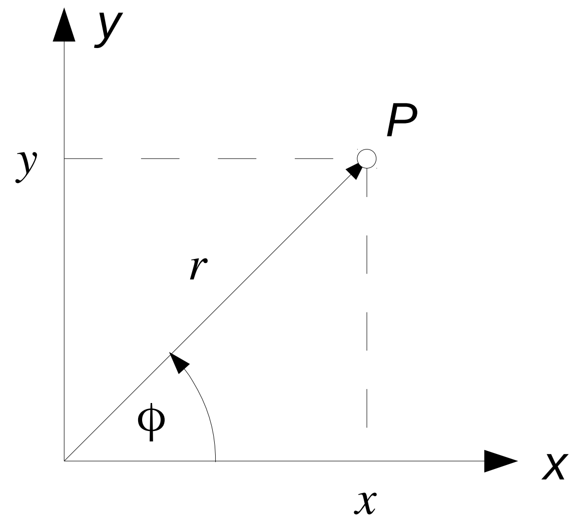
4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

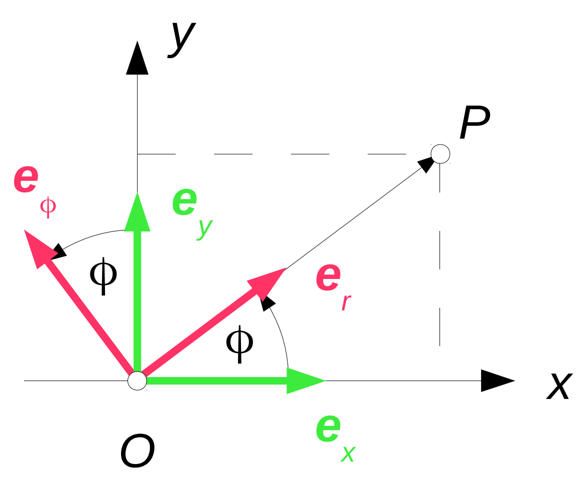
- Polarkoordinaten:
  - Anstelle der Koordinaten x und y kann die Lage eines Punktes in der Ebene auch durch den Radius r und den Winkel ϕ beschrieben werden.
  - Die Koordinaten r und ϕ werden als Polarkoordinaten bezeichnet.



$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi)$$

4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

- Vektoren in Polarkoordinaten:
  - Anstelle der kartesischen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_y$ werden die lokalen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_\phi$ für die Darstellung von Vektoren verwendet.
  - Der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_r$ zeigt vom Ursprung *O* zum Punkt *P*.
  - Der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_\phi$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{e}_r$ und zeigt nach links.



4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

- Aus der Zeichnung kann abgelesen werden:

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(\phi)=\cos(\phi)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}+\sin(\phi)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\phi}}(\phi)=-\sin(\phi)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}+\cos(\phi)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}$$

- Da sich der Winkel ϕ ändert, wenn sich der Punkt *P* bewegt, sind die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_\phi$ zeitlich veränderlich.

- Für die Ableitungen gilt:

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot{\phi}\left(-\sin(\phi)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}+\cos(\phi)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}\right)=\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\phi=\dot{\phi}\left(-\cos(\phi)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}-\sin(\phi)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}\right)=-\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}$$

- Für den Ortsvektor gilt: $\boldsymbol{r}(t)=r(t)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{r}}(t)$

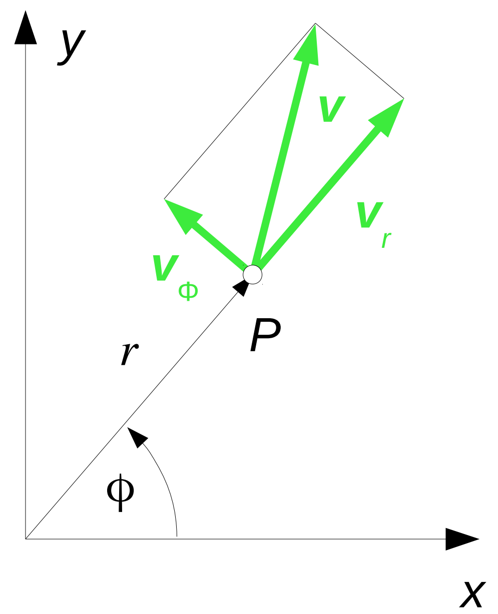
4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

- Für den Geschwindigkeitsvektor folgt:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \dot{r}(t)\boldsymbol{e}_r(t) + r(t)\dot{\boldsymbol{e}}_r(t)$$
$$= \dot{r}(t)\boldsymbol{e}_r(t) + r(t)\dot{\phi}(t)\boldsymbol{e}_\phi(t)$$
$$= v_r(t)\boldsymbol{e}_r(t) + v_\phi(t)\boldsymbol{e}_\phi(t)$$

- Die Komponente v_r wird als *Radialgeschwindigkeit* und die Komponente v_ϕ als *Umfangsgeschwindigkeit* bezeichnet:

$$\boxed{v_r = \dot{r}, \quad v_\phi = r\dot{\phi}}$$



4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

- Ableiten des Geschwindigkeitsvektors führt auf den Beschleunigungsvektor:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t)=\dot{\boldsymbol{v}}(t)&=\dot{v}_r(t)\boldsymbol{e}_r(t)+v_r(t)\dot{\boldsymbol{e}}_r(t)+\dot{v}_\phi(t)\boldsymbol{e}_\phi(t)+v_\phi(t)\dot{\boldsymbol{e}}_\phi(t)\\&=\left(\dot{v}_r(t)-v_\phi(t)\dot{\phi}(t)\right)\boldsymbol{e}_r(t)+\left(\dot{v}_\phi(t)+v_r(t)\dot{\phi}(t)\right)\boldsymbol{e}_\phi(t)\\&=a_r(t)\boldsymbol{e}_r(t)+a_\phi(t)\boldsymbol{e}_\phi(t)\end{aligned}$$

- Die Komponente a_r wird als *Radialbeschleunigung* und die Komponente a_ϕ als *Umfangsbeschleunigung* bezeichnet.
- Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned}a_r&=\dot{v}_r-v_\phi\dot{\phi}=\ddot{r}-r\dot{\phi}^2\\a_\phi&=\dot{v}_\phi+v_r\dot{\phi}=r\ddot{\phi}+2\dot{r}\dot{\phi}\end{aligned}}$$

4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

- Die Beschleunigung $a_c = 2\dot{r}\dot{\phi}$ heißt *Coriolisbeschleunigung.*

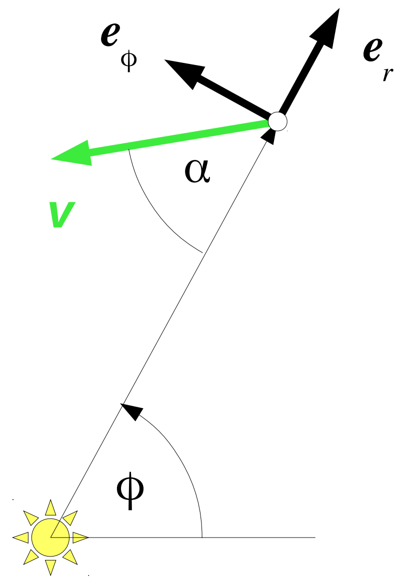
- Beispiel: Kreisbewegung
  - Bei der Kreisbewegung ist der Radius konstant: $r = const.$
  - Daraus folgt: $v_r = \dot{r} = 0, \quad v_\phi = r\dot{\phi}$

    $a_r = -r\dot{\phi}^2, \quad a_\phi = r\ddot{\phi}$

  - Bei der Kreisbewegung stimmt die Radialbeschleunigung mit der Normalbeschleunigung und die Umfangsbeschleunigung mit der Bahnbeschleunigung überein.

4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

- Beispiel: Flugbahn einer Mücke
  - Eine Mücke fliegt so, dass der Winkel zwischen der Flugrichtung und der Verbindungsgeraden zu einer Lichtquelle konstant bleibt.
  - Welche Flugbahn ergibt sich dabei, wenn die Mücke mit konstanter Bahngeschwindigkeit v_0 fliegt?
  - Im Polarkoordinatensystem gilt:



$$v_r = -v_0 \cos(\alpha), \quad v_\phi = v_0 \sin(\alpha)$$

4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

- Mit den Anfangsbedingungen $t_0 = 0,\ r(0) = r_0,\ \phi(0) = 0$

  folgt aus den Beziehungen für die Komponenten der Geschwindigkeit:

$$\dot{r} = v_r = -v_0 \cos(\alpha) \rightarrow r(t) = r_0 - v_0 \cos(\alpha)\, t$$

$$r\dot{\phi} = v_\phi = v_0 \sin(\alpha) \rightarrow \dot{\phi}(t) = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{r(t)} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{r_0 - v_0 \cos(\alpha)\, t}$$

$$\rightarrow \phi(t) = -\tan(\alpha)\left[\ln\left(r_0 - v_0 \cos(\alpha)\, \bar{t}\right)\right]_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=t}$$

$$= -\tan(\alpha) \ln\left(\frac{r_0 - \cos(\alpha)\, t}{r_0}\right) = -\tan(\alpha) \ln\left(\frac{r(t)}{r_0}\right)$$

4. Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

- Auflösen nach $r(t)$ ergibt:

$$r(t) = r_0 \exp(-\cot(\alpha)\,\phi(t))$$

$$\rightarrow \quad r(\phi) = r_0 \exp(-\cot(\alpha)\,\phi)$$

- Das ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale.
- Für $\alpha < 90°$ fliegt die Mücke in die Lichtquelle.