3. Kreisbewegung

- Ein wichtiger technischer Sonderfall ist die Bewegung auf einer Kreisbahn.
- Dabei hat der Punkt zu jedem Zeitpunkt den gleichen Abstand vom Kreismittelpunkt.
- Wenn sich ein starrer Körper um eine feste Achse dreht, bewegen sich seine Punkte auf Kreisbahnen.

Beispiele:

- Punkte auf einem Rad
- Zahnräder im Getriebe
- Turbinenschaufeln
- Hubschrauberrotor
- Drehkran

3. Kreisbewegung

- 3.1 Kreisbewegung als eindimensionale Bewegung
- 3.2 Kreisbewegung als räumliche Bewegung
- 3.3 Gleichförmige Kreisbewegung
- 3.4 Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

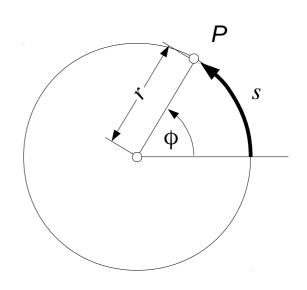
- Die Kreisbewegung kann als Bewegung auf einer gegebenen Kreisbahn betrachtet werden.
- Bei einer Bewegung auf einer Kreisbahn kann als Ortskoordinate anstelle der Bogenlänge auch der Winkel gewählt werden.
- Die Wahl des Winkels als Ortskoordinate führt auf die Begriffe der Winkelgeschwindigkeit und der Winkelbeschleunigung.

- Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit:
 - Für den auf der Kreisbahn zurückgelegten Weg gilt:

$$s(t) = r \phi(t)$$

- Dabei muss der Winkel im Bogenmaß angegeben werden.
- Die Bahngeschwindigkeit berechnet sich zu

$$v(t) = \frac{ds}{dt}(t) = \dot{s}(t) = r \dot{\phi}(t)$$



- Die zeitliche Ableitung des Winkels wird als *Winkelge-schwindigkeit* bezeichnet:

$$\omega(t) = \dot{\phi}(t)$$

Zwischen Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit besteht die Beziehung

$$v(t) = \omega(t)r$$

- Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ist 1 pro Zeiteinheit.
- Geläufige Einheiten: $\frac{1}{s} = \frac{60}{\min}$, $\frac{1}{\min} = \frac{1}{60} \frac{1}{s}$

- Bahnbeschleunigung und Winkelbeschleunigung:
 - Die Bahnbeschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Bahngeschwindigkeit:

$$a_t(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = r \ddot{\phi}(t)$$

- Die zeitliche Ableitung der Winkelgeschwindigkeit wird als Winkelbeschleunigung bezeichnet:

$$\dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

 Zwischen Bahnbeschleunigung und Winkelbeschleunigung besteht die Beziehung

$$a_t(t) = r \dot{\omega}(t)$$

- Die Einheit der Winkelbeschleunigung ist 1 pro Zeit zum Quadrat.
- Eine gängige Einheit ist 1/s².
- Starre rotierende Scheibe:
 - Auf einer starren rotierenden Scheibe haben alle Punkte die gleiche Winkelgeschwindigkeit und die gleiche Winkelbeschleunigung.
 - Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung sind für Punkte mit unterschiedlichem Radius verschieden.

- Bei der Betrachtung der Kreisbewegung als räumliche Bewegung kann neben der Bahnbeschleunigung auch die Normalbeschleunigung ermittelt werden.
- Für die Untersuchung der Bewegung wird ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt.
- Das Koordinatensystem kann so gewählt werden, dass die Bewegung in der *xy*-Ebene stattfindet.

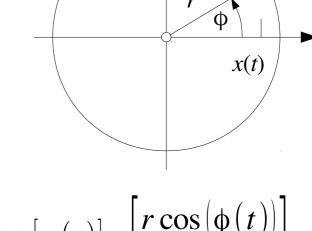
Ortsvektor:

 Für die Ortskoordinaten eines Punktes auf der Kreisbahn gilt:

$$x(t) = r \cos(\phi(t))$$

$$y(t) = r \sin(\phi(t))$$

 Die Ortskoordinaten sind die Komponenten des Ortsvektors:



y(*t*)

$$r(t) = r\cos(\phi(t))e_x + r\sin(\phi(t))e_y$$
 oder $[r(t)] = \begin{bmatrix} r\cos(\phi(t)) \\ r\sin(\phi(t)) \end{bmatrix}$

Für den Betrag gilt:

$$|r(t)| = \sqrt{r^2 \sin^2 \phi(t) + r^2 \cos^2 \phi(t)} = r \sqrt{\sin^2 \phi(t) + \cos^2 \phi(t)} = r$$

- Geschwindigkeitsvektor:
 - Die zeitliche Ableitung des Ortsvektors ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{\mathbf{r}}(t) = -r\sin(\phi(t))\dot{\phi}(t)\mathbf{e}_x + r\cos(\phi(t))\dot{\phi}(t)\mathbf{e}_y \\ &= \omega(t)[-y(t)\mathbf{e}_x + x(t)\mathbf{e}_y] \end{aligned}$$

$$[v(t)] = r\dot{\phi}(t) \begin{bmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} = \omega(t) \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix}$$

- Mit der Bahngeschwindigkeit $v(t) = \omega(t)r$ gilt auch:

$$v(t) = v(t) \left(-\sin(\phi(t))e_x + \cos(\phi(t))e_y\right)$$

$$[v(t)] = v(t) \begin{bmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{bmatrix}$$

- Für den Einheitstangentenvektor gilt:

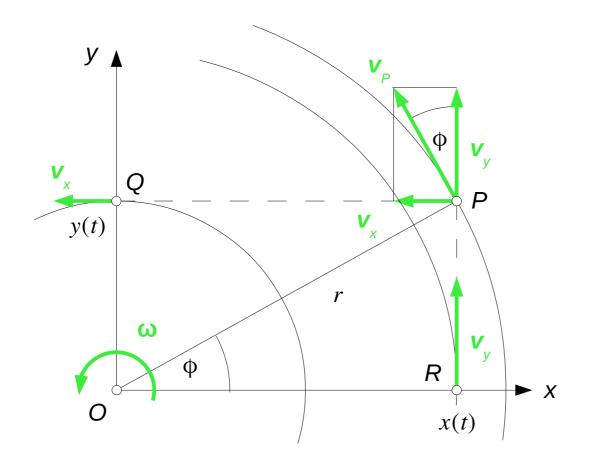
$$e_t(t) = \frac{v(t)}{v(t)} = -\sin(\phi(t))e_x + \cos(\phi(t))e_y$$

$$[\mathbf{e}_{t}(t)] = \begin{bmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{bmatrix}$$

Er steht senkrecht auf dem Ortsvektor:

$$r(t) \cdot e_t(t) = r[-\cos(\phi(t))\sin(\phi(t)) + \sin(\phi(t))\cos(\phi(t))] = 0$$

$$[\mathbf{r}(t)]^{T}[\mathbf{e}_{t}(t)] = r[\cos(\phi(t)) \quad \sin(\phi(t))] \begin{bmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} = 0$$



$$v_{P} = \omega r$$

$$v_{x} = -v_{P} \sin(\phi)$$

$$= -\omega r \sin(\phi)$$

$$= -\omega y$$

$$= v_{Q}$$

$$v_{y} = v_{P} \cos(\phi)$$

$$= \omega r \cos(\phi)$$

$$= \omega x$$

$$= v_{R}$$

- Beispiel:

- Der Punkt P bewegt sich auf einer Kreisbahn. Zum Zeitpunkt t hat er die Koordinaten x = 4 cm und y = 3 cm und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 5$ s⁻¹.
- Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors sind:

$$v_x = -0.03 \,\mathrm{m} \cdot 5 \,\frac{1}{\mathrm{s}} = -0.15 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \ v_y = 0.04 \,\mathrm{m} \cdot 5 \,\frac{1}{\mathrm{s}} = 0.20 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

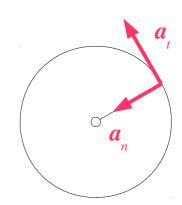
Für die Bahngeschwindigkeit folgt:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0.15^2 + 0.20^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

• Der Radius der Kreisbahn ist: $r = \sqrt{4^2 + 3^2}$ cm = 5 cm

- Beschleunigungsvektor:
 - Die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsvektors führt auf

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(t) &= \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d}{dt} \big(\boldsymbol{v}(t) \boldsymbol{e}_t(t) \big) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) \boldsymbol{e}_t(t) + \boldsymbol{v}(t) \dot{\boldsymbol{e}}_t(t) \\ &= \boldsymbol{a}_t(t) + \boldsymbol{v}(t) \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \big(-\cos(\boldsymbol{\phi}(t)) \boldsymbol{e}_x - \sin(\boldsymbol{\phi}(t)) \boldsymbol{e}_y \big) \\ &= \boldsymbol{a}_t(t) - \dot{\boldsymbol{\phi}}^2(t) r \big(\cos(\boldsymbol{\phi}(t)) \boldsymbol{e}_x + \sin(\boldsymbol{\phi}(t)) \boldsymbol{e}_y \big) \\ &= \boldsymbol{a}_t(t) - \omega^2(t) r(t) = \boldsymbol{a}_t(t) + \boldsymbol{a}_n(t) \end{aligned}$$



- Normalbeschleunigung: $a_n = -\omega^2 r$
 - Die Normalbeschleunigung a_n ist entgegen dem Ortsvektor r gerichtet. Sie wird daher als *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet.
 - Für den Betrag der Normalbeschleunigung gilt:

$$a_n = |\boldsymbol{a_n}| = \omega^2 r = \frac{v^2}{r^2} \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

- Bahnbeschleunigung: $a_t = \dot{v} e_t$
 - Für den Betrag der Bahnbeschleunigung gilt:

$$|a_t| = |a_t| = |\dot{v}| = r|\dot{\omega}| = r|\ddot{\phi}|$$

Für die Komponenten im kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$[\boldsymbol{a}_{n}(t)] = -\omega^{2}(t) \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{a}_{t}(t) \right] = \dot{\omega}(t) r \begin{bmatrix} -\sin(\phi(t)) \\ \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} = \dot{\omega}(t) \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{a}(t)] = \begin{bmatrix} -\dot{\omega}(t)y(t) - \omega^{2}(t)x(t) \\ \dot{\omega}(t)x(t) - \omega^{2}(t)y(t) \end{bmatrix}$$

- Beispiel:

- Der Punkt P bewegt sich auf einer Kreisbahn. Zum Zeitpunkt t hat er die Koordinaten x = 4 cm und y = 3 cm, die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 5$ s⁻¹ und die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = 10$ s⁻².
- Die Beschleunigungen berechnen sich zu

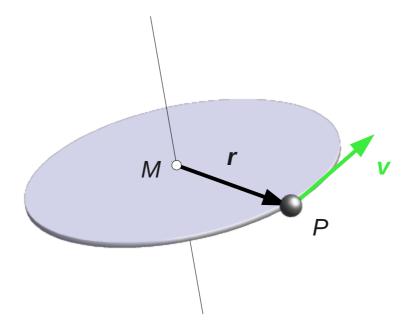
$$[a_n] = -25 \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.03 \end{bmatrix} m = -\begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.75 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$[a_t] = 10 \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} -0.03 \\ 0.04 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$[\boldsymbol{a}] = \begin{bmatrix} -1,30 \\ -0,35 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Drehachse:

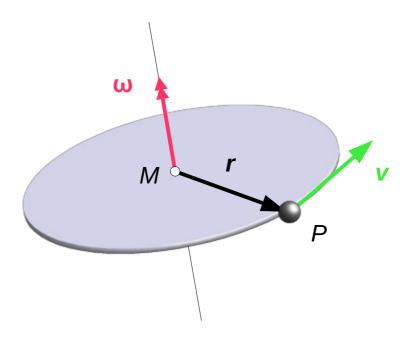
 Die Gerade, die senkrecht auf der Kreisebene steht und durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, wird als Drehachse bezeichnet.



- Vektor der Winkelgeschwindigkeit:
 - Der Betrag stimmt mit der Winkelgeschwindigkeit überein:

$$|\mathbf{\omega}| = |\mathbf{\omega}|$$

- Die Richtung stimmt mit der Drehachse überein.
- Die Orientierung wird durch die Rechthandregel festgelegt.



Dann gilt:

$$v = \omega \times r$$

- Nachweis:
 - Der Vektor $\omega \times r$ zeigt in Richtung von v.
 - Für den Betrag gilt:

$$|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}| = |\omega| r \sin(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}) = |\omega| r \sin(90^{\circ}) = |\omega| r = |v|$$

- Für den Beschleunigungsvektor folgt:

$$a = \dot{v} = \dot{\omega} \times r + \omega \times \dot{r} = \dot{\omega} \times r + \omega \times v = a_t + a_n$$

- Bahnbeschleunigung: $a_t = \dot{\omega} \times r$
- Zentripetalbeschleunigung: $a_n = \omega \times v = \omega \times (\omega \times r)$

Definition:

- Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist die Winkelgeschwindigkeit ω konstant: $\omega(t) = \omega_0 = const$.
- Überstrichener Winkel:
 - Der Punkt bewegt sich mit der konstanten Bahngeschwindigkeit $v_0 = \omega_0 r$ auf der Kreisbahn.
 - Für die Ortskoordinate gilt:

$$s(t) - s_0 = v_0(t - t_0) \rightarrow r(\phi(t) - \phi_0) = \omega_0 r(t - t_0)$$

- Daraus folgt für den Winkel:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0(t - t_0)$$

- Umlaufzeit und Drehzahl:
 - Während einer Umdrehung wird ein Winkel von 2π überstrichen.
 - Die dafür benötigte *Umlaufzeit T* berechnet sich aus

$$2\pi = \phi(t+T) - \phi(t) = \omega_0 T \rightarrow T = \frac{2}{\sigma}$$

- Die *Drehzahl n* gibt die Anzahl der Umdrehungen pro Zeit an:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

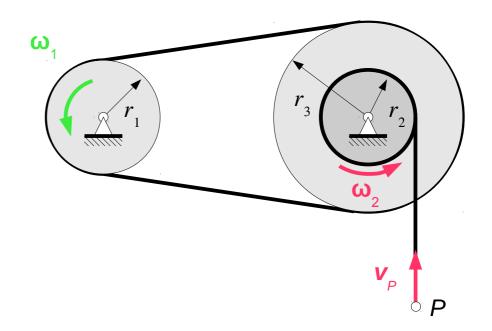
- Die Drehzahl wird in Umdrehungen pro Minute angegeben.
- Der Zusammenhang zwischen Drehzahl n in $1/\min$ und Winkelgeschwindigkeit in 1/s ist gegeben durch

$$\omega_0 = \frac{2\pi n}{60 \text{ s/min}} = \frac{\pi n}{30 \text{ s/min}}$$

- Geschwindigkeit und Beschleunigung:
 - Bahngeschwindigkeit: $v = \dot{s} = \omega_0 r = const$.
 - Zentripetalbeschleunigung: $a_n = \omega_0^2 r = \frac{v^2}{r} = const$.
 - Bahnbeschleunigung: $a_t = \dot{\omega} r = 0$

Beispiel:

- Die beiden Rollen sind durch einen dehnstarren Riemen verbunden.
- Punkt P hängt an einem dehnstarren Seil, das auf Rolle 2 aufgewickelt wird.
- Gesucht:
 - Winkelgeschwindigkeit ω_2 von Rolle 2 und Geschwindigkeit v_P von Punkt P



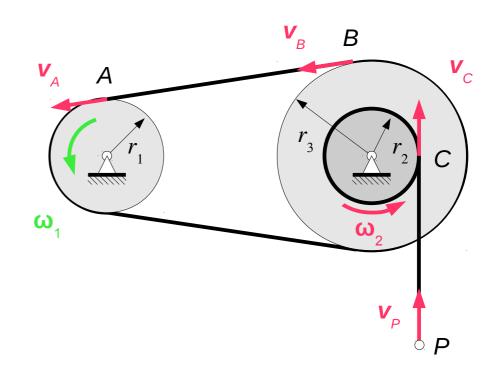
- Gegeben:
 - Winkelgeschwindigkeit ω_1 von Rolle 1

- Punkt A bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 auf einer Kreisbahn mit Radius r_1 . Daher gilt:

$$v_A = \omega_1 r_1$$

 Die Punkte A und B sind durch einen dehnstarren Riemen verbunden. Daher gilt:

$$v_B = v_A$$



- Punkt *B* bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 auf einer Kreisbahn mit Radius r_3 . Daher gilt:

$$v_A = v_B = \omega_2 r_3 \rightarrow \omega_1 r_1 = \omega_2 r_3 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_3}$$

- Punkt C bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2 auf einer Kreisbahn mit Radius r_2 . Daher gilt:

$$v_C = \omega_2 r_2 = \omega_1 \frac{r_1 r_2}{r_3}$$

 Punkt P ist über ein dehnstarres Seil mit Punkt C verbunden. Daher gilt:

$$v_P = v_C = \omega_1 \frac{r_1 r_2}{r_3}$$

Definition:

- Bei einer gleichmäßig beschleunigten Kreisbewegung ist die Winkelbeschleunigung konstant: $\dot{\omega}(t) = \dot{\omega}_0 = const$.
- Winkelgeschwindigkeit und Winkel:
 - Der Punkt führt auf der Kreisbahn eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der konstanten Bahnbeschleunigung

$$a_t = \dot{\omega}_0 r$$

aus.

- Für die Bahngeschwindigkeit gilt:

$$v(t) - v_0 = a_t(t - t_0) \rightarrow r(\omega(t) - \omega_0) = \dot{\omega}_0 r(t - t_0)$$

- Daraus folgt für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}_0(t - t_0)$$

- Für die Ortskoordinate gilt:

$$s(t) - s_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_t(t - t_0)^2$$

$$\rightarrow r(\phi(t) - \phi_0) = \omega_0 r(t - t_0) + \frac{1}{2}\dot{\omega}_0 r(t - t_0)^2$$

Daraus folgt für den Winkel:

$$\phi(t) = \phi_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \dot{\omega}_0 (t - t_0)^2$$

Beispiel:

- Ein Schwungrad (Durchmesser d = 60 cm) wird aus der Ruhelage gleichmäßig beschleunigt und hat nach $t_2 = 20 \text{ s}$ eine Drehzahl von $n = 1000 \text{ min}^{-1}$ erreicht.
- Gesucht:
 - Winkelbeschleunigung
 - Anzahl der Umdrehungen in der Zeit t₂
 - Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes auf dem Umfang zur Zeit $t_1 = 1$ s nach dem Anlaufen

- Anfangsbedingungen:
 - Die Zeit wird ab Beginn des Anlaufens gemessen: $t_0 = 0$
 - Der Winkel wird ab der Ruhelage gemessen: $\phi_0 = 0$
 - Die Bewegung startet aus der Ruhelage: $\omega_0 = 0$
- Winkelbeschleunigung:
 - Mit den gegebenen Anfangsbedingungen gilt:

$$\omega_2 = \omega(t_2) = \dot{\omega}_0 t_2 \rightarrow \dot{\omega}_0 = \frac{\omega_2}{t_2}$$

• Für die Winkelgeschwindigkeit gilt:

$$\omega_2 = \frac{n\pi}{30 \text{ s/min}} = 1000 \frac{\pi}{30} \frac{1}{\text{s}} = 104,7 \frac{1}{\text{s}}$$

Damit berechnet sich die Winkelbeschleunigung zu

$$\dot{\omega}_0 = \frac{104.7 \,\mathrm{s}^{-1}}{20 \,\mathrm{s}} = 5.235 \,\frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

- Anzahl der Umdrehungen:
 - Für den überstrichenen Winkel gilt: $\phi_2 = \phi(t_2) = \frac{1}{2}\dot{\omega}_0 t_2^2 = \frac{1}{2}\omega_2 t_2$
 - Zahlenwert: $\phi_2 = \frac{1}{2} \cdot 104, 7 \frac{1}{s} \cdot 20 s = \underline{1047}$
 - Bei einer Umdrehung wird ein Winkel von 2π überstrichen. Damit gilt für die Anzahl der Umdrehungen:

$$N_2 = \frac{\Phi_2}{2\pi} = \frac{1047}{2\pi} = \underline{166,6}$$

- Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes auf dem Umfang:
 - Die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ s beträgt

$$\omega_1 = \omega(t_1) = \dot{\omega}_0 t_1 = 5,235 \frac{1}{s^2} \cdot 1 s = 5,235 \frac{1}{s}$$

Ein Punkt auf dem Umfang hat den Radius

$$r = d/2 = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

Seine Geschwindigkeit beträgt

$$v_1 = \omega_1 r = 5,235 \frac{1}{s} \cdot 0,3 \text{ m} = 1,571 \text{ m/s}$$

Seine Normalbeschleunigung (Zentripetalbeschleunigung) beträgt

$$a_{n1} = \omega_1^2 r = 5,235^2 \frac{1}{s^2} \cdot 0,3 \text{ m} = 8,221 \text{ m/s}^2 = 0,8380 \text{ g}$$

Seine Bahnbeschleunigung beträgt

$$a_{t1} = \dot{\omega}_0 r = 5,235 \frac{1}{s^2} \cdot 0,3 \text{ m} = 1,571 \text{ m/s}^2 = 0,1601 \text{ g}$$

Der Betrag der Gesamtbeschleunigung ist

$$a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_{t1}^2} = 8,370 \text{ m/s}^2 = 0,8532 \text{ g}$$