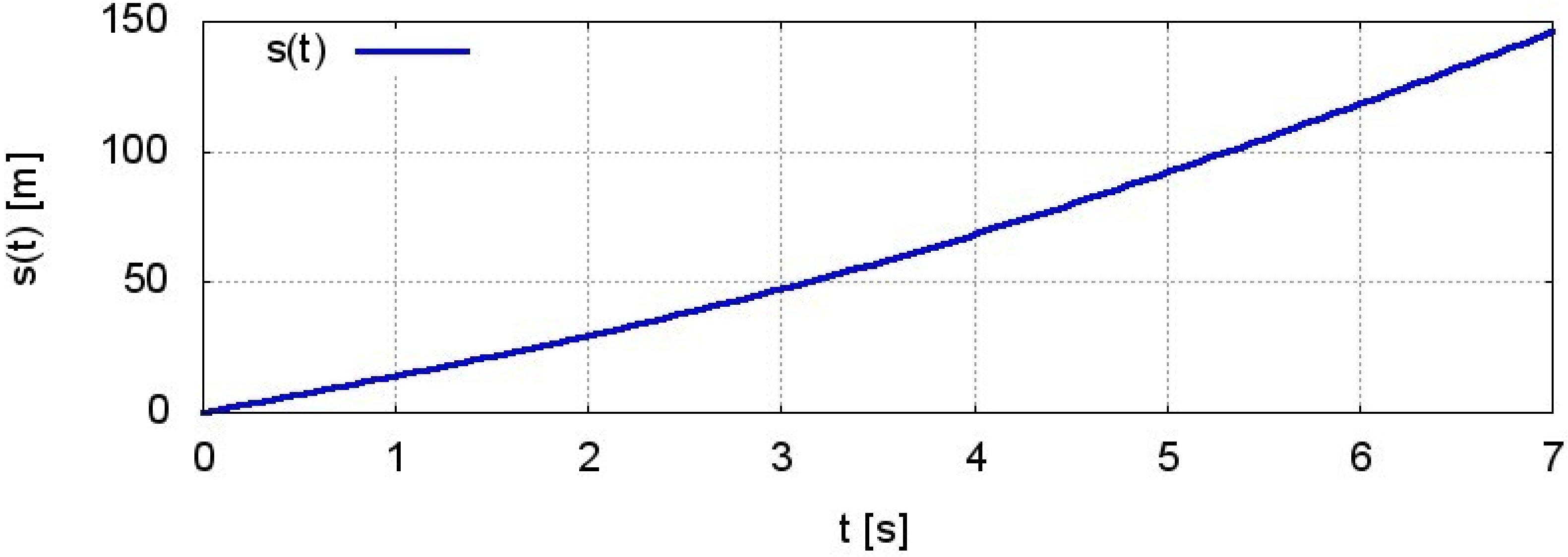
$$s_{12} = \frac{1}{2}\left(13{,}89\,\mathrm{m/s} + 27{,}78\,\mathrm{m/s}\right)\cdot 7\,\mathrm{s} = \underline{145{,}8\,\mathrm{m}}$$

1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung

- Diagramme:



1.4 Allgemeine beschleunigte Bewegung



1.1 – 1.4 Zusammenfassung

$s(t)$	Allgemein: $s(t)=s_0+\int_{t_0}^{t} v(\bar{t})\,d\bar{t}$ $a=a_0=const.$: $s(t)=s_0+v_0(t-t_0)+\frac{1}{2}a_0(t-t_0)^2$ $a=0$: $s(t)=s_0+v_0(t-t_0)$	
$v(t)$	Allgemein: $v(t)=v_0+\int_{t_0}^{t} a(\bar{t})\,d\bar{t}$ $a=a_0=const.$: $v(t)=v_0+a_0(t-t_0)$ $a=0$: $v(t)=v_0=const.$	$v(t)=\dot{s}(t)$
$a(t)$		$a(t)=\dot{v}(t)=\ddot{s}(t)$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Aufgabenstellung:
  - Gegeben:
    - Ortsabhängige Geschwindigkeit $v(s)$
    - Anfangsbedingung: $s(t_0) = s_0$
  - Gesucht:
    - Bahnbeschleunigung
    - Ort-Zeit-Gesetz

- Bahnbeschleunigung:
  - Nach der Kettenregel gilt:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}v$$

$$\longrightarrow \boxed{a(s)=v(s)\frac{dv}{ds}(s)}$$

  - Mit der Produktregel folgt:

$$\boxed{a(s)=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(v^2(s)\right)}$$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Ort-Zeit-Gesetz:
  - Aus der Definition der Bahngeschwindigkeit folgt durch Trennung der Variablen:

$$\frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})} = dt$$

  - Integration von t_0 bis t ergibt:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})} = \int_{t_0}^{t(s)} dt = t(s) - t_0$$

  - Damit lautet das Zeit-Ort-Gesetz:

$$\boxed{t(s) = t_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}}$$

  - Für das Ort-Zeit-Gesetz $s(t)$ muss nach s aufgelöst werden.
  - Aus dem Ort-Zeit-Gesetz folgt das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz durch Ableiten nach der Zeit.

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Beispiel:
  - Gegeben:
    - Bahngeschwindigkeit:

      $$v(s)=\sqrt{2\,a_0\,s}$$

    - Anfangsbedingung:

      $$t_0=0,\quad s(t_0)=0$$

  - Gesucht:
    - Bahnbeschleunigung
    - Ort-Zeit-Gesetz

  - Bahnbeschleunigung:
    - Entweder

      $$a(s)=v\frac{dv}{ds}$$

      $$=\sqrt{2\,a_0\,s}\,\frac{a_0}{\sqrt{2\,a_0\,s}}=a_0$$

      oder einfacher:

      $$v^2(s)=2\,a_0\,s$$

      $$\rightarrow\quad a(s)=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}=a_0$$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Ort-Zeit-Gesetz:

$$t(s) = \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\sqrt{2 a_0 \bar{s}}} = \left[\frac{\sqrt{2 a_0 \bar{s}}}{a_0} \right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=s} = \frac{\sqrt{2 a_0 s}}{a_0} = \sqrt{\frac{2 s}{a_0}}$$

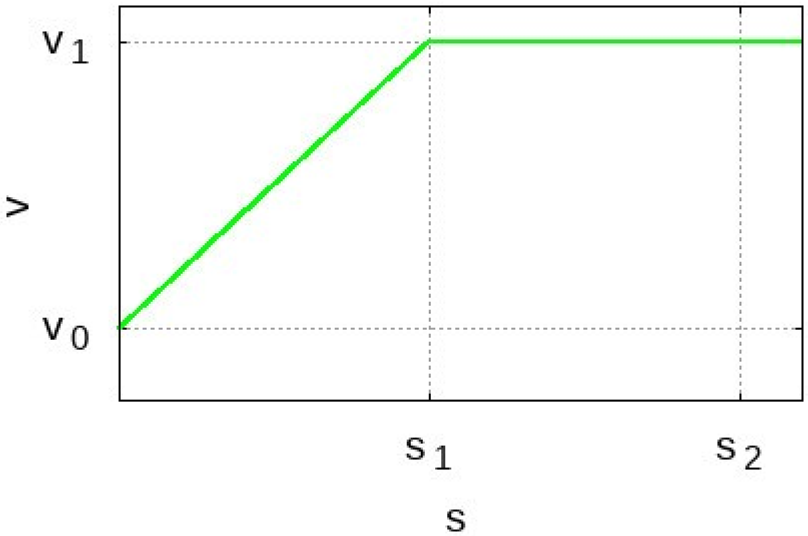
$$t^2 = \frac{2 s}{a_0} \quad \rightarrow \quad s(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}(t) = a_0 t \quad \text{oder} \quad v(t) = v(s(t)) = \sqrt{2 a_0 \cdot \frac{1}{2} a_0 t^2} = a_0 t$$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Beispiel:
  - Die Fahrt eines Motorrades wird durch das folgende *v*-*s*-Diagramm beschrieben:



- Gegeben:
  - $t_0 = 0\ \mathrm{s}$
  - $v_0 = 3\ \mathrm{m/s}$, $v_1 = 15\ \mathrm{m/s}$
  - $s_0 = 0\ \mathrm{m}$, $s_1 = 60\ \mathrm{m}$, $s_2 = 120\ \mathrm{m}$
- Gesucht:
  - *a*-*s*-Diagramm
  - Zeiten t_1 und t_2, bei denen das Motorrad die Wege s_1 bzw. s_2 zurückgelegt hat

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Wegabschnitt 1: $0 < s < s_1$
  - Funktionsgleichung für die Geschwindigkeit:

$$v(s) = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{s_1} s = v_0 + k\,s \quad \text{mit} \quad k = \frac{v_1 - v_0}{s_1}$$

  - Beschleunigung: $a(s) = v(s)\dfrac{dv}{ds}(s) = (v_0 + k\,s) \cdot k = k\,v_0 + k^2 s$

  - Zeit:

$$t_1 = \int_0^{s_1} \frac{ds}{v_0 + k\,s} = \left[\frac{1}{k} \ln(v_0 + k\,s)\right]_{s=0}^{s=s_1} = \frac{1}{k}\left[\ln(v_0 + k\,s_1) - \ln(v_0)\right]$$

$$= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{v_0 + k\,s_1}{v_0}\right)$$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Zahlenwerte:

$$k=\frac{v_1-v_0}{s_1}=\frac{15\,\mathrm{m/s}-3\,\mathrm{m/s}}{60\,\mathrm{m}}=\frac{1}{5}\,\frac{1}{\mathrm{s}}=0{,}2\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$a\left(s_0\right)=0{,}2\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 3\,\mathrm{m/s}=0{,}6\,\mathrm{m/s}^2$$

$$a\left(s_1\right)=0{,}6\,\mathrm{m/s}^2+0{,}2^2\,\mathrm{s}^{-2}\cdot 60\,\mathrm{m}=3\,\mathrm{m/s}^2$$

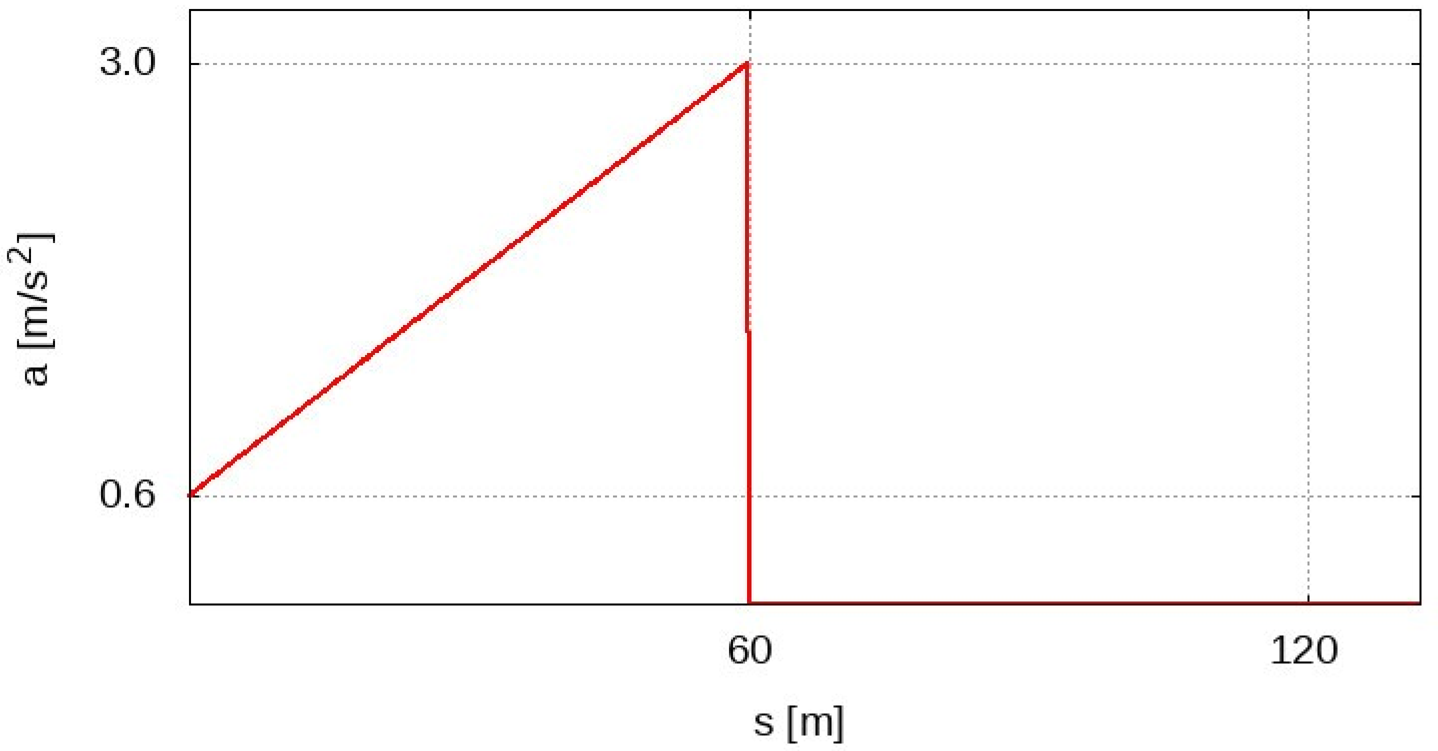
$$t_1=5\,\mathrm{s}\cdot\ln\left(\frac{3\,\mathrm{m/s}+0{,}2\,\mathrm{s}^{-1}\cdot 60\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{m/s}}\right)=5\,\mathrm{s}\cdot\ln\left(5\right)=\underline{8{,}05\,\mathrm{s}}$$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- Wegabschnitt 2: $s_1 < s < s_2$
  - Die Geschwindigkeit ist konstant: $v(s) = v_1$
  - Beschleunigung: $a(s) = v_1 \dfrac{d}{ds}(v_1) = 0$
  - Zeit: $t_2 = t_1 + \displaystyle\int_{s_1}^{s_2} \dfrac{ds}{v_1} = t_1 + \dfrac{1}{v_1} \int_{s_1}^{s_2} ds = t_1 + \dfrac{1}{v_1}(s_2 - s_1)$
  - Zahlenwert: $t_2 = 8{,}05\,\mathrm{s} + \dfrac{120\,\mathrm{m} - 60\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{m/s}} = 8{,}05\,\mathrm{s} + 4\,\mathrm{s} = \underline{12{,}05\,\mathrm{s}}$

1.5 Ortsabhängige Geschwindigkeit

- *a*-*s*-Diagramm:



1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Aufgabenstellung:
  - Gegeben:
    - Ortsabhängige Beschleunigung $a(s)$
    - Anfangsbedingungen: $v(t_0) = v_0$, $s(t_0) = s_0$
  - Gesucht:
    - Bahngeschwindigkeit

- Bahngeschwindigkeit:
  - Aus $a(s) = v\, dv/ds$

    folgt durch Trennung der Variablen: $a(\bar{s})\, d\bar{s} = v\, dv$
  - Integration von s_0 bis s ergibt:

$$\int_{s_0}^{s} a(\bar{s})\, d\bar{s} = \int_{v_0}^{v(s)} v\, dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(v^2(s) - v_0^2\right)$$

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Daraus folgt:

$$\boxed{v(s) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} a(\bar{s})\,d\bar{s}}}$$

- Damit ist die Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Ort bekannt. Zur Berechnung der übrigen Gesetze können die Formeln aus Abschnitt 1.5 verwendet werden.

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Beispiel:
  - Wird ein Körper aus seiner Gleichgewichtslage ausgelenkt, so tritt in vielen Fällen eine zur Auslenkung proportionale Beschleunigung auf, die entgegen der Auslenkung gerichtet ist:

$$a(s) = -\omega^2 s$$

  - Anfangsbedingungen:
    - $t_0 = 0,\ s(t_0) = s_0\ ,\ v(t_0) = 0$
  - Gesucht:
    - Geschwindigkeit-Ort-Gesetz
    - Ort-Zeit-Gesetz

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Geschwindigkeit als Funktion des Orts:

$$v(s)=\pm\sqrt{2\int_{s_0}^{s}\left(-\omega^2\bar{s}\right)d\bar{s}}=\pm\omega\sqrt{2\left[\frac{-\bar{s}^2}{2}\right]_{\bar{s}=s_0}^{\bar{s}=s}}=\pm\omega\sqrt{s_0^2-s^2}$$

  - Das Geschwindigkeit-Ort-Diagramm wird als *Phasenkurve* bezeichnet.

- Ort als Funktion der Zeit:

  - Integration: $$t(s)=\int_{s_0}^{s}\frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}=\pm\int_{s_0}^{s}\frac{1}{\omega}\frac{d\bar{s}}{\sqrt{s_0^2-\bar{s}^2}}=\pm\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{\bar{s}}{s_0}\right)\right]_{\bar{s}=s_0}^{\bar{s}=s}$$

$$=\pm\frac{1}{\omega}\left(\arcsin\left(\frac{s}{s_0}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$$

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung

- Auflösen nach $s(t)$:

$$\frac{\pi}{2} \pm \omega t = \arcsin\left(\frac{s(t)}{s_0}\right) \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \omega t\right) = \cos(\omega t) = \frac{s(t)}{s_0}$$

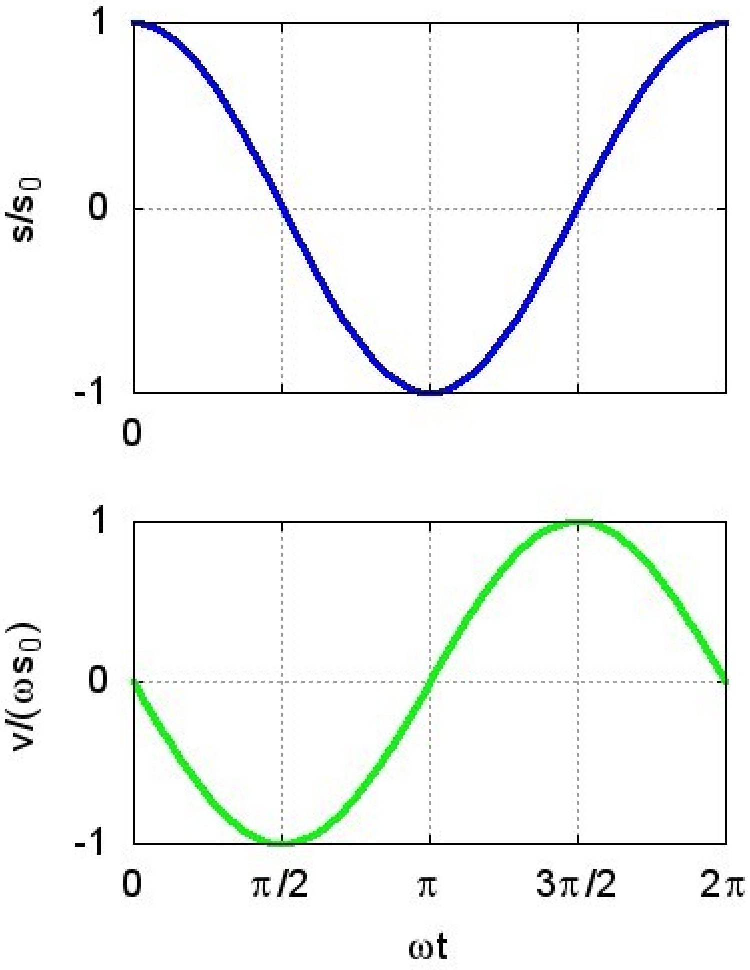
- Ergebnis: $s(t) = s_0 \cos(\omega t), \quad v(t) = \dot{s}(t) = -\omega s_0 \sin(\omega t)$

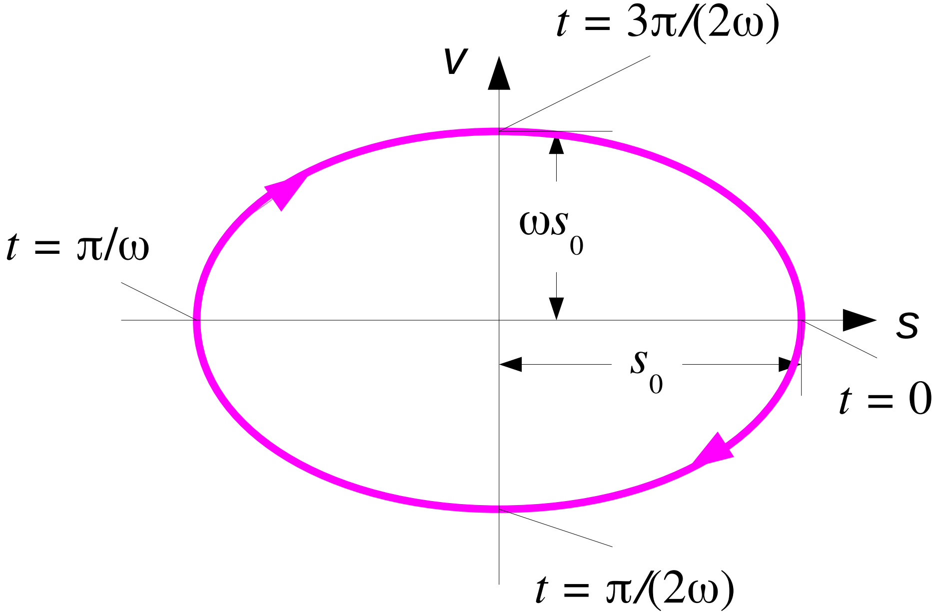
– Untersuchung der Phasenkurve:

$$v^2 = \omega^2 \left(s_0^2 - s^2\right) \rightarrow \frac{v^2}{\omega^2} = s_0^2 - s^2 \rightarrow \frac{v^2}{\omega^2} + s^2 = s_0^2 \Rightarrow \frac{v^2}{(\omega s_0)^2} + \frac{s^2}{s_0^2} = 1$$

- Das ist eine Ellipse mit den Halbachsen s_0 und ωs_0 .

1.6 Ortsabhängige Beschleunigung





1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Aufgabenstellung:
  - Gegeben:
    - Geschwindigkeitsab-hängige Beschleunigung $a(v)$
    - Anfangsbedingungen: $v(t_0) = v_0$, $s(t_0) = s_0$
  - Gesucht:
    - Bahngeschwindigkeit

- Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit:
  - Aus $a(v) = dv/dt$

    folgt durch Trennung der Variablen: $d\bar{v}/a(\bar{v}) = dt$
  - Integration von t_0 bis t ergibt:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})} = \int_{t_0}^{t(v)} dt = t(v) - t_0$$

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Daraus folgt:

$$\boxed{t(v) = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}}$$

- Für das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz muss nach der Geschwindigkeit aufgelöst werden.

- Bahngeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Ort:
  - Aus $a(v) = v\, dv/ds$

    folgt durch Trennung der Variablen: $\bar{v}\, d\bar{v}/a(\bar{v}) = ds$
  - Integration von v_0 bis v ergibt:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\bar{v}\, d\bar{v}}{a(\bar{v})} = \int_{s_0}^{s(v)} ds = s(v) - s_0$$

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Daraus folgt:

$$s(v) = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{\bar{v}\, d\bar{v}}{a(\bar{v})}$$

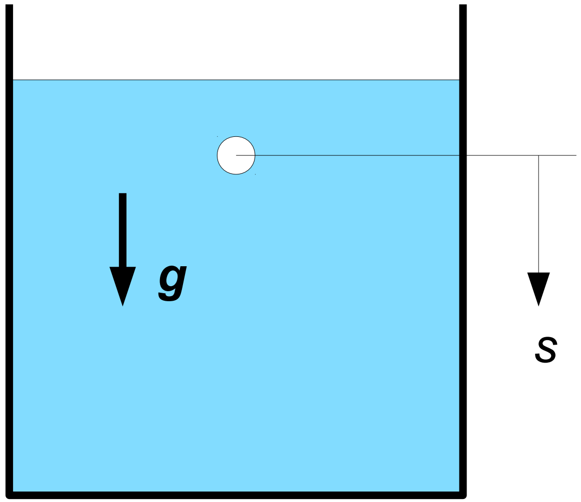
- Für das Geschwindigkeit-Ort-Gesetz muss nach der Geschwindigkeit aufgelöst werden.

- Beispiel:
  - Ein Körper, der in einer zähen Flüssigkeit fällt, wird durch die Erdbeschleunigung beschleunigt und durch eine geschwindigkeitsproportionale Verzögerung gebremst.
  - Gesucht: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und Ort-Zeit-Gesetz, wenn der Körper aus der Ruhe fallen gelassen wird.

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Wahl des Koordinatensystems:
  - Die Ortskoordinate *s* beginnt am Ausgangspunkt des Körpers und ist nach unten positiv.
  - Die Zeit wird ab Loslassen des Körpers gemessen.
  - Damit lauten die Anfangsbedingungen:

$$t_0=0,\quad s(t_0)=s_0=0,\quad v(t_0)=v_0=0$$



- Für die Beschleunigung gilt: $a(v)=g-k\,v$

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:
  - Zeit in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit:

$$t(v)=\int_0^v \frac{d\bar{v}}{g-k\bar{v}}=\left[-\frac{1}{k}\ln(g-k\bar{v})\right]_{\bar{v}=0}^{\bar{v}=v}=-\frac{1}{k}\left[\ln(g-kv)-\ln(g)\right]$$

  - Auflösen nach der Geschwindigkeit:

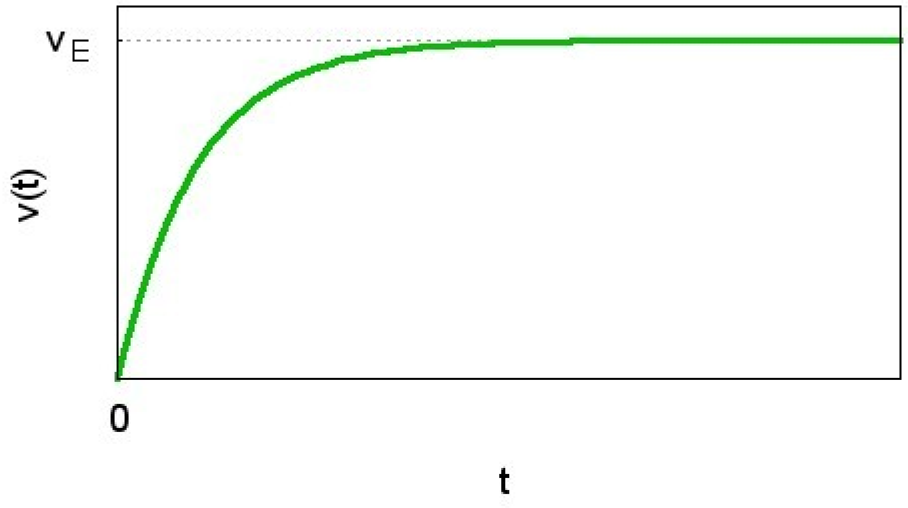
$$-kt=\ln\left(\frac{g-kv(t)}{g}\right)=\ln\left(1-\frac{kv(t)}{g}\right)$$

$$\rightarrow \quad e^{-kt}=1-\frac{kv(t)}{g} \quad \rightarrow \quad \frac{kv(t)}{g}=1-e^{-kt}$$

$$\rightarrow \quad v(t)=\frac{g}{k}\left(1-e^{-kt}\right)=v_E\left(1-e^{-kt}\right)$$

1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Für $t \to \infty$ strebt die Geschwindigkeit asymptotisch gegen die Endfallgeschwindigkeit $v_E = g/k$.



1.7 Geschwindigkeitsabhängige Beschleunigung

- Ort-Zeit-Gesetz:
  - Integration des Geschwindigkeit-Zeit-Gesetzes:

$$s(t) = \int_0^t v(\bar{t})\,d\bar{t} = v_E \int_0^t \left(1 - e^{-k\bar{t}}\right) d\bar{t} = v_E \left[\bar{t} + \frac{1}{k} e^{-k\bar{t}}\right]_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=t}$$

$$= v_E\, t - \frac{v_E}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$