2. Arbeit und Energie

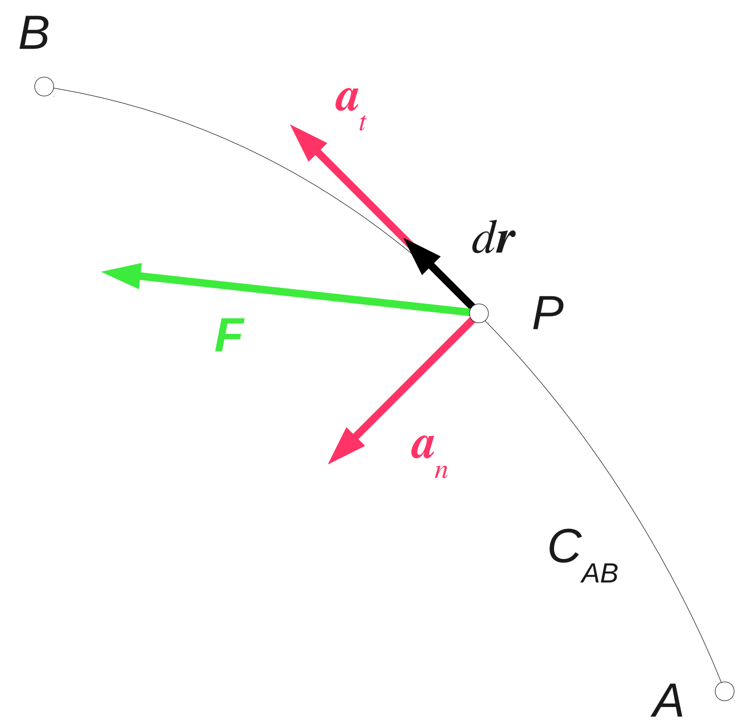
- Zur Ermittlung der Bewegungsgrößen aus der Bewegungsgleichung müssen mehr oder weniger komplizierte Integrale berechnet werden.
- Bei einer Reihe von wichtigen Anwendungen treten die gleichen Integrale auf. Sie können unabhängig von der konkreten Anwendung berechnet werden.
- Diese Integrationen führen auf die Begriffe Arbeit und Energie.

2. Arbeit und Energie

2.1 Arbeitssatz

2.1.1 Herleitung

- Integration der Bewegungsgleichung:
  - Betrachtet wird ein Massenpunkt, der sich entlang der Bahn C_{AB} vom Ort A zum Ort B bewegt.
  - Dabei wirkt auf ihn die resultierende äußere Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, die im Allgemeinen vom Ort abhängt.



2.1.1 Herleitung

- In jedem Punkt der Bahn gilt das Newtonsche Grundgesetz:

$$m\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$$

- Das Skalarprodukt mit dem Wegelement $d\boldsymbol{r}$ lautet

$$m\,\boldsymbol{a}\cdot d\,\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{r}$$

- Die Beschleunigung hat eine Tangentialkomponente $\boldsymbol{a}_t$ und eine Normalkomponente $\boldsymbol{a}_n$:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n$$

- Da die Normalkomponente $\boldsymbol{a}_n$ senkrecht auf dem Wegelement $d\boldsymbol{r}$ steht, gilt:

$$\boldsymbol{a}_n\cdot d\,\boldsymbol{r}=0$$

2.1.1 Herleitung

- Mit der skalaren Bahnbeschleunigung a_t und dem skalaren Wegelement ds folgt: $m\,\boldsymbol{a}\cdot d\,\boldsymbol{r}=m\,\boldsymbol{a_t}\cdot d\,\boldsymbol{r}=m\,a_t\,ds$

- Mit $$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}v=v\frac{dv}{ds}$$

  folgt: $$m\,a_t\,ds=m\,v\frac{dv}{ds}ds=m\,v\,dv$$

- Damit ist gezeigt: $m\,\boldsymbol{a}\cdot d\,\boldsymbol{r}=m\,v\,dv=\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{r}$

- Integration ergibt: $$m\int_{v_A}^{v_B} v\,dv=\int_{C_{AB}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\,\boldsymbol{r}$$

2.1.1 Herleitung

- Kinetische Energie:
  - Das Integral auf der linken Seite berechnet sich zu

$$m \int_{v_A}^{v_B} v \, dv = \frac{1}{2} m \left(v_B^2 - v_A^2 \right)$$

  - Die Größe

$$\boxed{E^K = \frac{1}{2} m v^2}$$

wird als *kinetische Energie* des Massenpunktes bezeichnet.

  - Damit gilt:

$$m \int_{v_A}^{v_B} v \, dv = E_B^K - E_A^K$$

2.1.1 Herleitung

- Arbeit der äußeren Kräfte:
  - Das Integral auf der rechten Seite wird als Arbeit der äußeren Kräfte bezeichnet:

$$\boxed{W_{AB} = \int_{C_{AB}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}}$$

  - W_{AB} ist die Arbeit, die die äußere Kraft $\boldsymbol{F}$ verrichtet, wenn der Massenpunkt entlang der Bahn C_{AB} vom Ort A an den Ort B verschoben wird.
  - Der Wert der Arbeit hängt im Allgemeinen nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt, sondern auch von der Bahn ab.

2.1.1 Herleitung

- Arbeitssatz:

$$\boxed{E_B^K - E_A^K = W_{AB}}$$

  - Die Differenz zwischen der kinetischen Energie E^K_B des Massenpunktes im Punkt *B* und der kinetischen Energie E^K_A im Punkt *A* ist gleich der von den angreifenden Kräften auf dem Weg vom Ort *A* an den Ort *B* verrichteten Arbeit W_{AB}.

2.1.1 Herleitung

- Einheiten:
  - Die Einheit der Arbeit ist

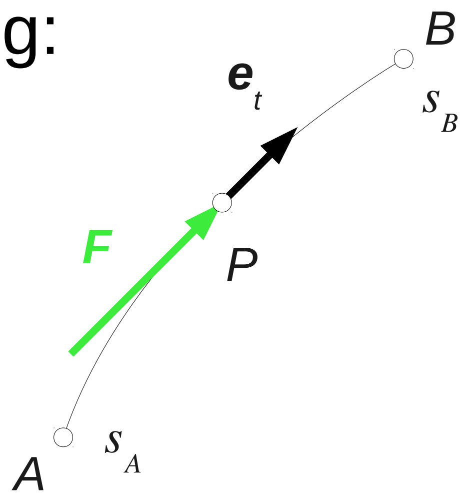
$$1\,\mathrm{Nm} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{J} \quad \text{(Joule)}$$

  - Die kinetische Energie hat die gleiche Einheit wie die Arbeit.

2.1.2 Berechnung der Arbeit

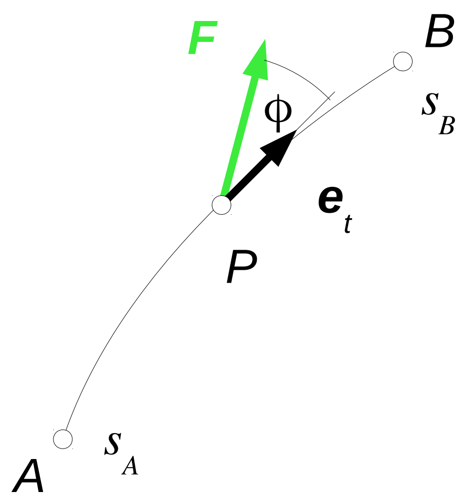
- Kraft konstanter Größe tangential zum Weg:
  - Mit $\boldsymbol{F}=F\,\boldsymbol{e}_t$ und $d\,\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_t\,ds$ gilt:

$$W_{AB}=\int_{C_{AB}}\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{r}=\int_{s_A}^{s_B}F\,\boldsymbol{e}_t\cdot\boldsymbol{e}_t\,ds=F\left(s_B-s_A\right)$$



- Kraft konstanter Größe schräg zum Weg:
  - Mit $d\,\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_t\,ds$ und $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_t=F\cos(\phi)$ gilt:

$$W_{AB}=\int_{C_{AB}}\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{r}=\int_{s_A}^{s_B}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_t\,ds=F\cos(\phi)\left(s_B-s_A\right)$$



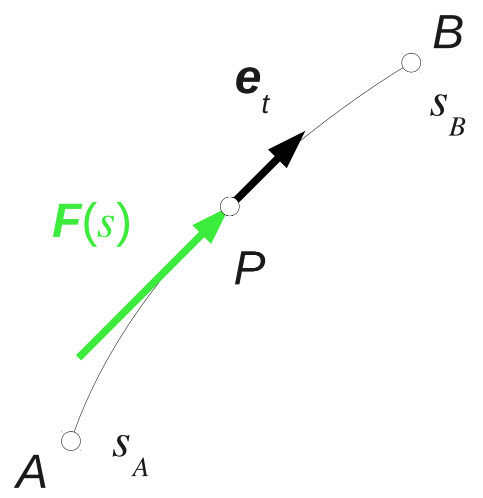
2.1.2 Berechnung der Arbeit

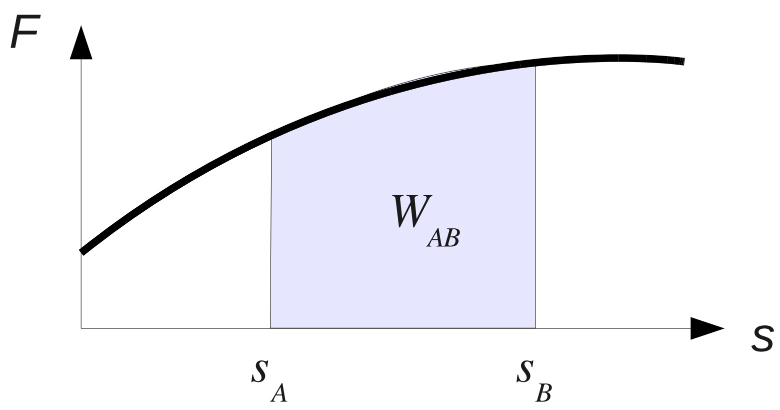
- Kraft mit ortsabhängiger Größe tangential zum Weg:
  - Mit $\boldsymbol{F}(s) = F(s)\boldsymbol{e}_t$ und $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_t\, ds$ gilt:

$$W_{AB} = \int_{C_{AB}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{s_A}^{s_B} F(s)\, \boldsymbol{e}_t \cdot \boldsymbol{e}_t\, ds$$

$$= \int_{s_A}^{s_B} F(s)\, ds$$

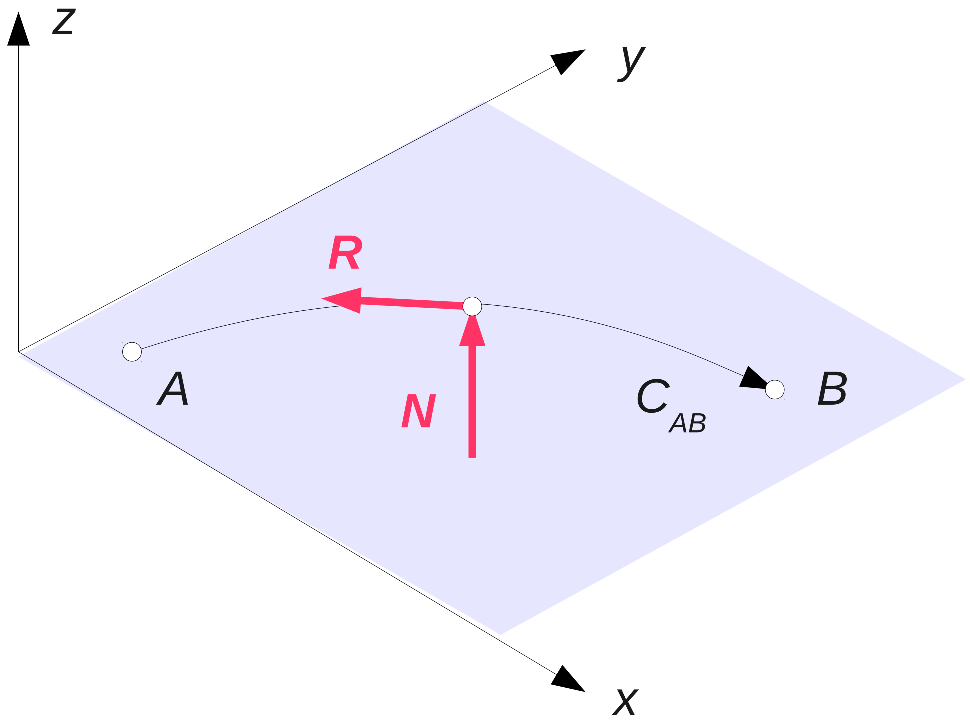
  - Wird die Kraft F über dem Weg s aufgetragen, so entspricht die Arbeit der Fläche unter der Kurve.





2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Reibungsarbeit:



- Ein Massenpunkt bewegt sich auf einer rauen Oberfläche von *A* nach *B*.
- Dabei wirkt auf ihn die Reibungskraft

$$R = \mu N$$

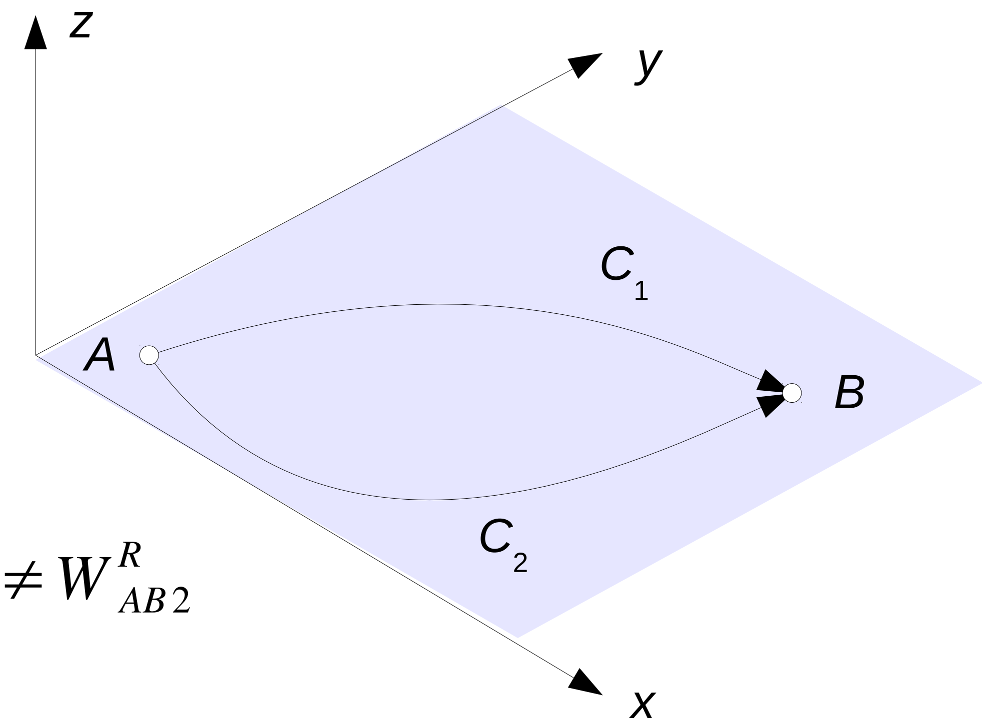
tangential zum Weg.

- Sie verrichtet die Arbeit

$$W_{AB}^{R} = -\mu N \left(s_B - s_A \right) = -\mu N L_{AB}$$

2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Die Reibungsarbeit hängt vom Weg ab, auf dem der Massenpunkt von *A* nach *B* gebracht wird:
  - Die Länge L_{AB} ist wegabhängig.
  - Der Reibungskoeffizient kann unterschiedlich sein.
  - Die Normalkraft N kann unterschiedlich sein.



$$W^R_{AB1} \neq W^R_{AB2}$$

2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Federarbeit:

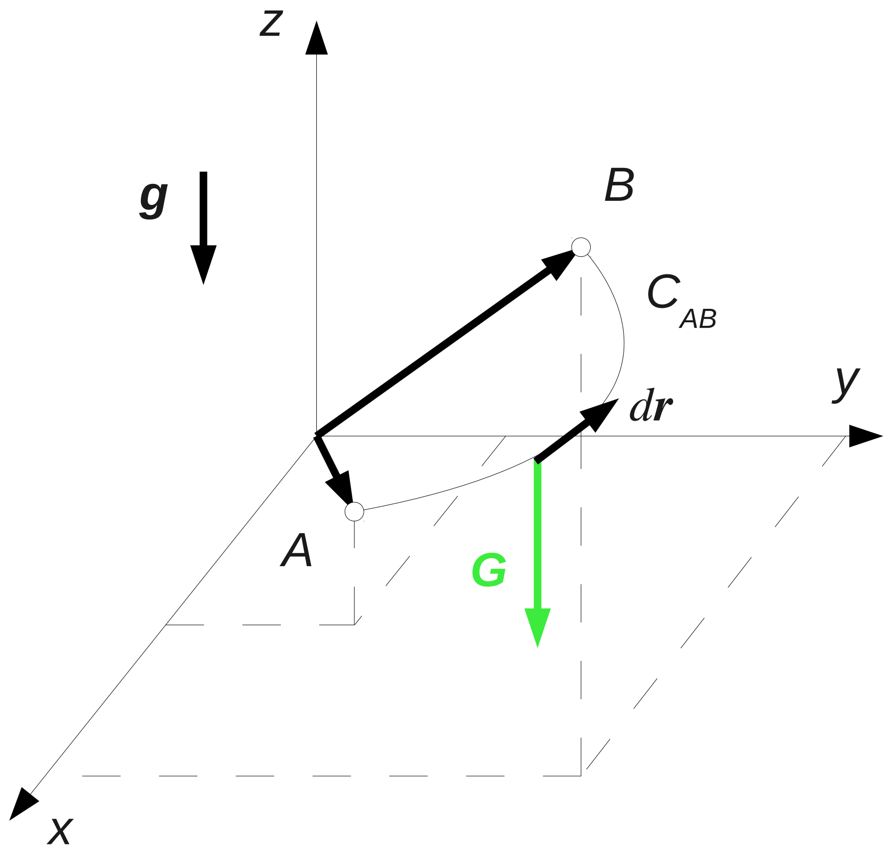
  - Ein Massenpunkt, der von einer Feder gehalten wird, bewegt sich von der Stelle s_A an die Stelle s_B.
  - Dabei greift an ihm die Federkraft $F_F(s) = c(s - s_0)$ an.
  - Die Federkraft verrichtet die Arbeit

$$W_{AB}^F = -\int_{s_A}^{s_B} c(s - s_0)\,ds = -\frac{1}{2}c\left[(s_B - s_0)^2 - (s_A - s_0)^2\right]$$

2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Hubarbeit:
  - Ein Massenpunkt der Masse m bewegt sich entlang der Bahn C_{AB} vom Ort A an den Ort B.
  - Dabei wirkt auf ihn die Gewichtskraft

$$\boldsymbol{G} = -m\,g\,\boldsymbol{e}_z$$



2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Für das Streckenelement gilt: $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x\,dx + \boldsymbol{e}_y\,dy + \boldsymbol{e}_z\,dz$
- Damit berechnet sich die von der Gewichtskraft verrichtete Arbeit zu

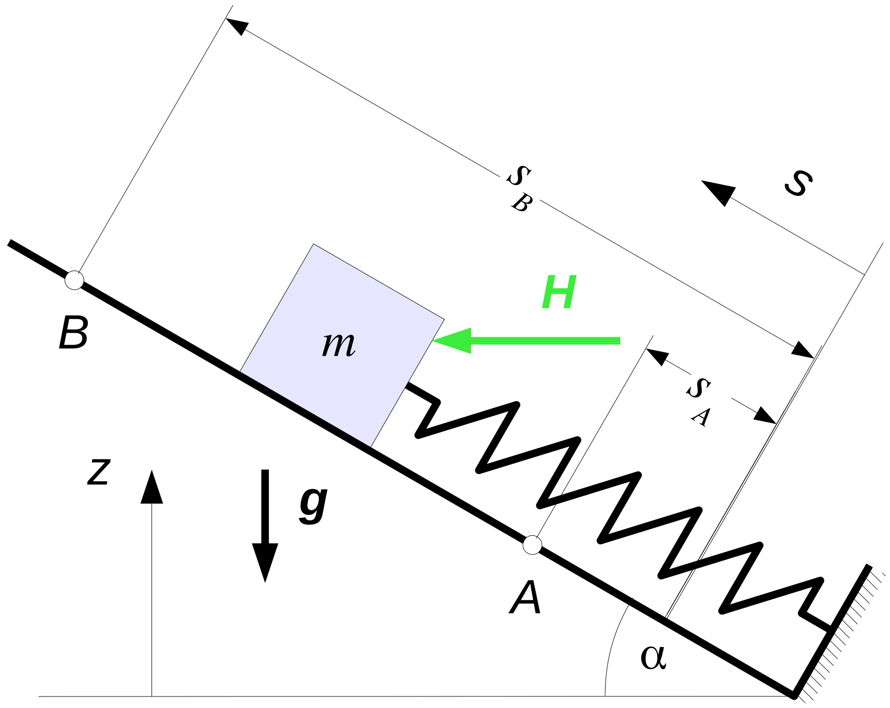
$$W_{AB}^{G} = \int_{C_{AB}} \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_{AB}} \left(-m\,g\,\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_x\,dx + \boldsymbol{e}_y\,dy + \boldsymbol{e}_z\,dz\right)$$

$$= -\int_{z_A}^{z_B} m\,g\,dz = -m\,g\left(z_B - z_A\right)$$

- Die von der Gewichtskraft verrichtete Arbeit wird als *Hubarbeit* bezeichnet.
- Sie hängt nur von der Höhendifferenz ab.

2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Beispiel:
  - Die Masse m wird auf der schiefen Ebene reibungsfrei vom Ort *A* an den Ort *B* verschoben.
  - Dabei greifen an ihr die folgenden Kräfte an:
    - Gewichtskraft G
    - Horizontalkraft H
    - Federkraft: $F_F = c\,s$ $(s_0 = 0)$

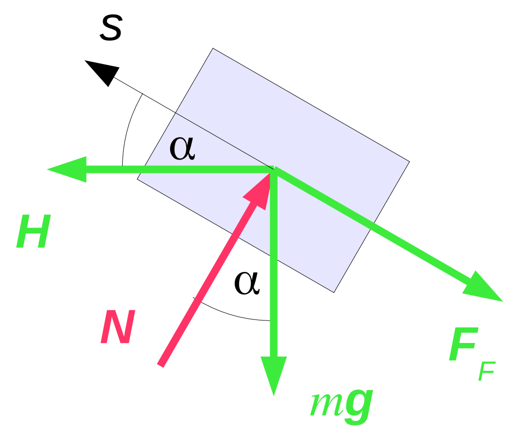


2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Zu berechnen ist die gesamte Arbeit aller Kräfte, die an der Masse angreifen.
- Zahlenwerte:
  - Masse $m = 10$ kg
  - Weg $s_A = 0,5$ m
  - Weg $s_B = 2,5$ m
  - Federkonstante $c = 30$ N/m
  - Horizontalkraft $H = 400$ N
  - Winkel $\alpha = 30°$

2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Kräfte an der freigeschnittenen Masse:
  - Federkraft $\boldsymbol{F}_F$
  - Normalkraft $\boldsymbol{N}$
  - Gewichtskraft $m\boldsymbol{g}$
  - Horizontalkraft $\boldsymbol{H}$



- Horizontalkraft $\boldsymbol{H}$:

$$W_{AB}^{H}=H\cos(\alpha)(s_B-s_A)=400\,\mathrm{N}\cdot\cos(30°)\cdot 2\,\mathrm{m}=\underline{692{,}8\,\mathrm{J}}$$

- Normalkraft $\boldsymbol{N}$:
  - Die Normalkraft $\boldsymbol{N}$ steht senkrecht auf der Bahn und verrichtet daher keine Arbeit.

2.1.2 Berechnung der Arbeit

- Federkraft $\boldsymbol{F}_F$:

$$W_{AB}^F = -\frac{1}{2} c \left(s_B^2 - s_A^2 \right) = -15\,\mathrm{N/m} \left(2{,}5^2\,\mathrm{m}^2 - 0{,}5^2\,\mathrm{m}^2 \right) = \underline{-90\,\mathrm{J}}$$

- Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$:

$$W_{AB}^G = -m\,g \left(z_B - z_A \right) = -m\,g \left(s_B - s_A \right) \sin(\alpha)$$

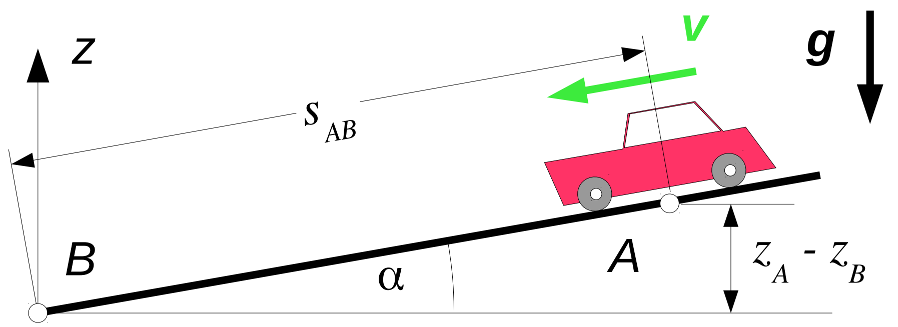
$$= -10\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \cdot \left(\sin 30\,° \right) = \underline{-98{,}1\,\mathrm{J}}$$

- Gesamte Arbeit: $W_{AB} = W_{AB}^H + W_{AB}^F + W_{AB}^G = \underline{504{,}7\,\mathrm{J}}$

2.1.3 Anwendungen

- Beispiel 1: Bremsendes Fahrzeug
  - Ein Fahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit v eine geneigte Straße hinunter.
  - Der Fahrer tritt heftig auf die Bremse, so dass das Fahrzeug mit blockierten Rädern rutscht.
  - Wie weit rutscht das Fahrzeug?

- Gegeben:
  - Fahrzeugmasse m
  - Geschwindigkeit v
  - Neigungswinkel α
  - Reibungskoeffizient μ



2.1.3 Anwendungen

- Kräfte am freigeschnittenen Fahrzeug:

$$\sum F_n = 0 \;:\; N - m\,g\cos(\alpha) = 0$$

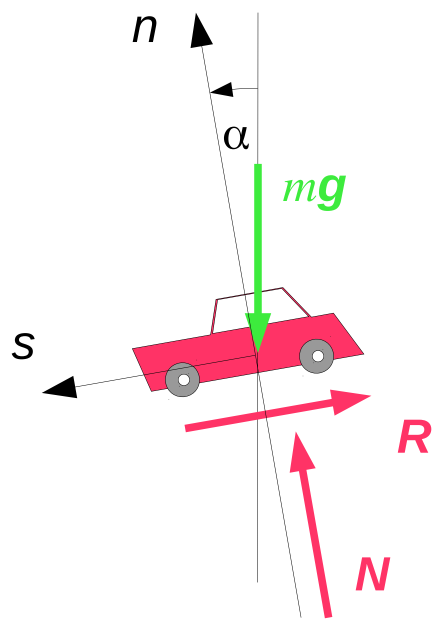
$$\rightarrow \quad N = m\,g\cos(\alpha)$$

$$R = \mu\,N = \mu\,m\,g\cos(\alpha)$$

- Hubarbeit:

$$z_A - z_B = s_{AB}\sin(\alpha)$$

$$W_{AB}^G = -m\,g\,(z_B - z_A) = m\,g\,(z_A - z_B) = m\,g\,s_{AB}\sin(\alpha)$$



2.1.3 Anwendungen

- Reibungsarbeit: $W_{AB}^{R} = -R\, s_{AB} = -\mu\, m\, g \cos(\alpha)\, s_{AB}$

- Kinetische Energien: $E_A^K = \frac{1}{2} m\, v^2 , \quad E_B^K = 0$

- Arbeitssatz: $E_B^K - E_A^K = W_{AB}^G + W_{AB}^R$

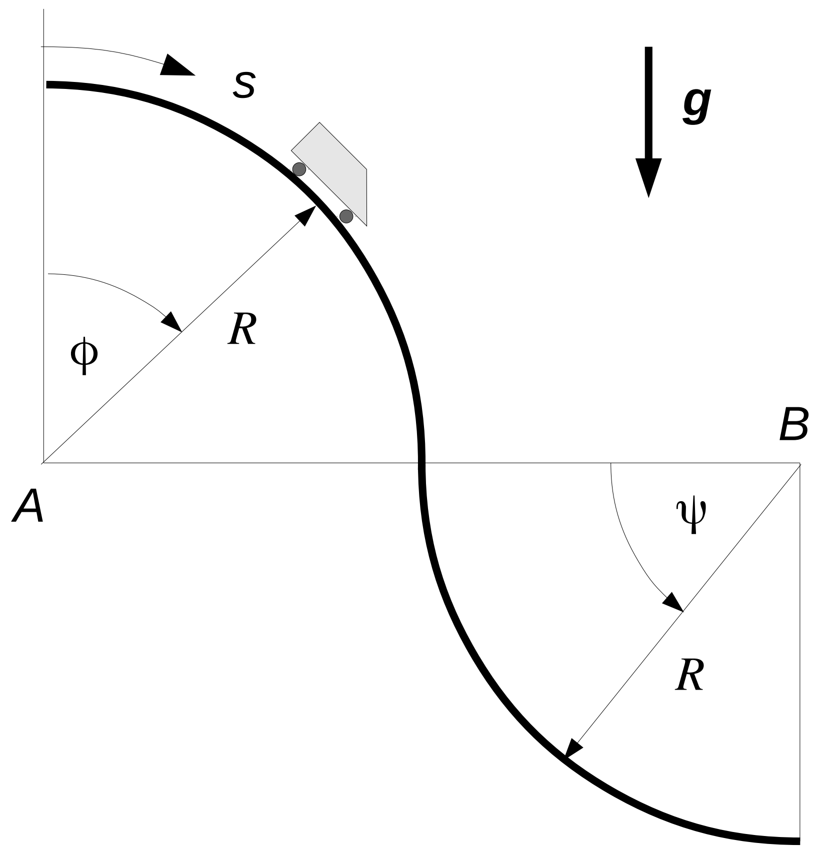
$$-\frac{1}{2} m\, v^2 = m\, g \sin(\alpha)\, s_{AB} - \mu\, m\, g \cos(\alpha)\, s_{AB}$$

$$= m\, g\, s_{AB} \left(\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha) \right)$$

- Ergebnis: $s_{AB} = \frac{v^2}{2\, g} \frac{1}{\mu \cos(\alpha) - \sin(\alpha)}$

2.1.3 Anwendungen

- Beispiel 2: Achterbahn

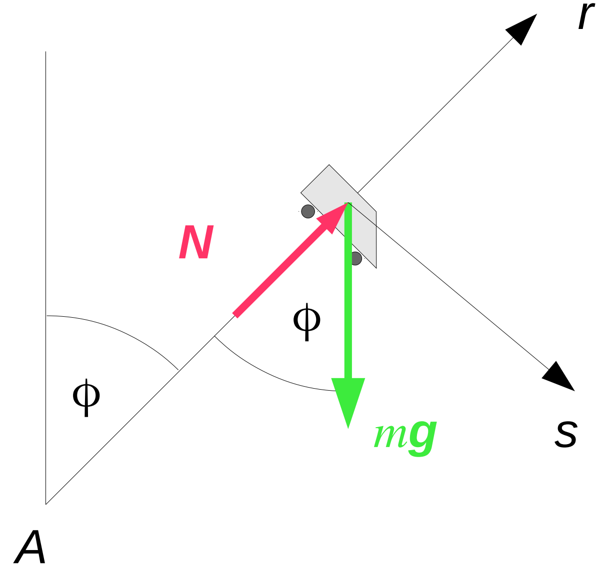


- Gegeben:
  - Masse m des Wagens
  - Radius R
  - Anfangsgeschwindigkeit $v(s=0) = v_0$
- Gesucht:
  - Geschwindigkeit $v(s)$
  - Beschleunigung $a(s)$

2.1.3 Anwendungen

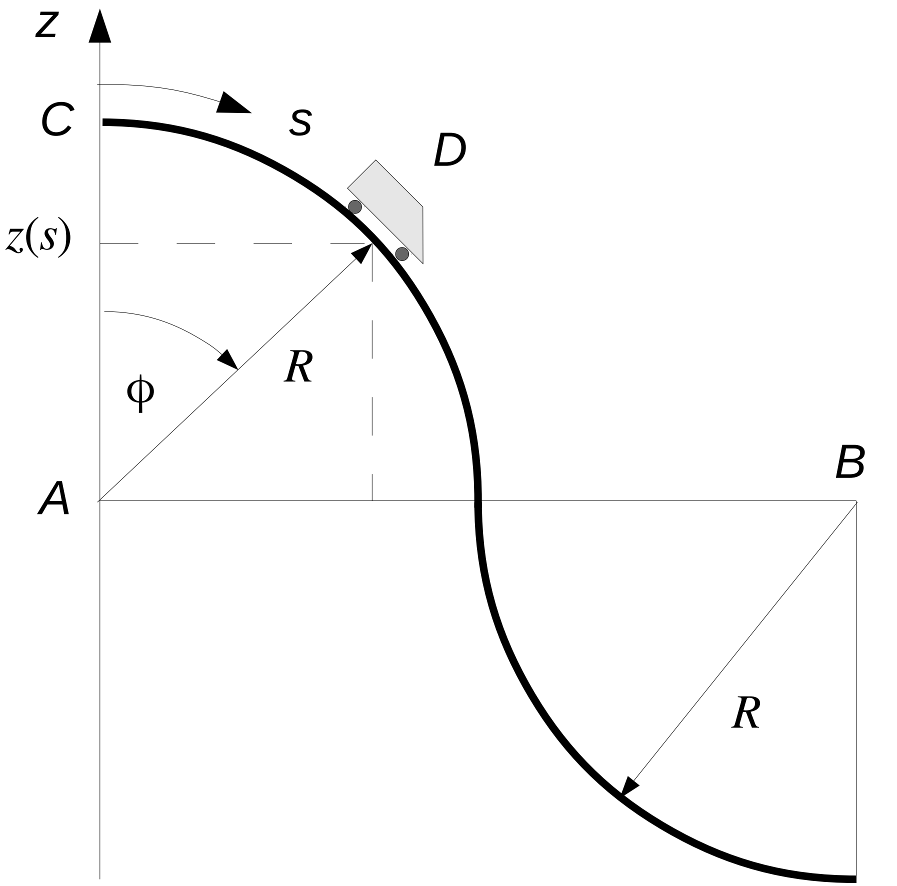
- Wagen freigeschnitten:
  - Nur die Gewichtskraft $m\boldsymbol{g}$ verrichtet Arbeit.
  - Die Normalkraft $\boldsymbol{N}$ steht immer senkrecht auf der Bahn.
  - Allgemein gilt:

Führungskräfte verrichten keine Arbeit.



2.1.3 Anwendungen

- Geometrie:



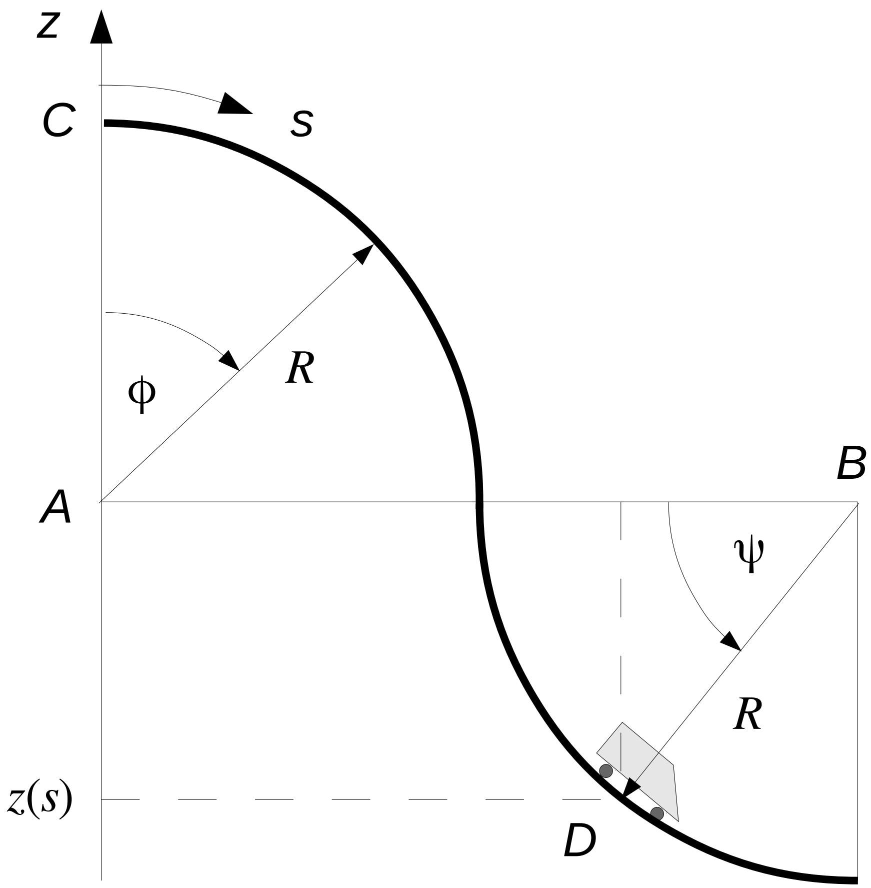
- Kreis um *A*:

$$s = R\phi \quad (\phi \text{ im Bogenmaß})$$

$$z(\phi) = R\cos(\phi)$$

$$z(s) = R\cos\left(\frac{s}{R}\right)$$

2.1.3 Anwendungen



- Kreis um *B*:

$$s = R\,\frac{\pi}{2} + R\,\psi$$

(ψ im Bogenmaß)

$$z(\psi) = -R\sin(\psi)$$

$$z(s) = -R\sin\left(\frac{s}{R} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= R\cos\left(\frac{s}{R}\right)$$

2.1.3 Anwendungen

- Hubarbeit:

$$W_{CD}^G = -m\,g\left(z(s) - z(0)\right) = -m\,g\,R\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right) - 1\right)$$

- Kinetische Energien: $E_C^K = \frac{1}{2} m\,v_0^2,\quad E_D^K = \frac{1}{2} m\,v^2(s)$

- Arbeitssatz: $E_D^K - E_C^K = W_{CD}^G$

$$\frac{1}{2} m\left(v^2(s) - v_0^2\right) = -m\,g\,R\left(\cos\left(\frac{s}{R}\right) - 1\right)$$

$$\rightarrow \quad v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,R\left(1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)}$$

2.1.3 Anwendungen

- Beschleunigung:
  - Bahnbeschleunigung:

$$a_t(s) = v\frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} = g\sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

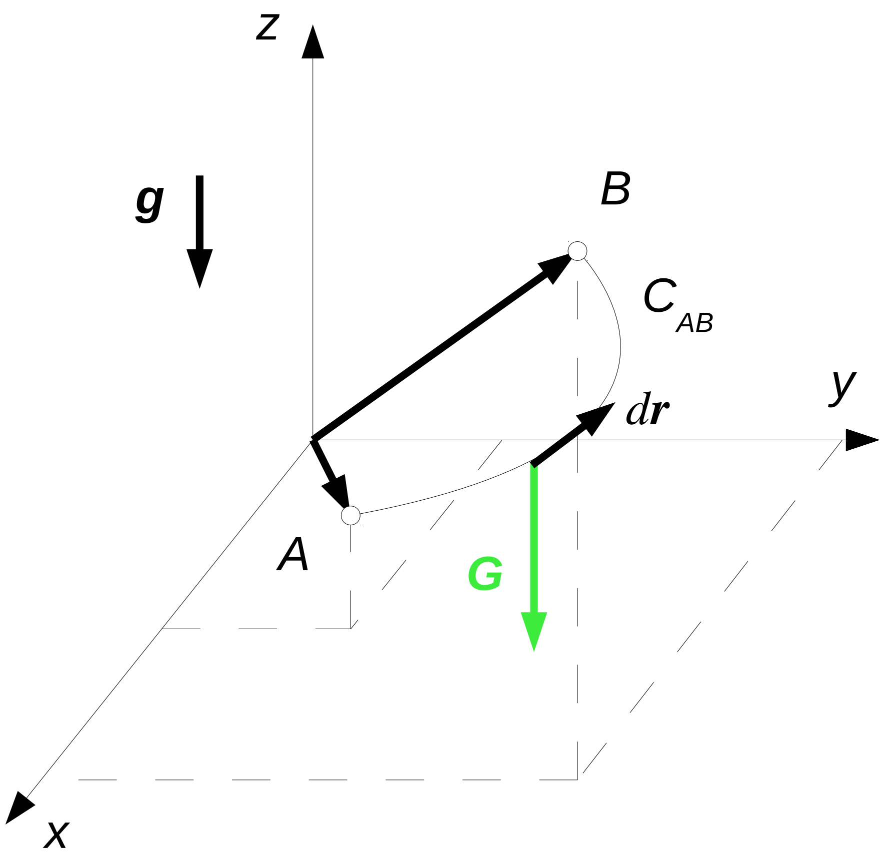
  - Bei einer Kreisbewegung gilt für die Normalbeschleunigung:

$$a_n(s) = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} + 2g\left(1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

2.2 Potenzielle Energie

- Gewichtskraft:
  - Die Arbeit der Gewichtskraft ist unabhängig von der Bahnkurve. Sie hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bahn ab:

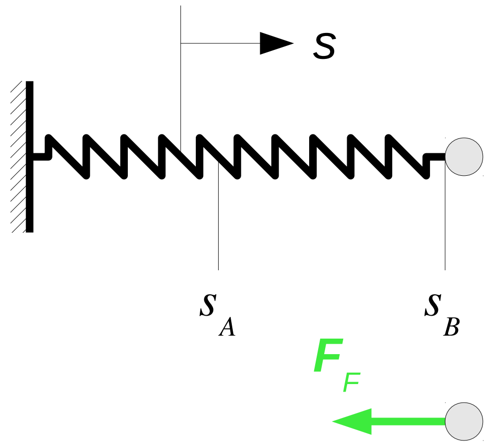
$$W_{AB}^{G} = -G\left(z_B - z_A\right)$$



2.2 Potenzielle Energie

- Federkraft:
  - Die Arbeit, die die Federkraft verrichtet, hängt nur von der Dehnung oder Stauchung der Feder ab, unabhängig davon, wie die Kraft aufgebracht wurde.
  - Für $s_0 = 0$ gilt:

$$W_{AB}^F = -\frac{1}{2} c \left(s_B^2 - s_A^2 \right)$$

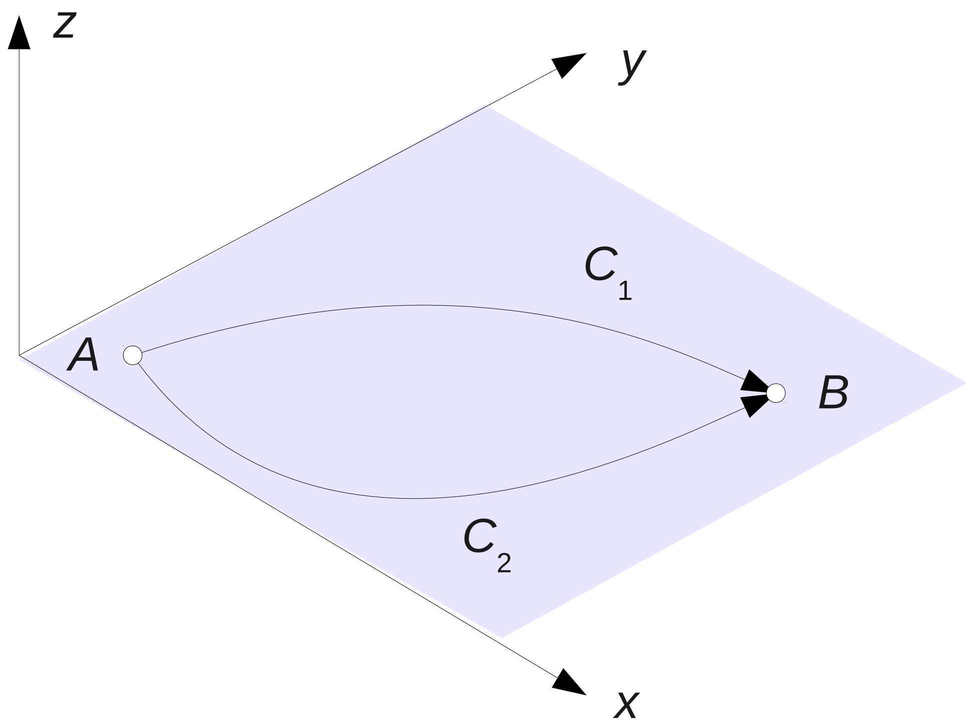


2.2 Potenzielle Energie

- Reibungskraft:
  - Die Arbeit, die die Reibungskraft verrichtet, hängt von der Bahnkurve ab:

$$\int_{C_1} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{r} = -\mu_1 N L_1$$

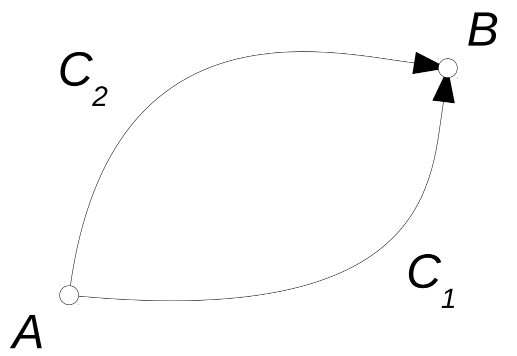
$$\int_{C_2} \boldsymbol{R} \cdot d\boldsymbol{r} = -\mu_2 N L_2$$



2.2 Potenzielle Energie

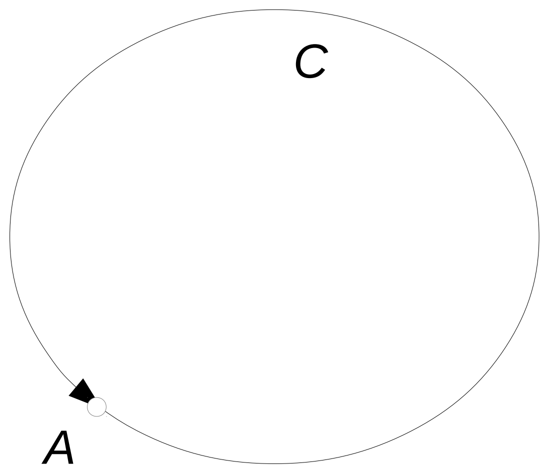
- Konservative Kräfte:
  - Eine Kraft heißt *konservativ*, wenn die Arbeit, die sie an einem Massenpunkt verrichtet, nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bahn abhängt, die der Massenpunkt beschreibt, aber unabhängig von der Bahnkurve ist.
  - Die Gewichtskraft und die Federkraft sind konservative Kräfte.

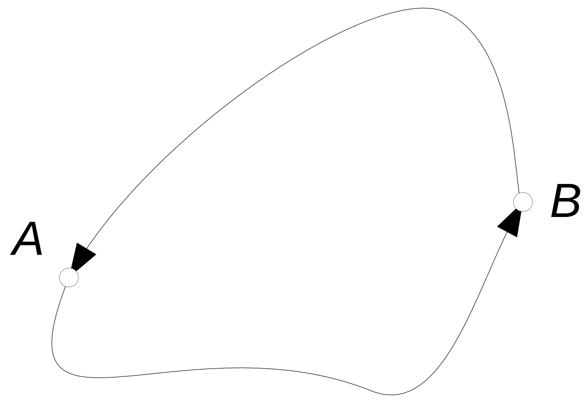
$$W_{AB} = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$



2.2 Potenzielle Energie

- Arbeit einer konservativen Kraft entlang eines geschlossenen Weges:





$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r} = W_{AA} = 0$$

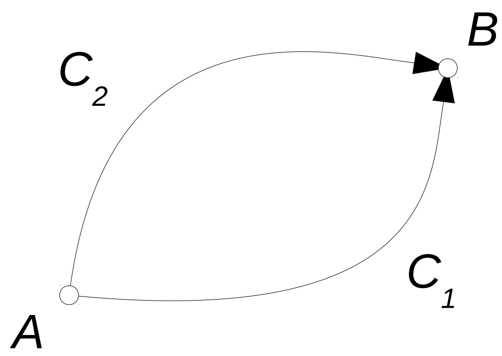
$$W_{AB} + W_{BA} = 0 \;\rightarrow\; W_{BA} = -W_{AB}$$

„Arbeit bleibt erhalten“

2.2 Potenzielle Energie

- Dissipative Kräfte:
  - Eine Kraft heißt *dissipativ*, wenn die Arbeit, die sie an einem Massenpunkt verrichtet, nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt der Bahn abhängt, die der Massenpunkt beschreibt, sondern auch von der Bahnkurve.
  - Reibungskräfte sind dissipative Kräfte.

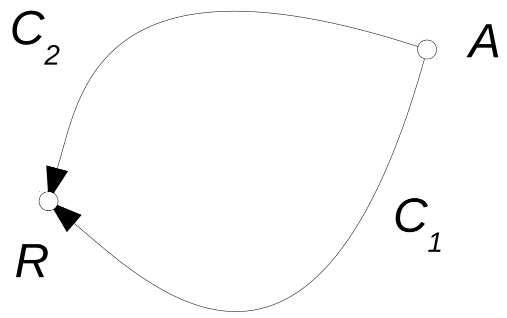
$$\int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r} \neq \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{r}$$



2.2 Potenzielle Energie

- Potenzielle Energie:
  - Die potenzielle Energie einer konservativen Kraft am Ort *A* ist die Arbeit, die die konservative Kraft an dem Massen-punkt verrichtet, wenn er vom Ort *A* in den Bezugspunkt *R* verschoben wird.
  - Die potenzielle Energie hängt vom gewählten Bezugspunkt ab.

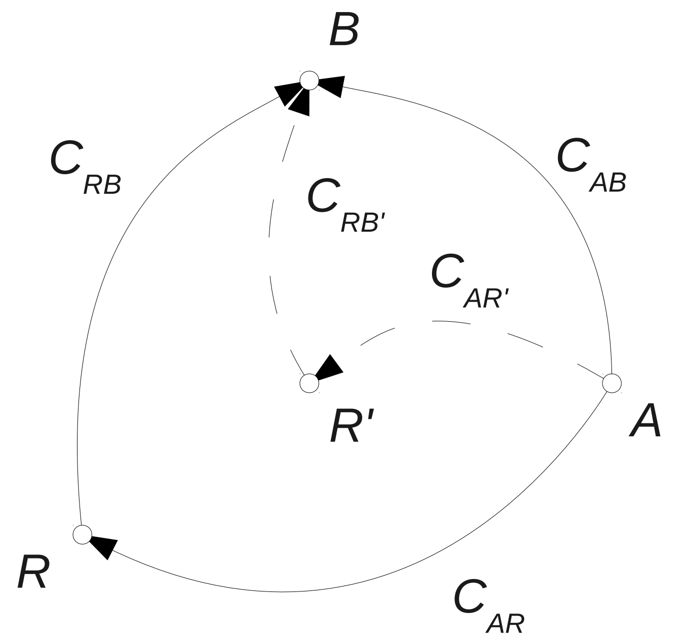
$$E^P(A,R)=W_{AR}=\int_{C_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{C_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$



2.2 Potenzielle Energie

- Wird der Massenpunkt vom Ort *A* an den Ort *B* verschoben, so lässt sich die von einer konservativen Kraft verrichtete Arbeit W_{AB} aus der Differenz der potenziellen Energien berechnen:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= W_{AR} + W_{RB} = W_{AR} - W_{BR} \\ &= E^P(A, R) - E^P(B, R) \\ &= W_{AR'} + W_{R'B} = W_{AR'} - W_{BR'} \\ &= E^P(A, R') - E^P(B, R') \\ &= E^P_A - E^P_B \end{aligned}$$



2.2 Potenzielle Energie

- Potenzielle Energie der Gewichtskraft:
  - Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Gewichtskraft entgegen der *z*-Achse wirkt.
  - Dann gilt:

$$E^G(A, R) = W_{AR}^G = -m g (z_R - z_A) = m g (z_A - z_R)$$

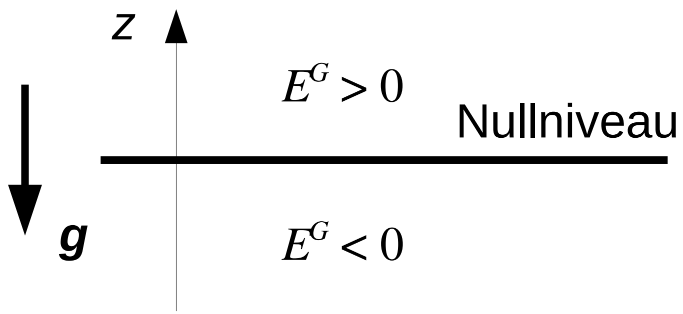
  - Die potenzielle Energie der Gewichtskraft hängt nur von der Höhe des Massenpunktes ab. Sie wird daher als potenzielle Energie der Lage oder *Lageenergie* bezeichnet.
  - Alle Bezugspunkte mit gleicher *z*-Koordinate sind gleichwertig. Sie definieren ein *Nullniveau*.
  - Die Nullniveaus sind Ebenen $z = \text{const}$.

2.2 Potenzielle Energie

- Wird als Bezugspunkt der Koordinatenursprung gewählt, so gilt:

$$E^G(A,O) = m\,g\,z_A$$

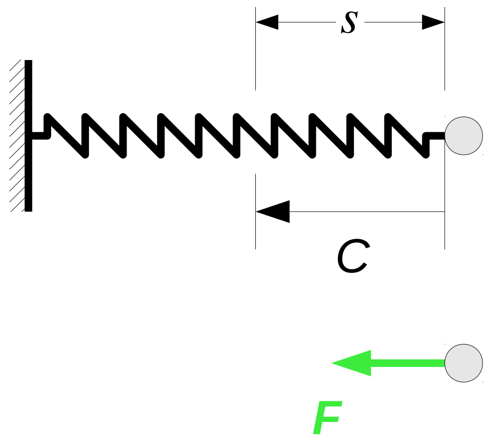
- Die Lageenergie ist negativ, wenn sich der Massenpunkt unterhalb des Nullniveaus befindet.



2.2 Potenzielle Energie

- Potenzielle Energie der Federkraft:
  - Als Bezugspunkt für die potenzielle Energie der Federkraft wird der Zustand der entspannten Feder gewählt.
  - Dann gilt für die potenzielle Energie der Federkraft:

$$E^F(s) = \frac{1}{2} c\, s^2$$



  - Die potenzielle Energie der Federkraft ist immer positiv.
  - Sie wird als *Federenergie* bezeichnet.

2.3 Energieerhaltungssatz

- Arbeitssatz:
  - Der Arbeitssatz lautet: $E_B^K - E_A^K = W_{AB}$
  - Die Arbeit W_{AB} setzt sich zusammen
    - aus der Arbeit $W_{AB}^K = E_A^P - E_B^P$ der konservativen Kräfte, und
    - der Arbeit W_{AB}^D der dissipativen Kräfte.
  - Einsetzen in den Arbeitssatz ergibt: $E_B^K - E_A^K = E_A^P - E_B^P + W_{AB}^D$

$$\rightarrow \boxed{\left(E_B^K + E_B^P\right) - \left(E_A^K + E_A^P\right) = W_{AB}^D}$$

2.3 Energieerhaltungssatz

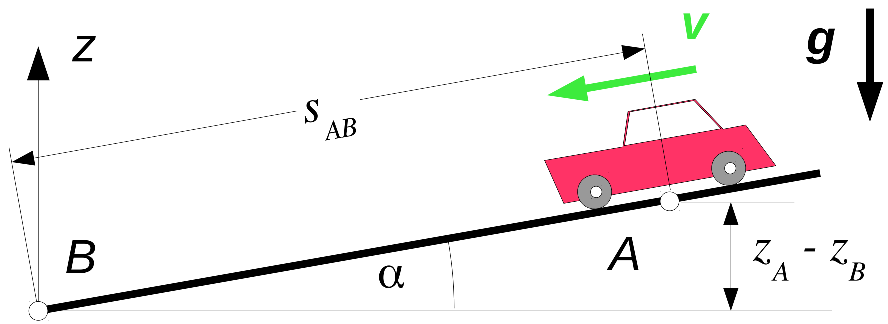
- Die Änderung der Summe aus kinetischer und potenzieller Energie eines Massenpunktes ist gleich der Arbeit der an ihm angreifenden dissipativen Kräfte.
- Die Arbeit der dissipativen Kräfte ist immer negativ.

- Energieerhaltungssatz:
  - Wenn an einem Massenpunkt nur konservative Kräfte angreifen, dann bleibt die Summe der kinetischen und der potenziellen Energie konstant:

$$\boxed{E_B^K + E_B^P = E_A^K + E_A^P}$$

2.3 Energieerhaltungssatz

- Beispiel 1: Bremsendes Fahrzeug
  - Ein Fahrzeug der Masse m fährt mit konstanter Geschwindigkeit v eine geneigte Straße hinunter.
  - Der Fahrer tritt heftig auf die Bremse, so dass das Fahrzeug mit blockierten Rädern rutscht.
  - Wie weit rutscht das Fahrzeug?



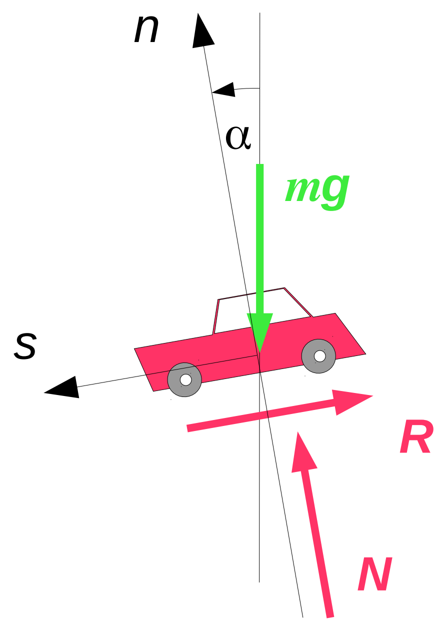
2.3 Energieerhaltungssatz

- Reibungsarbeit:
  - Reibungskraft:

$$\sum F_n = 0 \quad : \quad N - m\,g\cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow \quad N = m\,g\cos(\alpha)$$

$$R = \mu N = \mu\,m\,g\cos(\alpha)$$



  - Reibungsarbeit:

$$W_{AB}^{R} = -R\,s_{AB} = -\mu\,m\,g\cos(\alpha)\,s_{AB}$$

- Bezugspunkt für die Lageenergie:
  - Ort bei Bremsbeginn

2.3 Energieerhaltungssatz

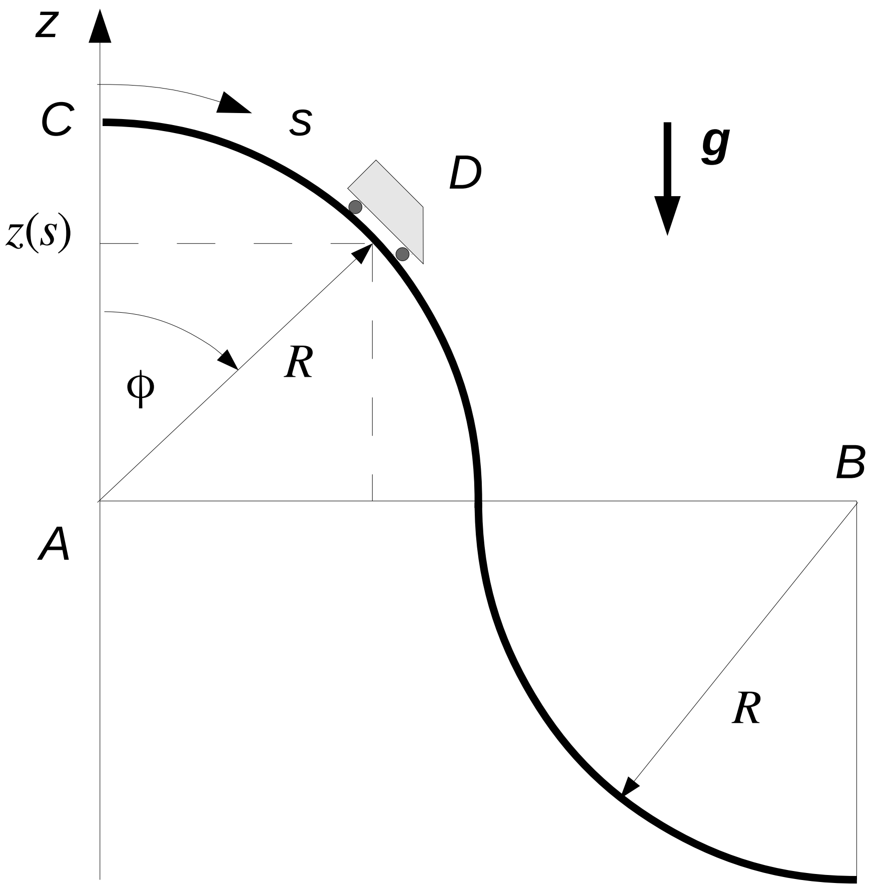
- Ort *A*: Bremsbeginn
  - Kinetische Energie:
    $$E_A^K = \frac{1}{2} m v^2$$
  - Lageenergie:
    $$E_A^G = 0$$
- Ort *B*: Bremsende
  - Kinetische Energie:
    $$E_B^K = 0$$
  - Lageenergie:
    $$E_B^G = -m g s_{AB} \sin(\alpha)$$
- Arbeitssatz: $\left(E_B^K + E_B^G\right) - \left(E_A^K + E_A^G\right) = W_{AB}^R$

$$-m g s_{AB} \sin(\alpha) - \frac{1}{2} m v^2 = -\mu m g s_{AB} \cos(\alpha)$$

$$\rightarrow \quad s_{AB}\left(\mu \cos(\alpha) - \sin(\alpha)\right) = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \quad \rightarrow \quad s_{AB} = \frac{v^2}{2 g} \frac{1}{\mu \cos(\alpha) - \sin(\alpha)}$$

2.3 Energieerhaltungssatz

- Beispiel 2: Achterbahn



- Gegeben:
  - Masse m des Wagens
  - Radius R
  - Anfangsgeschwindigkeit $v(s=0) = v_0$
- Gesucht:
  - Geschwindigkeit $v(s)$

2.3 Energieerhaltungssatz

- Nur die Gewichtskraft verrichtet Arbeit.
- Da die Gewichtskraft eine konservative Kraft ist, gilt der Energieerhaltungssatz.
- Als Bezugspunkt für die Lageenergie wird Punkt *A* gewählt.
- Energien:

	Kinetische Energie	Lageenergie
Ort *C*	$E_C^K = \frac{1}{2} m v_0^2$	$E_C^G = m g R$
Ort *D*	$E_D^K = \frac{1}{2} m v^2(s)$	$E_D^G = m g z(s)$

2.3 Energieerhaltungssatz

- Geometrie: $z(s) = R\cos\left(\frac{s}{R}\right)$

- Energieerhaltungssatz: $E_D^K + E_D^G = E_C^K + E_C^G$

$$\frac{1}{2} m v^2(s) + m g R \cos\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g R$$

$$\rightarrow \quad v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2 g R\left(1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right)}$$

2.4 Massenpunktsysteme

- Arbeitssatz für einen Massenpunkt:
  - Für jeden einzelnen Massenpunkt mit Index i gilt der Arbeitssatz

$$E_{Bi}^K - E_{Ai}^K = W_{ABi}$$

  - Für die kinetische Energie des Massenpunktes gilt:

$$E_{Ai}^K = \frac{1}{2} m_i v_{Ai}^2 , \quad E_{Bi}^K = \frac{1}{2} m_i v_{Bi}^2$$

  - W_{ABi} ist die von den am Massenpunkt angreifenden äußeren <u>und</u> inneren Kräften verrichtete Arbeit:

$$W_{ABi} = W_{ABi}^{(X)} + W_{ABi}^{(I)}$$

2.4 Massenpunktsysteme

- Für die Arbeit der äußeren Kräfte gilt: $W_{ABi}^{(X)} = \int_{C_i} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{i}} \cdot d\,\boldsymbol{r}$
- Für die Arbeit der inneren Kräfte gilt: $W_{ABi}^{(I)} = \int_{C_i} \left(\sum_j \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ij}} \right) \cdot d\,\boldsymbol{r}$
- Die Summe erstreckt sich über alle inneren Kräfte $\boldsymbol{F}_{ij}$, die am Massenpunkt mit Index i angreifen.

2.4 Massenpunktsysteme

- Arbeitssatz für das Massenpunktsystem:
  - Summation über die einzelnen Massenpunkte ergibt:

$$\sum_i \left(E_{Bi}^K - E_{Ai}^K\right) = \sum_i W_{ABi}^{(X)} + \sum_i W_{ABi}^{(I)}$$

  - Kinetische Energie des Massenpunktsystems:

$$E^K = \sum_i E_i^K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

  - Arbeit der äußeren Kräfte: $W_{AB}^{(X)} = \sum_i W_{ABi}^{(X)}$
  - Arbeit der inneren Kräfte: $W_{AB}^{(I)} = \sum_i W_{ABi}^{(I)} = \sum_i \int_{C_i} \left(\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\right) \cdot d\boldsymbol{r}$

2.4 Massenpunktsysteme

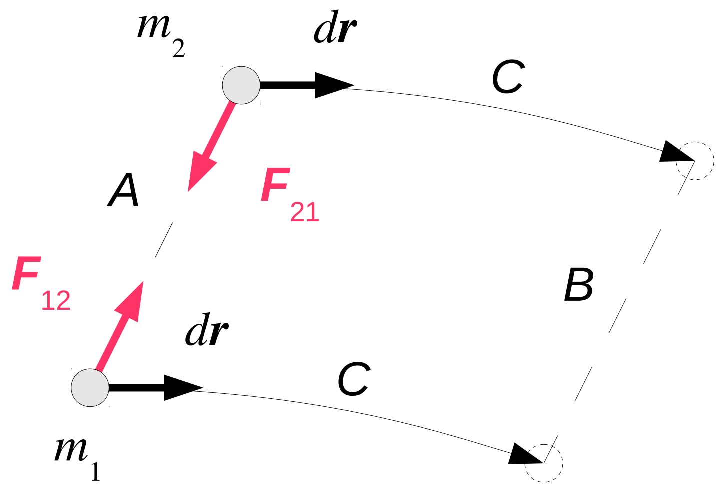
- Damit lautet der Arbeitssatz für das Massenpunktsystem:

$$\boxed{E_B^K - E_A^K = W_{AB}^{(X)} + W_{AB}^{(I)}}$$

- Der Weg C_i, den der Massenpunkt i beschreibt, stimmt im Allgemeinen nicht mit dem Weg C_j überein, den der Massenpunkt j beschreibt.
- Daher ist trotz $\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} = \mathbf{0}$ die von den inneren Kräften verrichtete Arbeit im Allgemeinen nicht null.

2.4 Massenpunktsysteme

- Starre Bindung:
  - Liegt zwischen zwei Massenpunkten eine starre Bindung vor, so beschreiben sie bei einer Translation den gleichen Weg.
  - Für die Arbeit der inneren Kräfte folgt daraus:

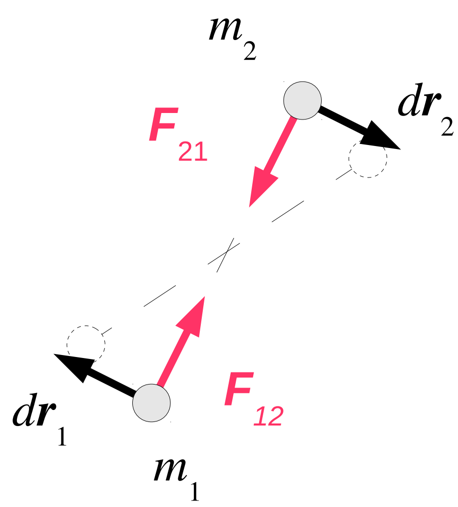


$$W_{AB}^{(I)} = \int_C \left(\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} \right) \cdot d\,\boldsymbol{r} = 0$$

2.4 Massenpunktsysteme

- Bei einer Rotation steht das Wegelement $d\boldsymbol{r}$ senkrecht auf der Verbindungslinie der beiden Massenpunkte.
- Wegen $\boldsymbol{F}_{12} \cdot d\,\boldsymbol{r}_1 = 0, \quad \boldsymbol{F}_{21} \cdot d\,\boldsymbol{r}_2 = 0$

  gilt also ebenfalls: $W_{AB}^{(I)} = 0$
- Ergebnis:



Bei einem Massenpunktsystem mit starren Bindungen verrichten die inneren Kräfte keine Arbeit.

2.4 Massenpunktsysteme

- Für Systeme mit starren Bindungen vereinfacht sich der Arbeitssatz zu

$$\boxed{E_B^K - E_A^K = W_{AB}^{(X)}}$$

- Wenn die äußeren Kräfte konservativ sind, dann kann die von ihnen verrichtete Arbeit aus der Differenz der potenziellen Energien berechnet werden:

$$W_{AB}^{(X)} = E_A^P - E_B^P = \sum_i \left(E_{A\,i}^P - E_{B\,i}^P \right)$$

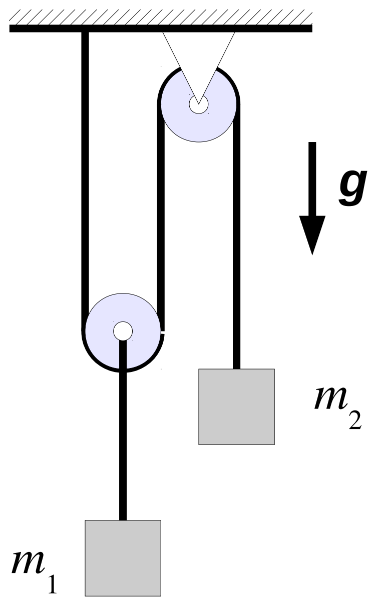
- Dann folgt aus dem Arbeitssatz der Energieerhaltungssatz:

$$\boxed{E_B^K + E_B^P = E_A^K + E_A^P}$$

2.4 Massenpunktsysteme

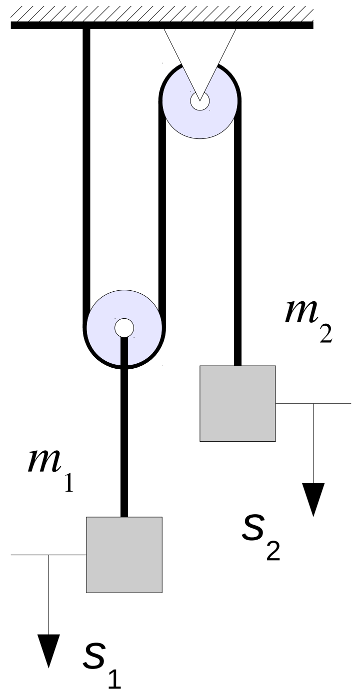
- Dabei kann für jeden Massenpunkt ein eigener Bezugspunkt gewählt werden.

- Beispiel: Flaschenzug
  - Aufgabenstellung:
    - Die beiden Massen m_1 und m_2 sind durch ein masseloses dehnstarres Seil verbunden, das über masselose Rollen läuft.
    - Wie groß sind die Beschleunigungen, wenn das System aus der Ruhe losgelassen wird?



2.4 Massenpunktsysteme

- Wahl der Freiheitsgrade:
  - Die Lagekoordinaten s_1 und s_2 der beiden Massen werden ab der Ausgangslage nach unten gemessen.
- Kinematische Bindung:
  - $2s_1 + s_2 = 0 \;\rightarrow\; \dot{s}_2 = -2\dot{s}_1$
- Innere Kräfte:
  - Da eine starre Bindung vorliegt, verrichten die inneren Kräfte keine Arbeit.



2.4 Massenpunktsysteme

- Äußere Kräfte:
  - Als äußere Kraft wirkt die Gewichtskraft. Sie ist eine konservative Kraft.
  - Das Nullniveau der Lageenergie wird jeweils in die Ausgangslage der Massen gelegt.
  - Der Ausgangszustand wird als Zustand *A* und der ausgelenkte Zustand als Zustand *B* bezeichnet. Dann gilt für die Lageenergien:

	Masse 1	Masse 2
Zustand *A*	$E_{A1}^G = 0$	$E_{A2}^G = 0$
Zustand *B*	$E_{B1}^G = -m_1 g s_1$	$E_{B2}^G = -m_2 g s_2$

2.4 Massenpunktsysteme

- Kinetische Energie:
  - Da das System am Anfang in Ruhe ist, gilt: $E_A^K = 0$
  - Für die kinetische Energie im ausgelenkten Zustand gilt:

$$E_B^K = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2^{\,2}$$

- Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_1 \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2^2 - m_1 g s_1 - m_2 g s_2 = 0$
  - Mit der kinematischen Bindung folgt daraus:

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{s}_1^2 + 2 m_2 \dot{s}_1^2 - m_1 g s_1 + 2 m_2 g s_1 = 0$$

2.4 Massenpunktsysteme

- Geschwindigkeit:
  - Mit $\dot{s}_1 = v_1(s_1)$ folgt aus dem Energieerhaltungssatz:

$$v_1(s_1) = \pm\sqrt{2\,\frac{m_1 - 2\,m_2}{m_1 + 4\,m_2}\,g\,s_1}$$

  - Für $m_1 > 2m_2$ muss s_1 positiv sein. Die Masse m_1 bewegt sich nach unten. Es ist das positive Vorzeichen der Wurzel zu nehmen.
  - Für $m_1 < 2m_2$ muss s_1 negativ sein. Die Masse m_1 bewegt sich nach oben. Es ist das negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen.

2.4 Massenpunktsysteme

- Beschleunigungen:
  - Die Geschwindigkeit v_1 ist als Funktion des Weges s_1 bekannt.
  - Daraus berechnet sich die Beschleunigung a_1 zu

$$a_1 = \frac{1}{2} \frac{dv_1^2}{ds_1} = \frac{m_1 - 2\,m_2}{m_1 + 4\,m_2}\, g$$

  - Aus der kinematischen Bindung folgt:

$$a_2 = -2\,a_1 = -2\,\frac{m_1 - 2\,m_2}{m_1 + 4\,m_2}\, g$$

2.5 Leistung und Wirkungsgrad

- Leistung:
  - Leistung ist definiert als Arbeit pro Zeiteinheit:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

  - Die Einheit der Leistung ist: $1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W}$ (Watt)
  - Aus der Definition der Arbeit folgt: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot d\,\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\,\boldsymbol{r}}{dt}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}$$

2.5 Leistung und Wirkungsgrad

- Wirkungsgrad:
  - Der mechanische Wirkungsgrad η einer Maschine ist definiert als das Verhältnis der abgegebenen Nutzleistung P_N zur aufgewendeten Leistung P_A:

$$\boxed{\eta = \frac{P_N}{P_A}}$$

  - Wegen der stets auftretenden Verluste ist $\eta < 1$.

2.5 Leistung und Wirkungsgrad

- Beispiel:
  - Ein PKW fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit v von $60\ \mathrm{km/h}$ auf ebener Straße.
  - Die Motorleistung P_A beträgt $30\ \mathrm{kW}$.
  - Der Wirkungsgrad η hat einen Wert von $0{,}8$.
  - Wie groß ist die Antriebskraft F ?

2.5 Leistung und Wirkungsgrad

- Für die Nutzleistung gilt: $P_N = F\,v$

- Daraus folgt: $\eta = \dfrac{F\,v}{P_A} \rightarrow \eta \dfrac{P_A}{v} = F$

- Zahlenwert: $F = \dfrac{0{,}8 \cdot 30 \cdot 10^3\,\mathrm{Nm/s}}{60/3{,}6\,\mathrm{m/s}} = \underline{1{,}44\,\mathrm{kN}}$