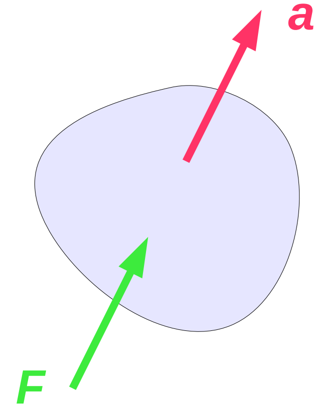
1. Bewegungsgleichung

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Die Erfahrung zeigt:
  - Wenn die Kräfte, die an einem Körper angreifen, nicht im Gleichgewicht sind, ändert sich seine Geschwindigkeit.
  - Beschleunigung und Kraft haben die gleiche Richtung.
  - Der Betrag der Beschleunigung ist proportional zum Betrag der Kraft.



1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- 2. Newtonsches Gesetz:
  - Zwischen der an einem Körper angreifenden Kraft $\boldsymbol{F}$ und seiner Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ besteht der Zusammenhang

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}}$$

  - Die Proportionalitätskonstante m wird als *träge Masse* des Körpers bezeichnet.
  - Ein Punkt, der als Idealisierung für einen Körper mit träger Masse dient, heißt *Massenpunkt*. Ein Massenpunkt ist ein Punkt, dem eine träge Masse zugeordnet ist.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Bewegungsgleichungen:
  - Wenn am Massenpunkt mehrere Kräfte angreifen, so ist die Resultierende zu bilden:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$$

  - In einem kartesischen Koordinatensystem gilt:

$$\boxed{\sum F_x = m\,a_x, \quad \sum F_y = m\,a_y, \quad \sum F_z = m\,a_z}$$

  - Diese Gleichungen werden als *Bewegungsgleichungen* bezeichnet.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

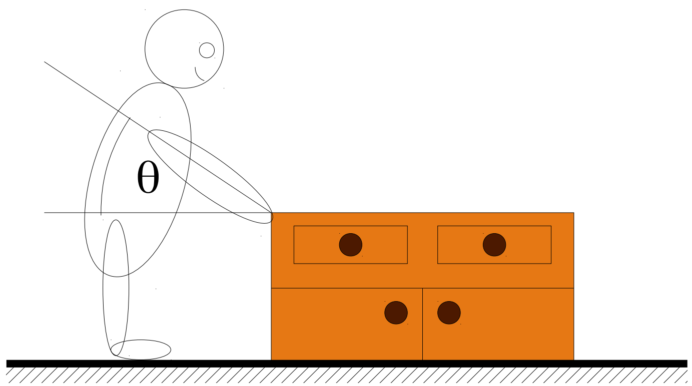
- Aus den Bewegungsgleichungen lässt sich die Bewegung des Massenpunkts bestimmen, wenn die Kräfte und die Anfangsbedingungen gegeben sind.
- Wenn die Bewegung gegeben ist, so lassen sich aus den Bewegungsgleichungen die benötigten Kräfte ermitteln.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Inertialsystem:
  - Das Newtonsche Grundgesetz gilt nicht in beliebigen Bezugssystemen.
  - Ein Bezugssystem, in dem das Grundgesetz gilt, wird als *Inertialsystem* bezeichnet.
  - Bei technischen Anwendungen kann die Erde in der Regel als Inertialsystem angesehen werden.
  - Jedes Bezugssystem, das sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu einem Inertialsystem bewegt, ist ebenfalls ein Inertialsystem.

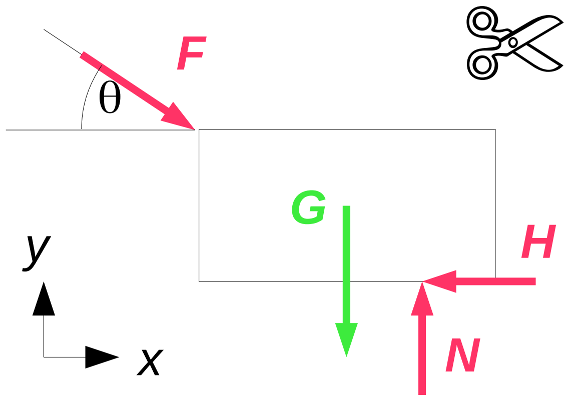
1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Beispiel:
  - Eine Kommode soll verschoben werden.
  - Gegeben:
    - Gewicht G der Kommode
    - Haftungskoeffizient $\mu_0 = 0{,}25$ und Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}1$
    - Winkel $\theta = 30°$
  - Gesucht:
    - Beschleunigung, die auftritt, wenn die Haftung gerade überschritten wird



1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Nötige Kraft:
  - Damit sich die Kommode in Bewegung setzt, muss die Haftung überwunden werden.
  - Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum F_x = 0 \;:\; F\cos(\theta) - H = 0$$

$$\sum F_y = 0 \;:\; -F\sin(\theta) - G + N = 0$$

  - Bedingung für Gleiten: $H > \mu_0 N$
  - Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$H = F\cos(\theta), \quad N = F\sin(\theta) + G$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Einsetzen in die Bedingung für Gleiten ergibt:

$$F\cos(\theta) > \mu_0\left(F\sin(\theta) + G\right)$$

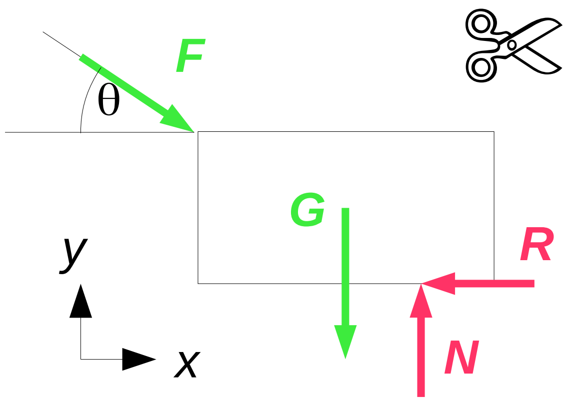
- Daraus folgt für die Kraft: $F\left(\cos(\theta) - \mu_0\sin(\theta)\right) > \mu_0 G$

- Für $\cos(\theta) - \mu_0\sin(\theta) > 0$ gilt: $F > \dfrac{\mu_0 G}{\cos(\theta) - \mu_0\sin(\theta)}$

- Gleiten:
  - Wenn die Kraft F die Bedingung für Gleiten erfüllt, tritt Gleiten auf. Statt der Haftungskraft wirkt die kleinere Gleitreibungskraft.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Bewegungsgleichungen:



$$\sum F_x = m a_x \quad : \quad F\cos(\theta) - R = m a_x$$

$$\sum F_y = m a_y \quad : \quad -F\sin(\theta) - G + N = 0$$

- Gleitreibungsgesetz: $R = \mu N$
- Aus der Bewegungsgleichung in *y*-Richtung folgt:

$$N = F\sin(\theta) + G$$

- Einsetzen in das Gleitreibungsgesetz ergibt:

$$R = \mu N = \mu\left(F\sin(\theta) + G\right)$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Einsetzen in die Bewegungsgleichung in *x*-Richtung führt auf:

$$a_x = \frac{F\cos(\theta) - \mu F\sin(\theta) - \mu G}{m} = \frac{F\left(\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)\right) - \mu G}{m}$$

$$> \left(\mu_0 \frac{\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_0\sin(\theta)} - \mu\right)\frac{G}{m} = \left(\mu_0 \frac{\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_0\sin(\theta)} - \mu\right) g$$

- Die Beschleunigung hängt nicht von der Masse der Kommode ab.

- Zahlenwert:
  - Mit $\mu_0 = 0{,}25$, $\mu = 0{,}1$ und $\theta = 30°$ ergibt sich:

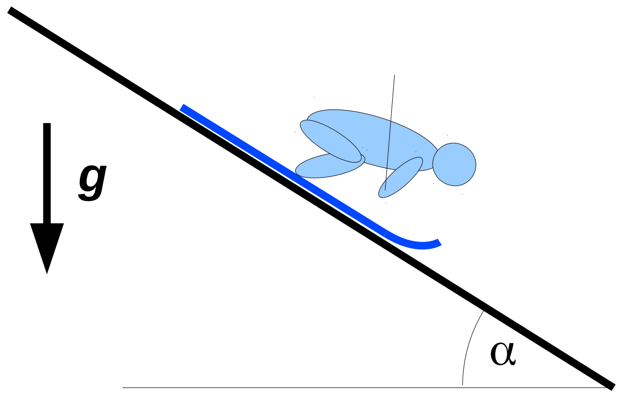
$$a_x > \left[0{,}25 \frac{\cos(30°) - 0{,}1\sin(30°)}{\cos(30°) - 0{,}25\sin(30°)} - 0{,}1\right] g = 0{,}1753\, g = \underline{1{,}720\,\mathrm{m/s^2}}$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Allgemeines Vorgehen:
  - Freischneiden des betrachteten Systems
  - Einführen eines geeigneten Koordinatensystems
  - Aufstellen der Bewegungsgleichungen:
    - Kraft- , Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten sind positiv, wenn die zugehörigen Vektoren in Richtung positiver Koordinatenachsen zeigen.
  - Auflösen nach den gesuchten Größen

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Beispiel: Skifahrer
  - Ein Skifahrer fährt auf einem Hang mit dem konstanten Neigungswinkel α.

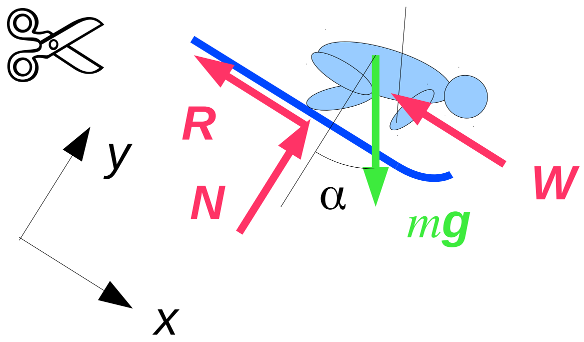


  - Gesucht:
    - Endgeschwindigkeit v_E
    - Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v(t)$
    - Geschwindigkeit-Ort-Gesetz $v(s)$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Kräfte am Skifahrer:
  - Reibungskraft: $R = \mu N$
  - Luftwiderstandskraft: $W = \frac{1}{2} c_W \rho A v^2$

  (Luftwiderstandsbeiwert c_W, Luftdichte ρ, Bezugsfläche A)



- Bewegungsgleichungen:

$$\sum F_x = m a_x \;:\; m g \sin(\alpha) - W - R = m a$$

$$\sum F_y = 0 \;:\; N - m g \cos(\alpha) = 0 \;\rightarrow\; N = m g \cos(\alpha)$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Endgeschwindigkeit v_E:
  - Wenn die Endgeschwindigkeit erreicht wird, gilt $a = 0$.
  - Dann lautet die Bewegungsgleichung in *x*-Richtung:

$$m\,g\sin(\alpha) - W_E - R = 0$$

  - Mit $W_E = \frac{1}{2} c_w \rho A v_E^2$ und $R = \mu N = \mu\, m\, g \cos(\alpha)$ folgt:

$$m\,g\left(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right) - \frac{1}{2} c_w \rho A v_E^2 = 0$$

$$\rightarrow \quad v_E = \sqrt{\frac{2\,m\,g}{c_W \rho A}\left(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right)}$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Beschleunigung:
  - Aus der Bewegungsgleichung in *x*-Richtung folgt für die Beschleunigung:

$$a(v)=g\left(\sin(\alpha)-\mu\cos(\alpha)\right)-\frac{1}{2}\frac{c_W\rho A}{m}v^2=\frac{c_W\rho A}{2m}\left(v_E^2-v^2\right)$$

  - Die Beschleunigung hängt von der Geschwindigkeit ab.
  - Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz und das Geschwindigkeit-Ort-Gesetz können mit den in Kapitel 1.1.6 angegebenen Beziehungen ermittelt werden.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:
  - Für die Anfangsbedingung $t_0 = 0$ und $v_0 = 0$ gilt:

$$t(v) = \int_0^v \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})} = \frac{2m}{c_W \rho A} \int_0^v \frac{d\bar{v}}{v_E^2 - \bar{v}^2} = \frac{2m}{c_W \rho A} \left[\frac{1}{v_E} \operatorname{artanh}\left(\frac{\bar{v}}{v_E} \right) \right]_{\bar{v}=0}^{\bar{v}=v}$$

$$= \frac{2m}{c_W \rho A v_E} \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{v_E} \right)$$

  - Auflösen nach der Geschwindigkeit ergibt:

$$\frac{c_W \rho A v_E t}{2m} = \operatorname{artanh}\left(\frac{v}{v_E} \right) \rightarrow v(t) = v_E \tanh\left(\frac{c_W \rho A v_E t}{2m} \right)$$

  - Die Geschwindigkeit strebt asymptotisch gegen die Endgeschwindigkeit v_E.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Geschwindigkeit-Ort-Gesetz:
  - Für die Anfangsbedingungen $s_0 = 0$ und $v_0 = 0$ gilt:

$$s(v) = \int_0^v \frac{\bar{v}\, d\bar{v}}{a(\bar{v})} = \frac{2m}{c_W \rho A} \int_0^v \frac{\bar{v}\, d\bar{v}}{v_E^2 - \bar{v}^2} = \frac{-m}{c_W \rho A} \left[\ln\left(v_E^2 - \bar{v}^2 \right) \right]_{\bar{v}=0}^{\bar{v}=v}$$

$$= \frac{-m}{c_W \rho A} \left(\ln\left(v_E^2 - v^2 \right) - \ln\left(v_E^2 \right) \right) = \frac{-m}{c_W \rho A} \ln\left(\frac{v_E^2 - v^2}{v_E^2} \right)$$

$$= \frac{-m}{c_W \rho A} \ln\left(1 - \left(\frac{v}{v_E} \right)^2 \right)$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Auflösen nach der Geschwindigkeit ergibt:

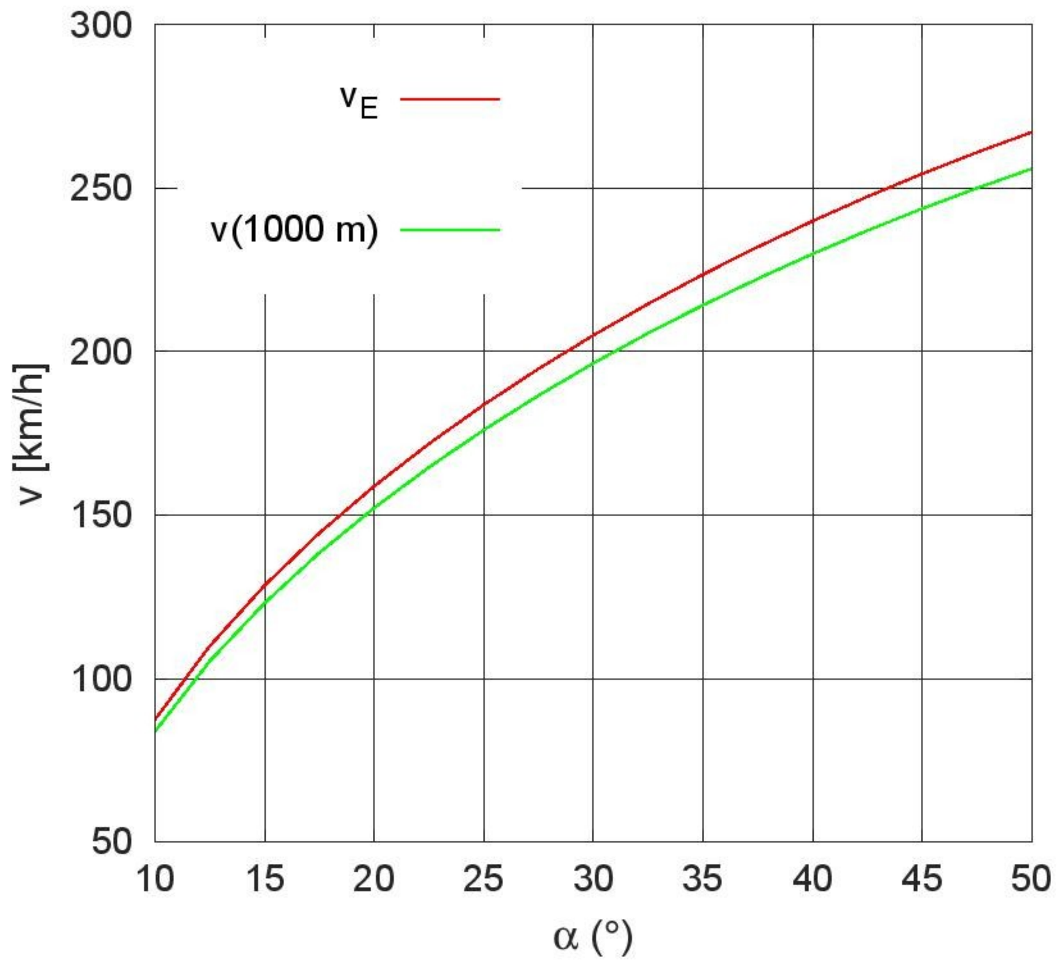
$$-\frac{c_W \rho A}{m} s = \ln\left(1-\left(\frac{v}{v_E}\right)^2\right) \rightarrow \exp\left(-\frac{c_W \rho A}{m} s\right) = 1-\left(\frac{v}{v_E}\right)^2$$

$$\rightarrow v(s) = v_E \sqrt{1-\exp\left(-\frac{c_W \rho A}{m} s\right)}$$

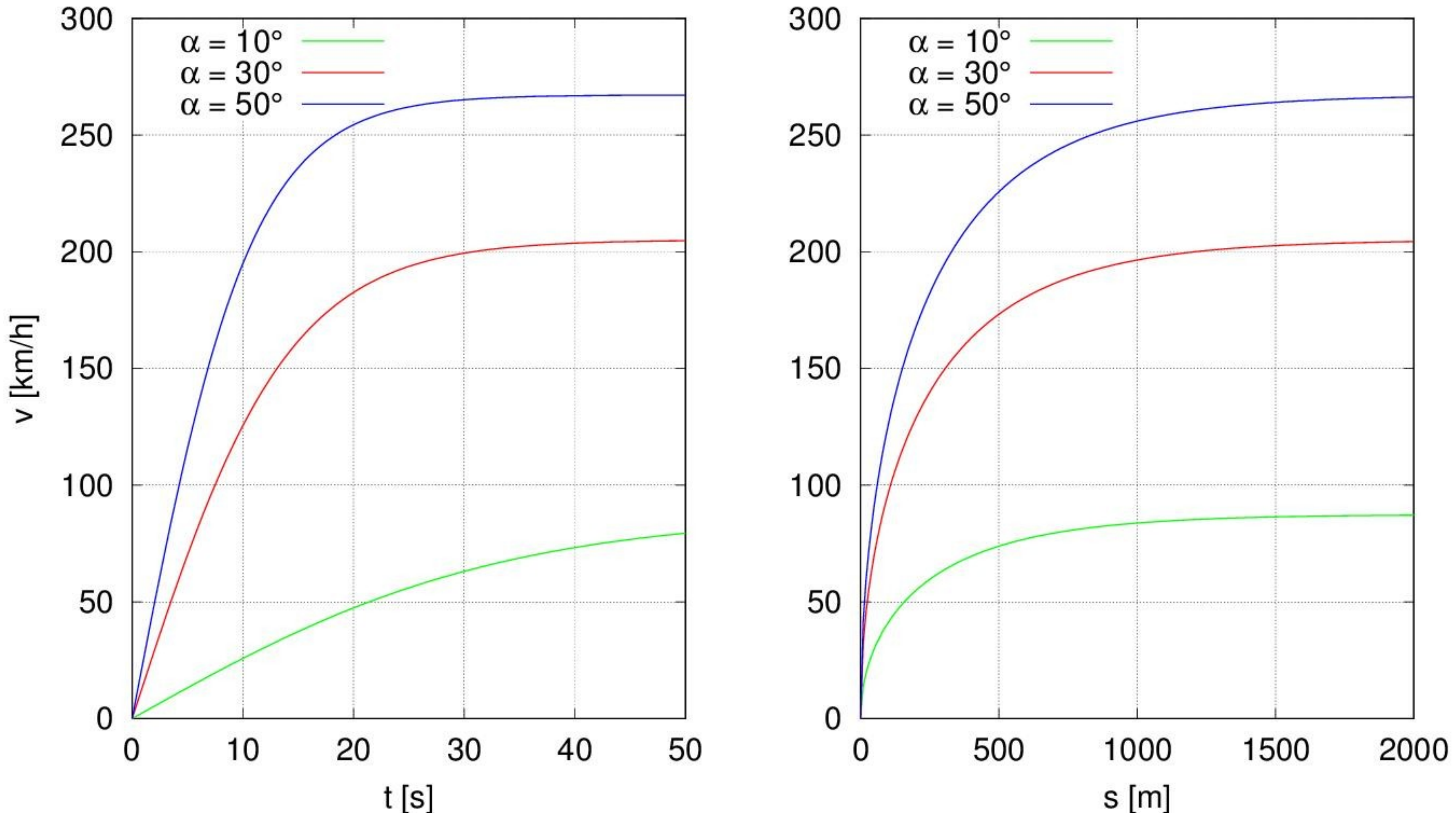
- Die Geschwindigkeit strebt asymptotisch gegen die Endgeschwindigkeit v_E.

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Zahlenbeispiel:
  - $m = 75\ \mathrm{kg}$
  - $\mu = 0{,}1$
  - $c_W\, A = 0{,}15\ \mathrm{m}^2$
  - $\rho = 1{,}25\ \mathrm{kg/m}^3$



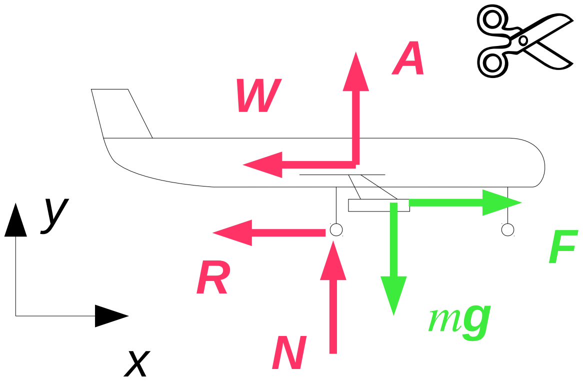
1.1 Das Newtonsche Grundgesetz



1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Beispiel: Startendes Flugzeug
  - Gesucht: Startrollstrecke eines Flugzeugs bei Windstille
  - Bewegungsgleichungen:

$$\sum F_x = m\,a \quad : \quad F - R - W = m\,a \qquad (1)$$
$$\sum F_y = 0 \quad : \quad N + A - m\,g = 0 \qquad (2)$$



  - Kräfte:
    - Triebwerkschub F, Rollwiderstand $R = \mu_R N$
    - Luftwiderstand und Auftrieb:

$$W = \frac{1}{2} c_W \rho S v^2, \quad A = \frac{1}{2} c_A \rho S v^2$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Parameter:
  - Rollwiderstandskoeffizient μ_R
  - Widerstandsbeiwert c_W, Auftriebsbeiwert c_A
  - Luftdichte ρ, Flügelfläche S
- Aus (2) folgt: $N = m\,g - A = m\,g - \frac{1}{2} c_A \rho S v^2$
- Geschwindigkeit v_S beim Abheben:
  - Das Abheben erfolgt mit dem Auftriebsbeiwert c_{AS}.
  - Es gilt: $0 = N = m\,g - \frac{1}{2} c_{AS} \rho S v_S^2 \rightarrow v_S^2 = \frac{2\,m\,g}{c_{AS} \rho S}$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Startrollstrecke:
  - Das Rollen erfolgt mit einem kleineren Anstellwinkel als das Abheben. Der Auftriebsbeiwert c_A beim Rollen ist daher kleiner als c_{AS}.
  - Einsetzen der Kräfte in (1) ergibt:

$$m\,a(v)=F-\mu_R\left(m\,g-\frac{1}{2}c_A\rho\,S\,v^2\right)-\frac{1}{2}c_W\rho\,S\,v^2$$
$$=F-\mu_R\,m\,g-\frac{1}{2}\rho\,S\,v^2\left(c_W-\mu_R\,c_A\right)$$

  - Mit der Abkürzung $c_R=c_W-\mu_R\,c_A$ folgt:

$$a(v)=\frac{F}{m}-\mu_R\,g-\frac{c_R\rho\,S\,v^2}{2m}=\frac{c_R\rho\,S}{2m}\left(2\frac{F-\mu_R\,m\,g}{c_R\rho\,S}-v^2\right)$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Mit $v_E^2 = 2\,\dfrac{F - \mu_R m g}{c_R \rho S}$ gilt: $a(v) = \dfrac{c_R \rho S}{2m}\left(v_E^2 - v^2\right)$
- Wegen $a(v_E) = 0$ ist ein Start nur möglich für $v_E > v_S$.
- Für die Startstrecke gilt:

$$s_S = s(v_S) = \int_0^{v_S} \frac{v\,dv}{a(v)} = \frac{2m}{c_R \rho S} \int_0^{v_S} \frac{v\,dv}{v_E^2 - v^2} = -\frac{m}{c_R \rho S}\left[\ln\left(v_E^2 - v^2\right)\right]_{v=0}^{v=v_S}$$

$$= -\frac{m}{c_R \rho S} \ln\left(\frac{v_E^2 - v_S^2}{v_E^2}\right) = -\frac{m}{c_R \rho S} \ln\left(1 - \frac{v_S^2}{v_E^2}\right)$$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Zahlenwerte für A340-300E:
  - Schub: $F = 4 \cdot 150 \text{ kN} = 600 \text{ kN}$
  - Masse: $m = 275 \text{ t}$
  - Flügelfläche: $S = 362 \text{ m}^2$
  - Rollwiderstandskoeffizient (geschätzt): $\mu_R = 0{,}04$
  - Auftriebsbeiwerte (geschätzt): $c_{AS} = 1{,}9$, $c_A = 1{,}5$
  - Gleitzahl (geschätzt): $c_A / c_W = 5$
  - Massendichte der Luft: $\rho = 1{,}21 \text{ kg/m}^3$

1.1 Das Newtonsche Grundgesetz

- Damit folgt:

$$v_S = \sqrt{\frac{2 \cdot 275 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{1{,}9 \cdot 1{,}21\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 362\,\mathrm{m^2}}} = 80{,}52\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 289{,}9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

$$\frac{c_R}{c_A} = \frac{c_W}{c_A} - \mu_R = \frac{1}{5} - 0{,}04 = 0{,}16\,, \quad c_R = 1{,}5 \cdot 0{,}16 = 0{,}24$$

$$v_E = \sqrt{2\,\frac{600 \cdot 10^3\,\mathrm{N} - 0{,}04 \cdot 275 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}24 \cdot 1{,}21\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 362\,\mathrm{m^2}}} = 96{,}76\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$s_S = -\frac{275 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}}{0{,}24 \cdot 1{,}21\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 362\,\mathrm{m^2}} \ln\left(1 - \frac{80{,}52^2}{96{,}76^2}\right) = 3085\,\mathrm{m}$$

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Die d'Alembertsche Trägheitskraft:
  - Das Newtonsche Grundgesetz kann auch in der Form

$$\boldsymbol{F} - m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

    geschrieben werden.
  - Die Kraft

$$\boldsymbol{F}_T = -m\,\boldsymbol{a}$$

    wird als *d'Alembertsche Trägheitskraft* bezeichnet.
  - Die d'Alembertsche Trägheitskraft ist eine Scheinkraft, die entgegen der Beschleunigung gerichtet ist.

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Dynamisches Gleichgewicht:
  - Durch das Einführen der Trägheitskraft lässt sich das Newtonsche Grundgesetz formal auf eine Gleichgewichtsbedingung zurückführen:

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_T=\boldsymbol{0}$$

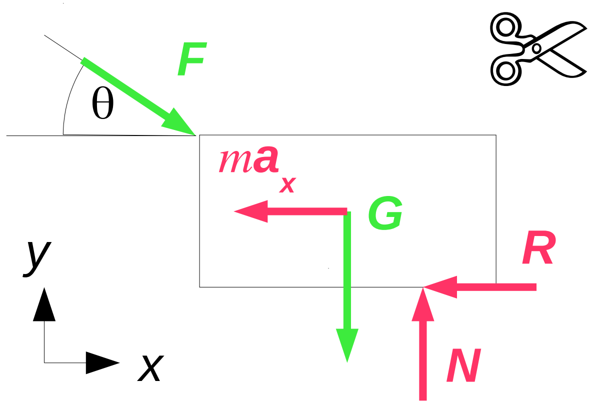
  - Dieses Gleichgewicht wird als *dynamisches Gleichgewicht* bezeichnet.

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Vorgehen:
  - Der zu untersuchende Körper wird freigeschnitten.
  - Neben den äußeren Kräften werden zusätzlich die d'Alembertschen Trägheitskräfte eingetragen.
  - Die Bewegungsgleichungen folgen dann wie in der Statik aus der Bedingung, dass die Summe aller Kräfte null sein muss.
- Der Lösungsweg mithilfe des dynamischen Gleichgewichts ist besonders günstig, wenn die Beschleunigungen bekannt sind.

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Beispiel: Kommode
  - Freischneiden der Kommode:



  - Dynamisches Gleichgewicht:

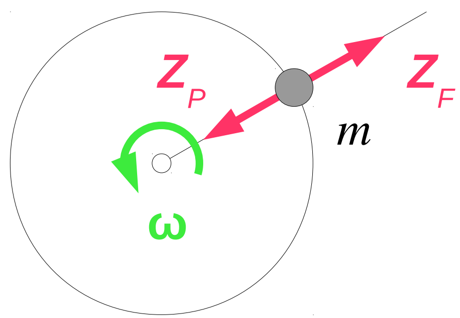
$$\sum F_x^D = 0 \quad : \quad F\cos(\theta) - R - m\,a_x = 0$$

$$\sum F_y^D = 0 \quad : \quad -F\sin(\theta) - G + N = 0$$

1.2 Dynamisches Gleichgewicht

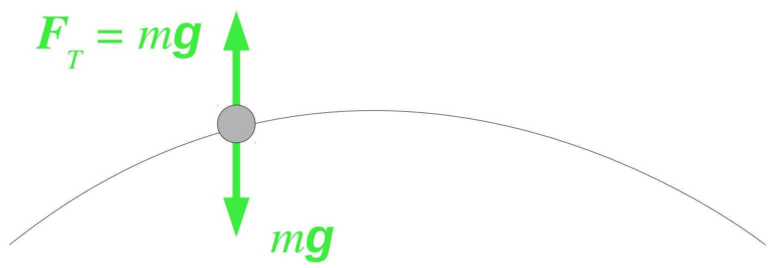
- Beispiel: Kreisbewegung
  - Damit sich ein Massenpunkt auf einer Kreisbahn bewegt, muss an ihm eine auf den Kreismittelpunkt gerichtete *Zentripetalkraft* angreifen.
  - Sie ist im dynamischen Gleichgewicht mit der Trägheitskraft der Zentripetalbeschleunigung, die als *Zentrifugalkraft* oder *Fliehkraft* bezeichnet wird.

$$Z_F = Z_P = m\,a_n$$



1.2 Dynamisches Gleichgewicht

- Beispiel: Parabelflug
  - Bewegt sich ein Massenpunkt auf einer Wurfparabel, dann ist die Gewichtskraft im Gleichgewicht mit der Trägheitskraft.
  - Daher herrscht an Bord eines Flugzeugs, dessen Flugbahn einer Wurfparabel entspricht, Schwerelosigkeit.

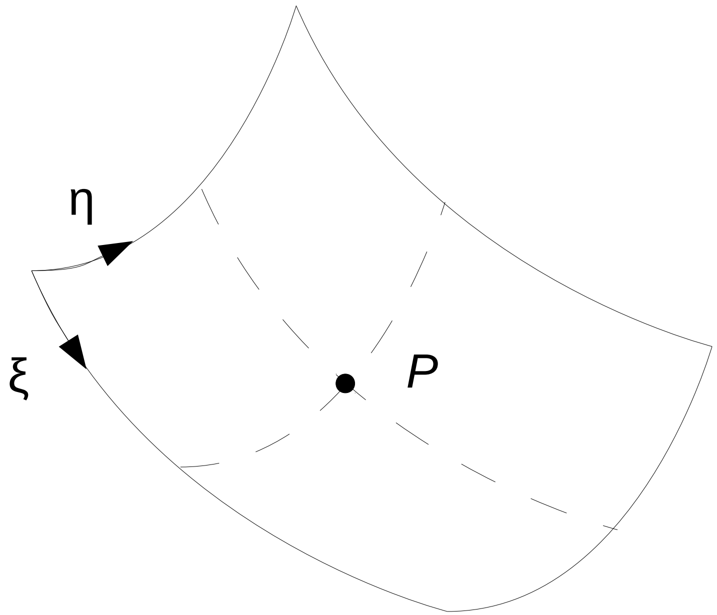


1.3 Geführte Bewegung

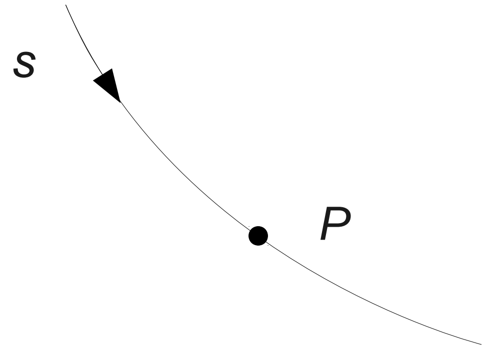
- Bei einer geführten Bewegung wird der Massenpunkt gezwungen, sich auf einer vorgegebenen Fläche oder Kurve zu bewegen.
- Dadurch wird die Zahl der *Freiheitsgrade* des Massenpunktes eingeschränkt.
- Die Zahl der Freiheitsgrade ist gleich der Zahl der Koordinaten, die notwendig sind, um den Ort des Massenpunktes eindeutig festzulegen.

1.3 Geführte Bewegung

- Fläche:
  - 2 Freiheitsgrade



- Kurve:
  - 1 Freiheitsgrad

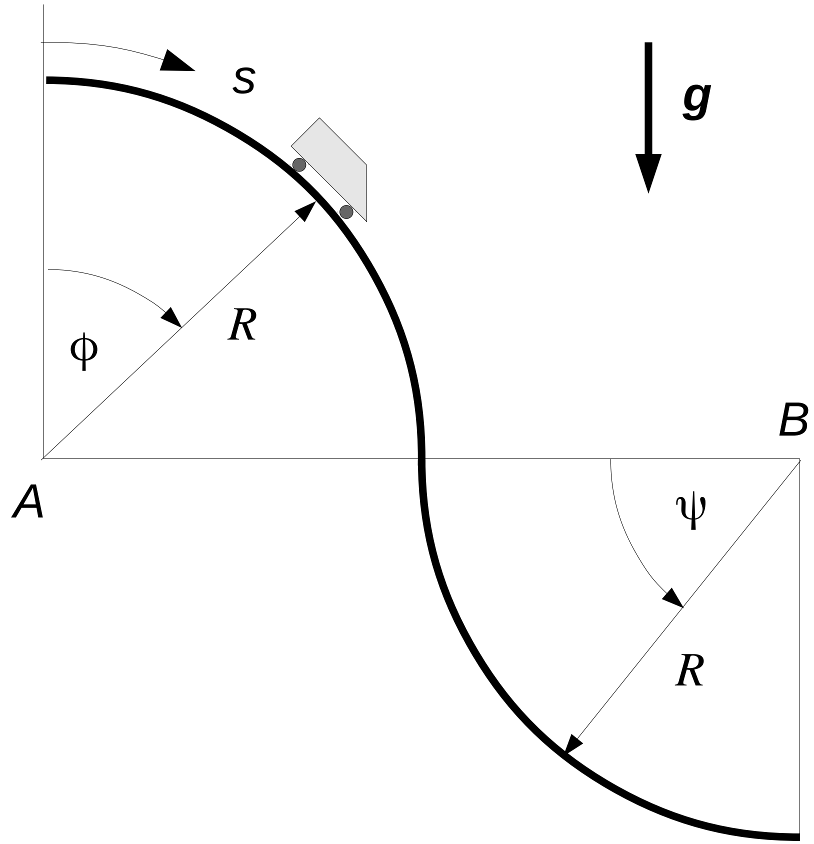


1.3 Geführte Bewegung

- Neben den eingeprägten Kräften treten *Zwangskräfte* auf, die die geforderte Bindung an die Fläche oder Kurve bewirken.
- Die Zwangskräfte stehen senkrecht auf der Fläche oder Kurve.
- Die Zwangskräfte werden auch als *Führungskräfte* bezeichnet.

1.3 Geführte Bewegung

- Beispiel: Achterbahn



– Gegeben:
  - Masse des Wagens m
  - Radius R
  - Anfangsgeschwindigkeit $v(s=0) = v_0$

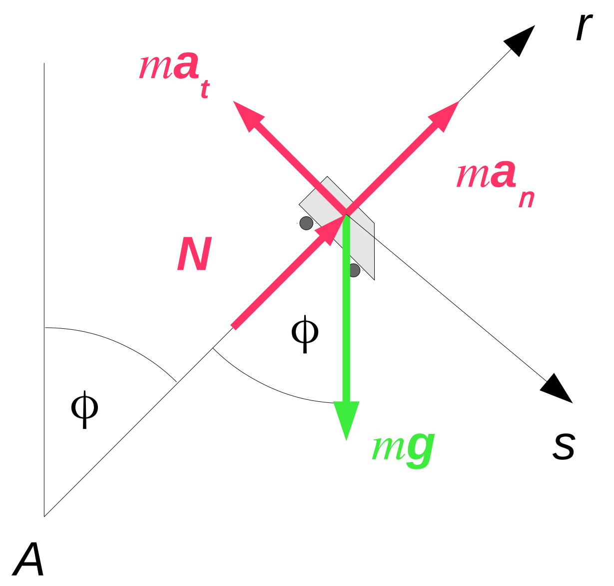
– Gesucht:
  - Bahngeschwindigkeit $v(s)$
  - Zwangskraft $N(s)$

1.3 Geführte Bewegung

- Es wird nur die Bewegung auf dem Viertelkreis um *A* untersucht.
- Die Untersuchung der Bewegung auf dem Viertelkreis um *B* erfolgt genauso und bleibt zur Übung überlassen.
- Dynamisches Gleichgewicht am freigeschnittenen Wagen:

$$\sum F_s^D = 0 \;:\; -m\,a_t + m\,g\sin(\phi) = 0$$

$$\sum F_r^D = 0 \;:\; N + m\,a_n - m\,g\cos(\phi) = 0$$



- Kinematik: $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

1.3 Geführte Bewegung

- Bahngeschwindigkeit:
  - Mit $\phi = s/R$ folgt aus dem dynamischen Gleichgewicht in tangentialer Richtung:

$$a_t(s) = g \sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

  - Die Bahnbeschleunigung ist ortsabhängig. Daher gilt für die Bahngeschwindigkeit:

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2\int_0^s g \sin\left(\frac{\bar{s}}{R}\right) d\bar{s}}$$

  - Das Integral berechnet sich zu

$$\int_0^s \sin\left(\frac{\bar{s}}{R}\right) d\bar{s} = \left[-R\cos\left(\frac{\bar{s}}{R}\right)\right]_{\bar{s}=0}^{\bar{s}=s} = R\left(1-\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

1.3 Geführte Bewegung

- Damit gilt:

$$v(s)=\sqrt{v_0^2+2Rg\left(1-\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)}$$

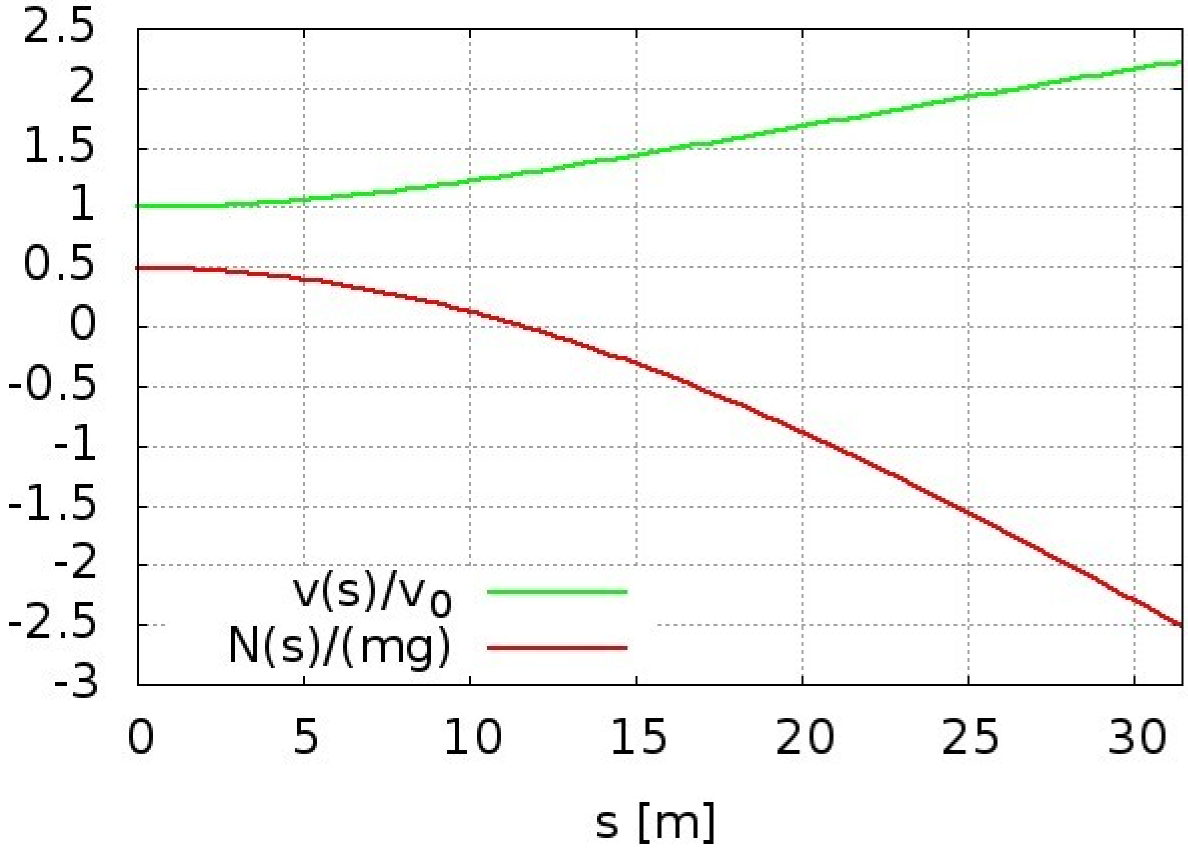
- Zwangskraft:
  - Mit der kinematischen Bedingung folgt aus dem dynamischen Gleichgewicht in radialer Richtung:

$$N(s)=m\left[g\cos\left(\frac{s}{R}\right)-\frac{v_0^2}{R}-2g\left(1-\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)\right]$$

$$=mg\left[3\cos\left(\frac{s}{R}\right)-\frac{v_0^2}{gR}-2\right]$$

1.3 Geführte Bewegung

- Zahlenwerte:
  - $v_0 = 10$ m/s
  - $R = 20$ m



1.4 Massenpunktsysteme

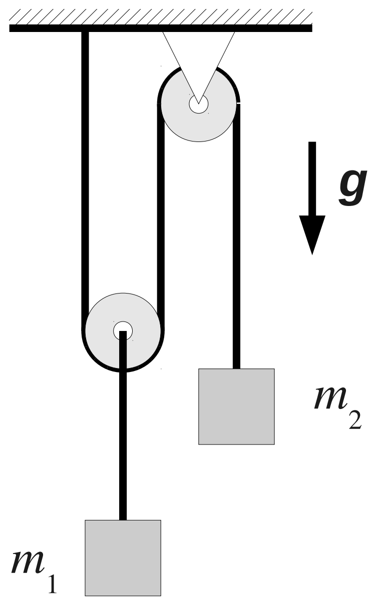
- Ein Massenpunktsystem besteht aus einer endlichen Zahl von Massenpunkten, die über kinematische oder physikalische Bindungen miteinander in Verbindung stehen.
  - *Kinematische Bindungen* sind geometrische Beziehungen zwischen den Koordinaten der Massenpunkte.
  - *Physikalische Bindungen* beschreiben Zusammenhänge zwischen den Abständen der Massenpunkte und den Kräften.

1.4 Massenpunktsysteme

- Vorgehen:
  - Wahl der Freiheitsgrade
  - Freischneiden der einzelnen Massenpunkte:
    - Die Bindungskräfte treten als zusätzliche unbekannte Kräfte auf.
  - Aufstellen der Bewegungsgleichungen für jeden Massen-punkt
  - Berücksichtigung der Bindungsgleichungen
  - Auflösen der Gleichungen nach den gesuchten Größen

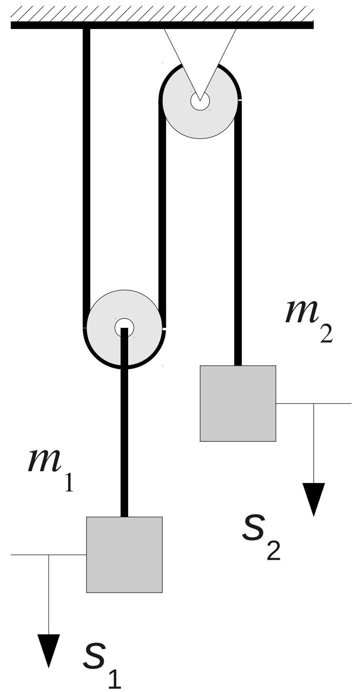
1.4 Massenpunktsysteme

- Beispiel: Flaschenzug
  - Aufgabenstellung:
    - Die beiden Massenpunkte m_1 und m_2 sind durch ein masseloses dehnstarres Seil verbunden, das über masselose Rollen läuft.
    - Wie groß sind die Beschleunigungen und die Seilkräfte, wenn das System sich selbst überlassen wird?



1.4 Massenpunktsysteme

- Wahl der Freiheitsgrade:
  - Die Lagekoordinaten s_1 und s_2 der beiden Massenpunkte werden ab der Ausgangslage positiv nach unten gemessen.
  - Beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen werden Kräfte, die in Richtung der als positiv gewählten Koordinatenrichtung zeigen, positiv gezählt.

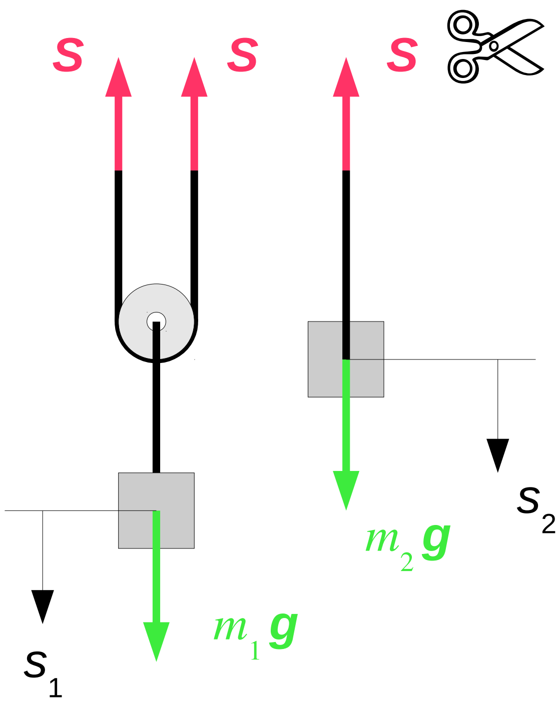


1.4 Massenpunktsysteme

- Kräfte am freigeschnittenen System:
  - Da die Rollen masselos sind, sind alle Seilkräfte gleich groß.
- Bewegungsgleichungen:

$$\sum F_{s_1} = m_1 a_1 \quad : \quad m_1 g - 2S = m_1 a_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_{s_2} = m_2 a_2 \quad : \quad m_2 g - S = m_2 a_2 \qquad (2)$$



1.4 Massenpunktsysteme

- Bindungsgleichung:
  - Das dehnstarre Seil stellt eine kinematische Bindung zwischen den beiden Massenpunkten her.
  - In der Ruhelage gilt für die Seillänge:

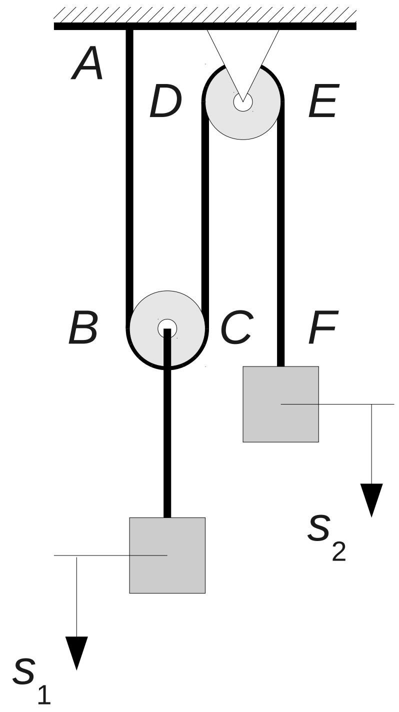
$$L_0 = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DE} + L_{EF}$$

  - In der ausgelenkten Lage gilt:

$$L = L_{AB} + s_1 + L_{BC} + L_{CD} + s_1 + L_{DE} + L_{EF} + s_2$$
$$= L_0 + 2 s_1 + s_2$$

  - Die Bindung verlangt, dass sich die Länge des Seils nicht ändert:

$$\Delta L = L - L_0 = 0 \;\rightarrow\; 2 s_1 + s_2 = 0$$



1.4 Massenpunktsysteme

- Daraus folgt: $s_2 = -2\,s_1$
- Für die Beschleunigungen gilt: $a_2 = \ddot{s}_2 = -2\,\ddot{s}_1 = -2\,a_1$ (3)

- Mit den beiden Bewegungsgleichungen und der kinematischen Bindung stehen drei Gleichungen zur Verfügung, um die drei Unbekannten zu bestimmen.
- Auflösen nach den gesuchten Größen:

(1) - 2 (2) → $(m_1 - 2\,m_2)\,g = m_1\,a_1 - 2\,m_2\,a_2$

mit (3) → $(m_1 - 2\,m_2)\,g = (m_1 + 4\,m_2)\,a_1$

$$\rightarrow \quad a_1 = \frac{m_1 - 2\,m_2}{m_1 + 4\,m_2}\,g\,, \quad a_2 = 2\,\frac{2\,m_2 - m_1}{m_1 + 4\,m_2}\,g$$

1.4 Massenpunktsysteme

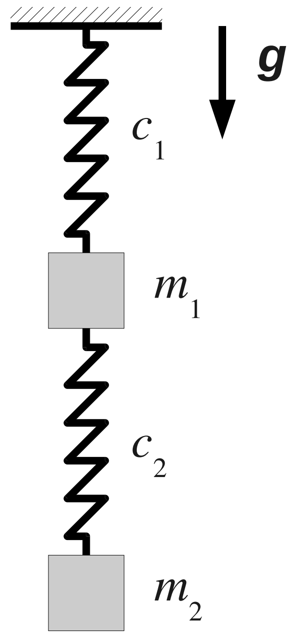
- Für $m_1 = 2m_2$ ist das System im Gleichgewicht.
- Die Seilkraft kann aus Gleichung (2) bestimmt werden:

$$S = m_2 \left(g - a_2 \right) = m_2 \frac{m_1 + 4\,m_2 - 4\,m_2 + 2\,m_1}{m_1 + 4\,m_2}\,g = \frac{3\,m_1\,m_2}{m_1 + 4\,m_2}\,g$$

- Durch die kinematische Bindung wird die Anzahl der Freiheitsgrade von zwei Freiheitsgraden auf einen Freiheitsgrad reduziert.

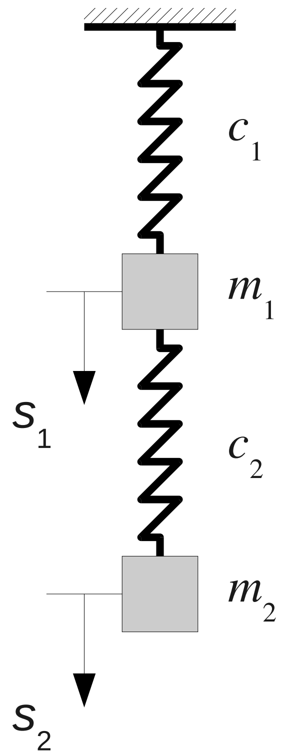
1.4 Massenpunktsysteme

- Beispiel: Feder-Masse-System
  - Aufgabenstellung:
    - Die Masse m_1 hängt an einer masselosen Feder mit der Federkonstanten c_1 .
    - Die Masse m_2 ist über eine masselose Feder mit der Federkonstanten c_2 mit der Masse m_1 verbunden.
    - Gesucht sind die Beschleunigungen der Massenpunkte in Abhängigkeit von den Lagekoordinaten.



1.4 Massenpunktsysteme

- Wahl der Freiheitsgrade:
  - Die Lagekoordinaten s_1 und s_2 der beiden Massen werden ab der Ausgangslage positiv nach unten gemessen.
  - In der Ausgangslage sind die Federn entspannt.



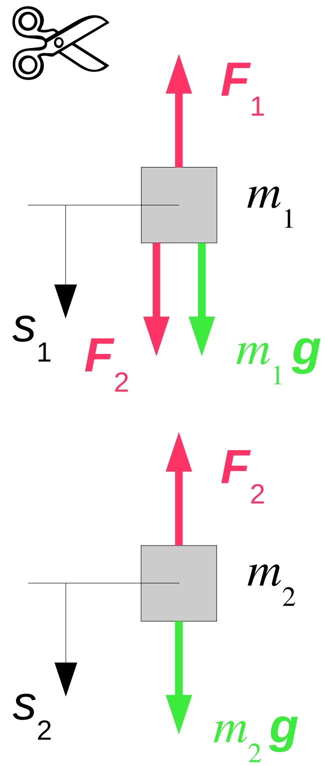
1.4 Massenpunktsysteme

- Bewegungsgleichungen:

$$\sum F_{s_1} = m_1 a_1 \quad : \quad m_1 g + F_2 - F_1 = m_1 a_1$$

$$\sum F_{s_2} = m_2 a_2 \quad : \quad m_2 g - F_2 = m_2 a_2$$

- Bindungsgleichungen:
  - Die Federn sind physikalische Bindungen.
  - Feder 1: $F_1 = c_1 s_1$
  - Feder 2: $F_2 = c_2 (s_2 - s_1)$



1.4 Massenpunktsysteme

- Auflösen:
  - Einsetzen der physikalischen Bindungen in die Bewegungsgleichungen führt auf:

$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{s}_1 &= m_1 g - (c_1 + c_2) s_1 + c_2 s_2 \\
m_2 \ddot{s}_2 &= m_2 g + c_2 s_1 - c_2 s_2
\end{aligned}
$$

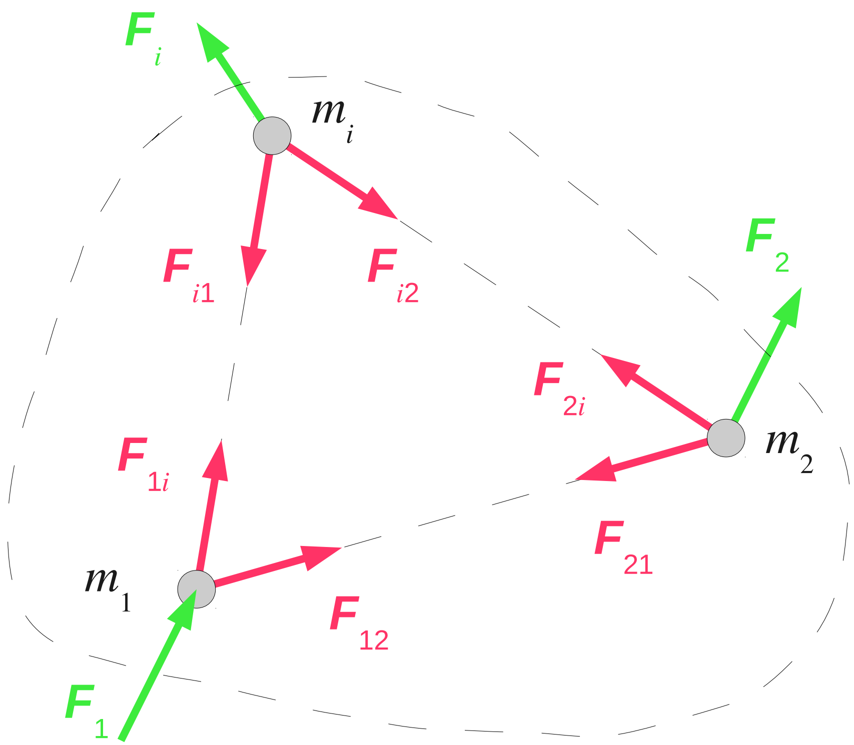
  - Es handelt sich um ein System von zwei gekoppelten linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung.
  - Für die Gleichgewichtslage gilt:

$$
\begin{aligned}
(c_1 + c_2) s_1^G - c_2 s_2^G &= m_1 g \\
-c_2 s_1^G + c_2 s_2^G &= m_2 g
\end{aligned}
$$

- Durch die physikalischen Bindungen wird die Anzahl der Freiheitsgrade nicht verringert.

1.5 Schwerpunktsatz

- Betrachtet wird ein Massenpunktsystem.
- Innere und äußere Kräfte:
  - Die zum System gehörenden Massenpunkte werden durch eine gedachte Systemgrenze von Körpern außerhalb des Systems abgegrenzt.



1.5 Schwerpunktsatz

- Äußere Kräfte:
  - Äußere Kräfte haben ihre Ursache außerhalb des Systems:
    - Eingeprägte Kräfte: Gewichtskraft
    - Lagerkräfte
    - Zwangskräfte
  - Die aus den auf die Masse mit Index i wirkenden äußeren Kräften resultierende Kraft wird mit $\boldsymbol{F}_i$ bezeichnet.
- Innere Kräfte:
  - Innere Kräfte werden durch kinematische oder physikalische Bindungen verursacht.
  - Sie werden durch Freischneiden sichtbar gemacht.

1.5 Schwerpunktsatz

- Die innere Kraft, die der Massenpunkt j auf den Massenpunkt i ausübt, wird mit $\boldsymbol{F}_{ij}$ bezeichnet.
- Wegen Actio = Reactio sind $\boldsymbol{F}_{ij}$ und $\boldsymbol{F}_{ji}$ entgegengesetzt gleich groß:

$$\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{F}_{ji}=\boldsymbol{0}$$

- Bewegungsgleichungen für die Massenpunkte:
  - Für jeden Massenpunkt i gilt: $m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}$
  - Die Summe erstreckt sich über alle inneren Kräfte, die am Massenpunkt i angreifen.

1.5 Schwerpunktsatz

- Summation über alle Massenpunkte ergibt:

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}$$

- Die Summe der äußeren Kräfte ergibt die resultierende äußere Kraft:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$$

- In der doppelten Summe über die inneren Kräfte gibt es zu jedem Summand $\boldsymbol{F}_{ij}$ den entsprechenden Summanden $\boldsymbol{F}_{ji}$.
- Daher verschwindet die Summe über die inneren Kräfte, so dass gilt:

$$\sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}$$

1.5 Schwerpunktsatz

- Schwerpunkt:
  - Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}_S$ des Schwerpunktes ist definiert durch
$$\boldsymbol{r}_S = \frac{1}{m} \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i$$
  - Dabei ist $m = \sum_i m_i$ die gesamte Masse des Systems.
  - Aus der Definition des Schwerpunktes folgt
$$m \boldsymbol{r}_S = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i$$
  - Zweimaliges Ableiten nach der Zeit führt auf
$$m \ddot{\boldsymbol{r}}_S = \sum_i m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$$

1.5 Schwerpunktsatz

- Damit ist gezeigt:

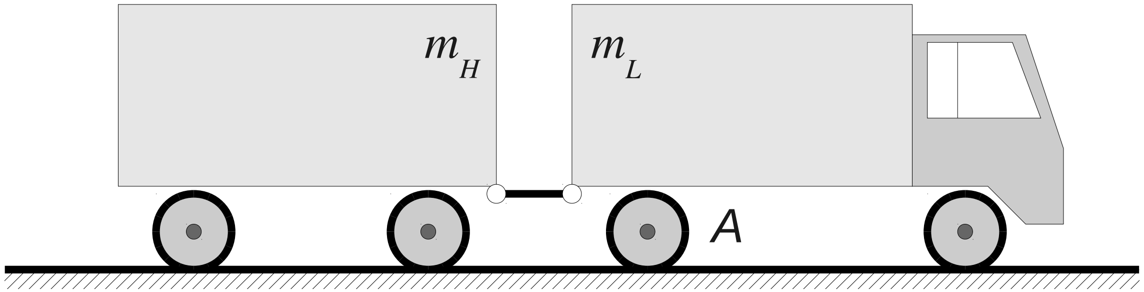
$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}_S = \boldsymbol{F}}$$

> Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angriffen.

  - Die Art der Bindungen spielt dabei keine Rolle:
    - starre Bindungen
    - Federn
    - Gravitationskräfte zwischen den Massenpunkten

1.5 Schwerpunktsatz

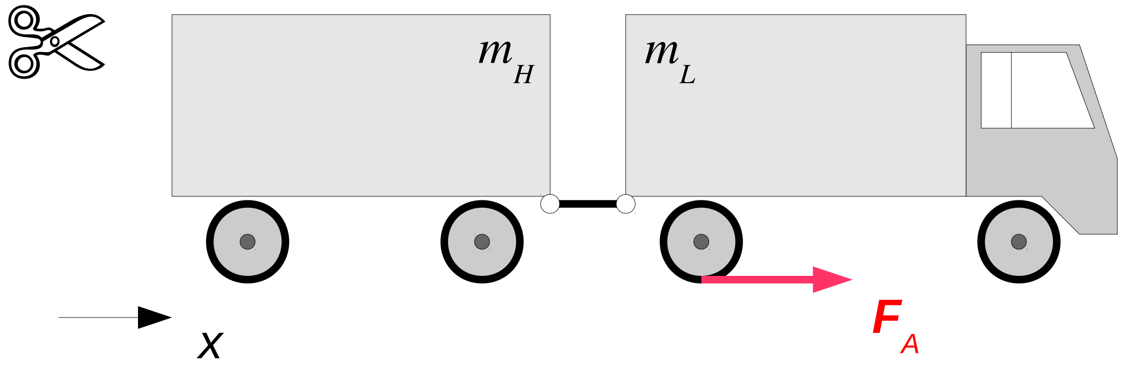
- Beispiel:



  - Aufgabenstellung:
    - Der LKW der Masse m_L zieht einen Anhänger der Masse m_H.
    - Der LKW fährt mit der konstanten Beschleunigung a_0 an.
    - Wie groß ist die Kraft F_A, die an den Antriebsrädern angreifen muss?
    - Wie groß ist die Kraft F_D in der Deichsel?

1.5 Schwerpunktsatz

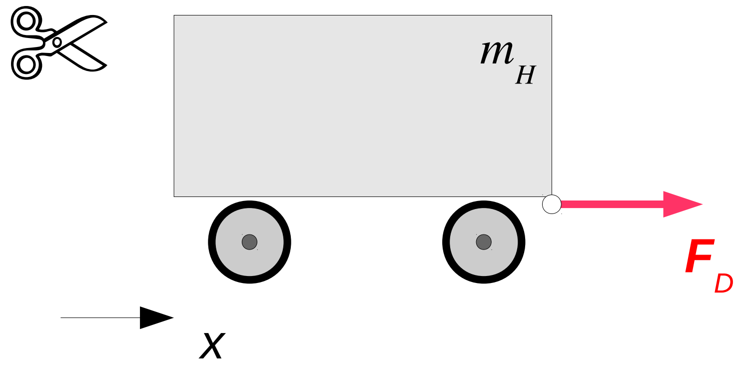
- Zahlenwerte:
  - $m_L = 20$ t, $m_H = 15$ t, $a_0 = 2$ m/s²
- Antriebskraft:



  - Schwerpunktsatz: $\sum F_x = m\,a_x \;:\; F_A = (m_H + m_L)\,a_0$
  - Zahlenwert: $F_A = (15000 + 20000)\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\mathrm{m/s^2} = \underline{70\,\mathrm{kN}}$

1.5 Schwerpunktsatz

- Deichselkraft:



- Bewegungsgleichung für den Anhänger:

$$\sum F_x = m\,a_x \quad : \quad F_D = m_H\,a_0$$

- Zahlenwert: $F_D = 15000\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\mathrm{m/s}^2 = \underline{30\,\mathrm{kN}}$