3. Impuls und Drall

- Die Integration der Bewegungsgleichung entlang der Bahn führte auf die Begriffe Arbeit und Energie.
- Die Integration der Bewegungsgleichung bezüglich der Zeit führt auf die Begriffe *Kraftstoß* und *Impuls*.
- Wie bei konservativen Systemen die Energie eine Erhaltungsgröße ist, so ist bei Systemen, auf die keine äußere Kraft wirkt, der Impuls eine Erhaltungsgröße.
- Die Suche nach einer weiteren Erhaltungsgröße für Systeme, auf die kein äußeres Moment wirkt, führt auf den Begriff des *Dralls*.

3. Impuls und Drall

3.1 Impuls

3.2 Drall

3.1 Impuls

- Impuls eines Massenpunktes:
  - Das Newtonsche Grundgesetz lautet: $m\,\boldsymbol{a} = m\,\dfrac{d\,\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}$
  - Integration über die Zeit ergibt

$$\int_{t_A}^{t_B} m\,\frac{d\,\boldsymbol{v}}{dt}\,dt = m\,\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{B}} - m\,\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{A}} = \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{F}\,dt$$

  - Die Größe

$$\boxed{\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}}$$

wird als *Impuls* des Massenpunkts bezeichnet.

3.1 Impuls

- Das Newtonsche Grundgesetz besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses gleich der resultierenden äußeren Kraft ist:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}}$$

- Es wird daher auch als *Impulssatz* bezeichnet.
- Die Gleichung

$$\boxed{m\,\boldsymbol{v}_B - m\,\boldsymbol{v}_A = \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{F}\,dt}$$

wird als *integrierter Impulssatz* bezeichnet.

3.1 Impuls

- Die Größe

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{F}\, dt$$

heißt *Kraftstoß*. Sie hat die Einheit Ns.

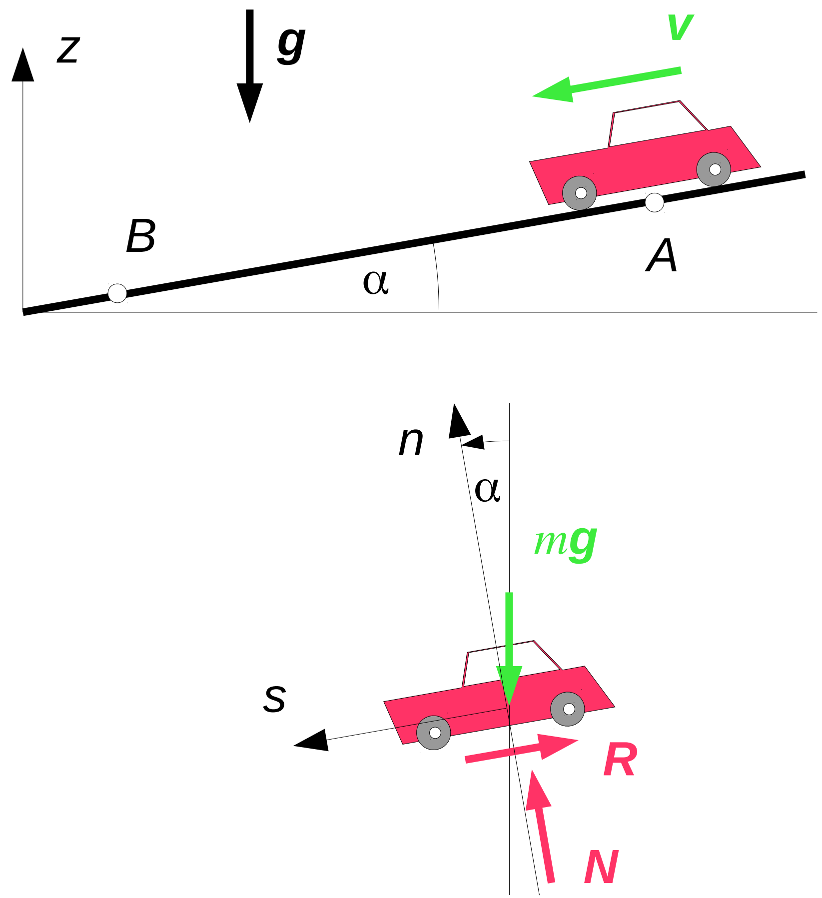
- Wenn der Kraftstoß null ist, gilt der *Impulserhaltungssatz*:

$$\boxed{m\boldsymbol{v}_B = m\boldsymbol{v}_A}$$

- Insbesondere gilt:
  - Wenn keine Kräfte auf einen Massenpunkt einwirken, ändert sich sein Impuls nicht. Sein Impuls bleibt erhalten.

3.1 Impuls

- Beispiel: Bremsendes Fahrzeug
  - Ein Fahrzeug der Masse m fährt mit konstanter Geschwindigkeit v eine geneigte Straße hinunter.
  - Der Fahrer tritt heftig auf die Bremse, so dass das Fahrzeug mit blockierten Rädern rutscht.
  - Nach welcher Zeit kommt das Fahrzeug zum Stillstand?



3.1 Impuls

- Kräfte in Fahrtrichtung:
  - Gewichtskraft:

$$G_s = m\, g \sin(\alpha)$$

  - Reibungskraft:

$$R = \mu\, m\, g \cos(\alpha)$$

- Zeitpunkt t_A: Bremsbeginn
  - Impuls: $p_A = m\, v$
- Zeitpunkt t_B: Bremsende
  - Impuls: $p_B = 0$

- Integrierter Impulssatz in Fahrtrichtung:

$$p_B - p_A = (G_S - R)(t_B - t_A)$$

- Ergebnis:

$$t_B - t_A = \frac{p_B - p_A}{G_S - R}$$
$$= \frac{-m\, v}{m\, g \sin(\alpha) - \mu\, m\, g \cos(\alpha)}$$
$$= \frac{v}{g(\mu \cos(\alpha) - \sin(\alpha))}$$

3.1 Impuls

- Impuls eines Systems von Massenpunkten:
  - Der Gesamtimpuls eines Massenpunktsystems ist definiert durch
    $$\boldsymbol{p}=\sum_i \boldsymbol{p}_i=\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i=\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$$
  - Mit der Definition des Schwerpunktes folgt:
    $$\sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i=m\,\dot{\boldsymbol{r}}_S=m\,\boldsymbol{v}_S \quad \rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{p}=m\,\boldsymbol{v}_S}$$
  - Unter Berücksichtigung des Schwerpunktsatzes folgt durch zeitliche Differenziation des Gesamtimpulses:
    $$\boxed{\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{F}}$$

3.1 Impuls

- Wie bei einem einzelnen Massenpunkt lautet der integrierte Impulssatz für den Schwerpunkt:

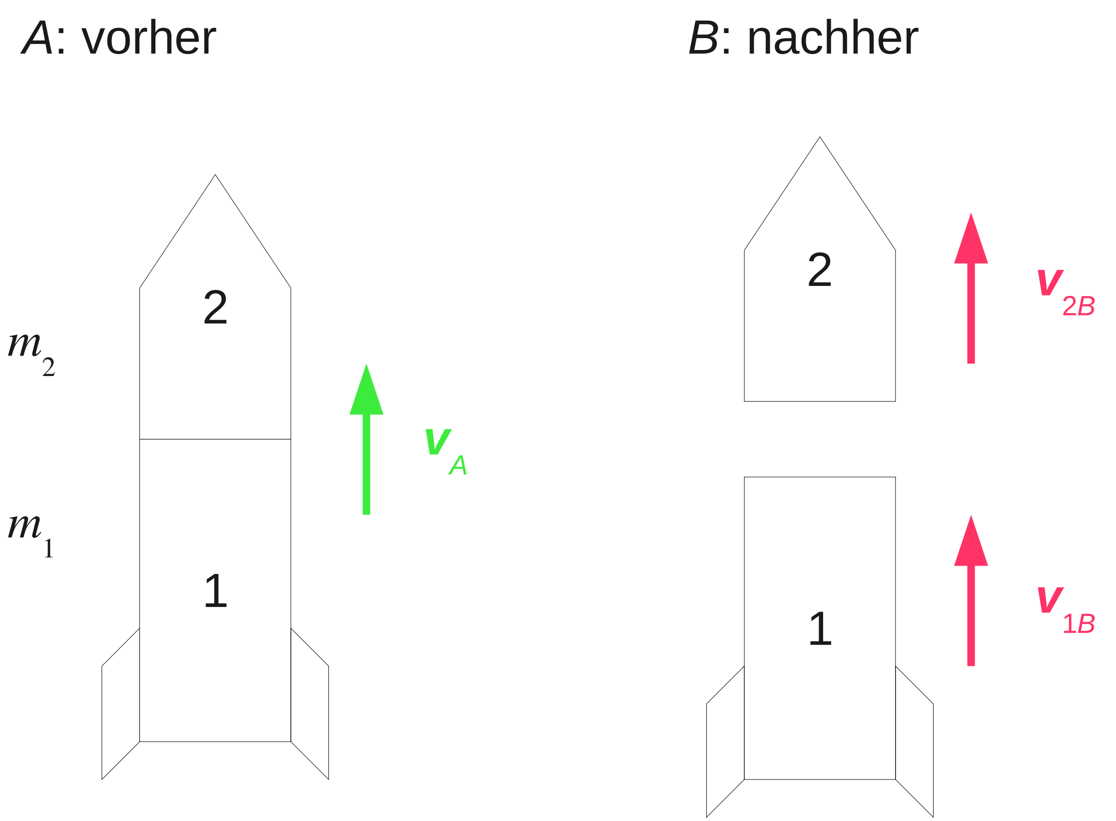
$$\boxed{m\boldsymbol{v}_{SB} - m\boldsymbol{v}_{SA} = \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{F}\,dt = \hat{\boldsymbol{F}}}$$

- Wenn der resultierende Kraftstoß der äußeren Kräfte null ist, dann bleibt der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten konstant:

$$\boxed{m\boldsymbol{v}_{SB} = m\boldsymbol{v}_{SA}}$$

3.1 Impuls

- Beispiel: Stufentrennung einer Rakete



3.1 Impuls

- Aufgabenstellung:
  - Die 2. Stufe einer Rakete wird von der 1. Stufe abgetrennt.
  - Unmittelbar vor der Stufentrennung hat die Rakete die Geschwindigkeit v_A .
  - Unmittelbar nach der Stufentrennung gilt: $v_{2B} = v_{1B} + \Delta v$
  - Bekannt sind die Massen m_1 und m_2 , die Geschwindigkeit v_A sowie die Trennungsgeschwindigkeit Δv.
  - Gesucht sind die Geschwindigkeiten v_{1B} und v_{2B} .

3.1 Impuls

- Lösung:
  - Die Zeit der Stufentrennung ist so kurz, dass der Kraftstoß von äußeren Kräften während dieser Zeit vernachlässigt werden kann.
  - Daher gilt der Impulserhaltungssatz:

$$\left(m_1+m_2\right)v_A=m_1 v_{1B}+m_2 v_{2B}$$

  - Mit $v_{2B}=v_{1B}+\Delta v$ folgt:

$$\left(m_1+m_2\right)v_A=m_1 v_{1B}+m_2\left(v_{1B}+\Delta v\right)=\left(m_1+m_2\right)v_{1B}+m_2\Delta v$$

  - Auflösen ergibt:

$$v_{1B}=v_A-\frac{m_2}{m_1+m_2}\Delta v\,,\quad v_{2B}=v_A+\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta v$$

3.1 Impuls

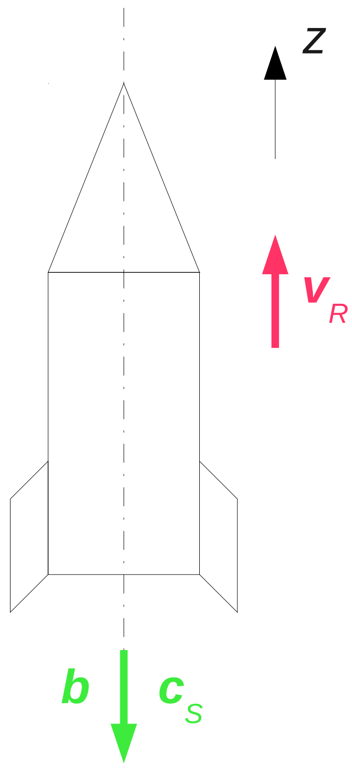
- Zahlenwerte für Trennung der Oberstufe von der Hauptstufe der Ariane 5:
  - $m_1 = 14$ t (Leermasse der Hauptstufe)
  - $m_2 = 18$ t (Vollmasse der Oberstufe + Nutzlast)
  - $v_A = 6800$ m/s, $\Delta v = 1$ m/s
  - Damit folgt:

$$v_{1B} = 6800\,\mathrm{m/s} - \frac{18}{14+18} \cdot 1\,\mathrm{m/s} = \underline{6799{,}4\,\mathrm{m/s}}$$

$$v_{2B} = 6800\,\mathrm{m/s} + \frac{14}{14+18} \cdot 1\,\mathrm{m/s} = \underline{6800{,}4\,\mathrm{m/s}}$$

3.1 Impuls

- Beispiel: Raketenantrieb
  - Aufgabenstellung:
    - Ein Raketentriebwerk stößt den verbrannten Treibstoff mit dem konstanten Massendurchsatz b und der konstanten Strahlgeschwindigkeit c_S relativ zur Rakete aus.
    - Auf das aus Rakete und Treibstoff bestehende System sollen keine äußeren Kräfte wirken.
    - Gesucht sind Beschleunigung und Geschwindigkeit der Rakete.



3.1 Impuls

- Zur Lösung wird der Impuls des Gesamtsystems, bestehend aus der Rakete und dem ausgestoßenen Treibstoff, betrachtet.
- Der Gesamtimpuls setzt sich zusammen aus dem Impuls der Rakete und dem Impuls des ausgestoßenen Treibstoffs.
- Mit der Raketenmasse $m_R(t)$ gilt für den Impuls der Rakete:

$$p_R(t) = m_R(t)\, v_R(t)$$

- Für den Impuls des zum Zeitpunkt $\bar{t} < t$ im Zeitintervall $d\bar{t}$ ausgestoßenen Treibstoffs gilt:

$$dp_T(\bar{t}) = \left(v_R(\bar{t}) - c_S\right) b\, d\bar{t}$$

3.1 Impuls

- Damit gilt für den Impuls des Gesamtsystems:

$$p(t) = m_R(t)\, v_R(t) + \int_0^t \left(v_R(\bar{t}) - c_S \right) b \, d\bar{t}$$

- Da am Gesamtsystem keine äußeren Kräfte angreifen, bleibt der Impuls konstant:

$$p(t) = const. \quad \rightarrow \quad \dot{p}(t) = 0$$

$$\rightarrow \quad \dot{m}_R(t)\, v_R(t) + m_R(t)\, \dot{v}_R(t) + v_R(t)\, b - c_S\, b = 0$$

- Mit $\dot{m}_R(t) = -b$ folgt: $\quad m_R(t)\, \dot{v}_R(t) - c_S\, b = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{v}_R(t) = \dfrac{c_S\, b}{m_R(t)}$

3.1 Impuls

- Mit der *Schubkraft* $S = c_S b$ gilt: $m_R(t)\dot{v}_R(t) = S$
- Ist die Rakete anfangs in Ruhe, so folgt für die Geschwindigkeit:

$$v_R(t) = c_S \int_0^t \frac{b\, d\bar{t}}{m_R(\bar{t})} = -c_S \int_0^t \frac{\dot{m}_R\, d\bar{t}}{m_R(\bar{t})} = -c_S \int_{m_{R0}}^{m_R(t)} \frac{dm_R}{m_R}$$

$$= -c_S \left[\ln(m_R)\right]_{m_R = m_{R0}}^{m_R = m_R(t)} = -c_S \ln\left(\frac{m_R(t)}{m_{R0}}\right) = c_S \ln\left(\frac{m_{R0}}{m_R(t)}\right)$$

- Die Gleichung

$$v_R(t) = c_S \ln\left(\frac{m_{R0}}{m_R(t)}\right)$$

heißt *Raketenformel von Ziolkowsky*.

3.2 Drall

- Der Impuls ändert sich nicht, wenn die Summe der äußeren Kräfte null ist. In diesem Fall ist der Impuls eine so genannte *Erhaltungsgröße*.
- Es wird nun eine weitere Erhaltungsgröße gesucht für den Fall, dass das resultierende Moment der äußeren Kräfte bezüglich eines geeignet gewählten Bezugspunkts null ist.

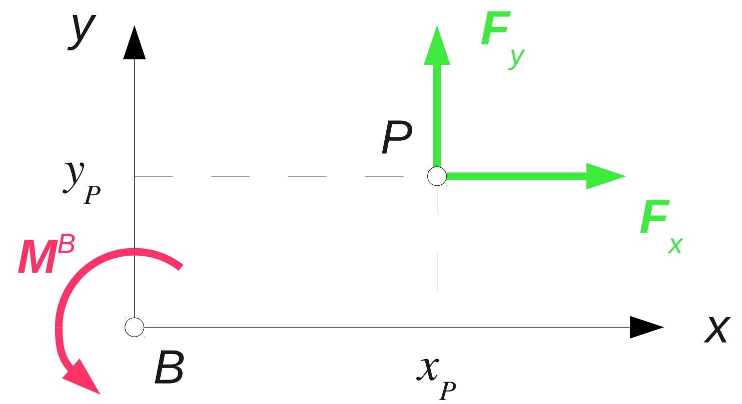
3.2 Drall

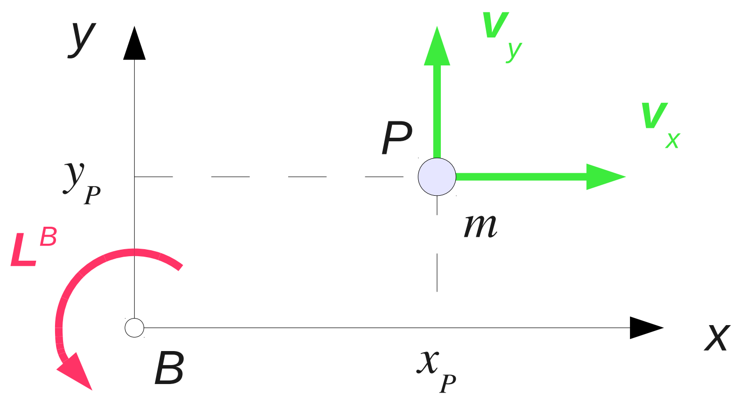
- Ebene Bewegung:
  - Definitionen:
    - Sei *B* ein <u>ortsfester</u> Punkt.
    - Moment bezüglich *B*:

$$M^B = x_P F_y - y_P F_x$$

    - Drall bezüglich *B*:

$$\begin{aligned} L^B &= x_P p_y - y_P p_x \\ &= x_P m v_y - y_P m v_x \\ &= m\left(x_P v_y - y_P v_x\right) \end{aligned}$$





3.2 Drall

- Zeitliche Änderung des Dralls:

$$\dot{L}^B = m \frac{d}{dt}\left(x_P v_y - y_P v_x\right) = m\left(\dot{x}_P v_y - \dot{y}_P v_x\right) + x_P m \dot{v}_y - y_P m \dot{v}_x$$

$$= m\left(v_x v_y - v_y v_x\right) + x_P F_y - y_P F_x = M^B$$

- Drallsatz für die ebene Bewegung: $\boxed{\dot{L}^B = M^B}$

  - Die zeitliche Änderung des Dralls bezüglich eines beliebigen <u>ortsfesten</u> Bezugspunkts *B* ist gleich dem Moment der am Massenpunkt angreifenden Kraft um den gleichen Bezugspunkt *B*.

3.2 Drall

- Drallerhaltungssatz für die ebene Bewegung:
  - Wenn das Moment der an einem Massenpunkt angreifenden Kraft bezüglich eines beliebigen ortsfesten Bezugspunkts *B* verschwindet, dann ändert sich der Drall bezüglich dieses Bezugspunkts nicht:

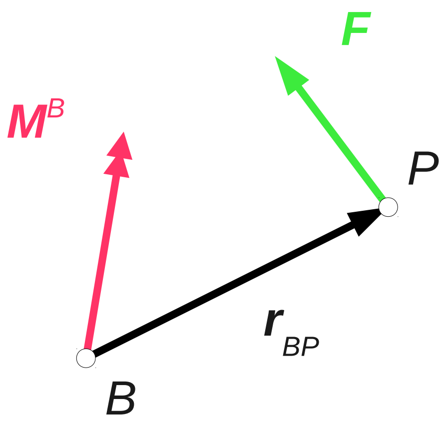
$$\boxed{M^B = 0 \;\rightarrow\; L^B(t_1) = L^B(t_2)}$$

- Der Drall wird auch als *Drehimpuls* oder *Impulsmoment* bezeichnet.

3.2 Drall

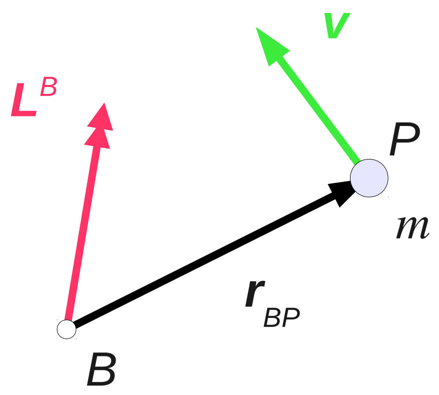
- Räumliche Bewegung:
  - Definitionen:
    - Sei *B* ein ortsfester Punkt.
    - Moment bezüglich *B*:

$$\boldsymbol{M}^B = \boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{F}$$



    - Drall bezüglich *B*:

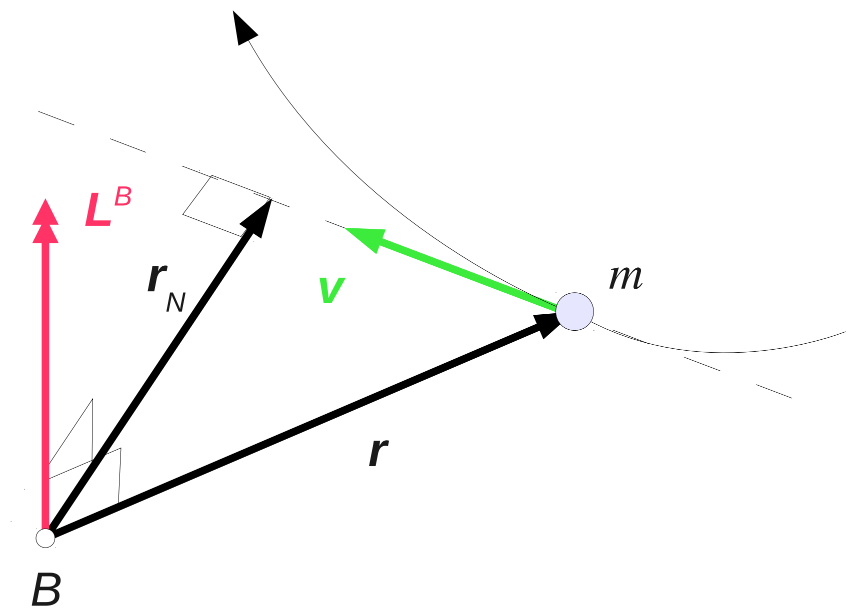
$$\boxed{\boldsymbol{L}^B = \boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r}_{BP} \times m\,\boldsymbol{v}}$$



3.2 Drall

- Eigenschaften:
  - Der Drallvektor steht senkrecht auf der von den Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ aufgespannten Ebene.
  - Seine Richtung ergibt sich aus der Rechte-Hand-Regel.
  - Sein Betrag ist

$$L^B = m\, r_N\, v$$



3.2 Drall

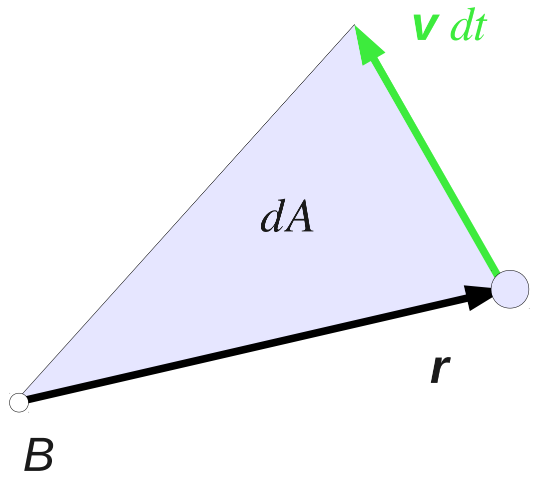
- Im Zeitintervall dt überstreicht der Ortsvektor die Fläche

$$dA = \frac{1}{2} |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\, dt|$$

- Für den Betrag des Dralls gilt also:

$$L^B = 2\, m \frac{dA}{dt}$$

- Die Größe dA/dt wird als *Flächen-geschwindigkeit* bezeichnet.



3.2 Drall

- Zeitliche Änderung des Dralls:

$$\dot{\boldsymbol{L}}^B = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{p}\right) = \dot{\boldsymbol{r}}_{BP} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}_{BP} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} \times m\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}_{BP} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}^B$$

- Drallsatz: $\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}^B = \boldsymbol{M}^B}$

  - Die zeitliche Änderung des Dralls bezüglich eines beliebigen ortsfesten Bezugspunkts *B* ist gleich dem Moment der am Massenpunkt angreifenden Kraft um den gleichen Bezugspunkt *B*.

3.2 Drall

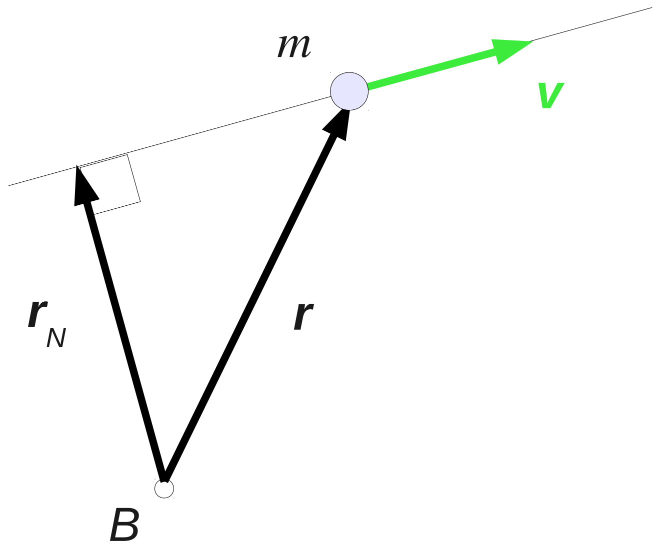
- Drallerhaltungssatz:
  - Wenn das Moment der an einem Massenpunkt angreifenden Kraft um einen beliebigen ortsfesten Bezugspunkt *B* verschwindet, dann ändert sich der Drall bezüglich dieses Bezugspunkts nicht:

$$\boxed{\boldsymbol{M}^B = \boldsymbol{0} \;\rightarrow\; \boldsymbol{L}^B(t_1) = \boldsymbol{L}^B(t_2)}$$

3.2 Drall

- Beispiel: Geradlinige Bewegung
  - Ein Massenpunkt, auf den keine Kräfte einwirken, führt eine geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit aus.
  - Da das Moment verschwindet, muss der Drall zeitlich konstant sein.

$$\boldsymbol{L}^B = \boldsymbol{r} \times m\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_N \times m\,\boldsymbol{v}$$

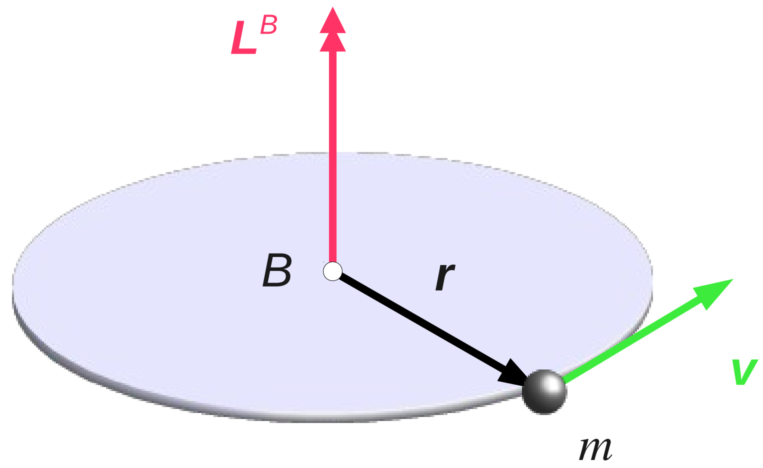


3.2 Drall

- Beispiel: Kreisbewegung
  - Der Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht auf dem Ortsvektor.
  - Der Drallvektor bezüglich des Kreismittelpunkts steht senkrecht auf der Kreisbahn.
  - Er hat den Betrag

    $$L^B = m\,r\,v = m\,r\,(\omega\,r) = m\,r^2\,\omega$$
  - Der Drallsatz lautet:

    $$\dot{L}^B = J^B\,\dot{\omega} = J^B\,\ddot{\phi} = M^B$$



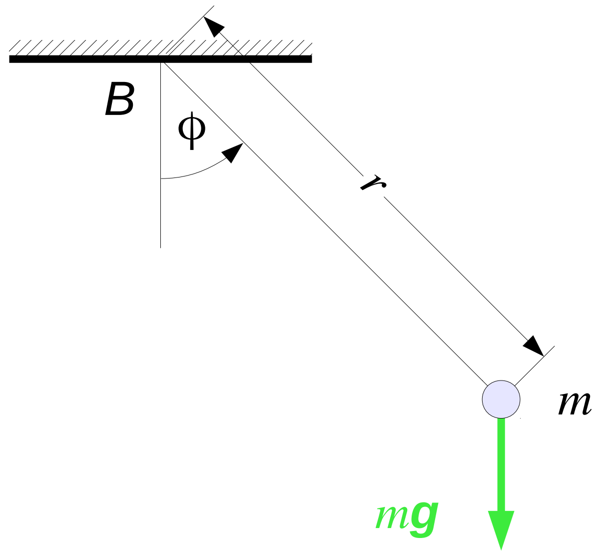
- Die Größe $J^B = m r^2$ wird als *Massenträgheitsmoment* des Massenpunkts bezüglich Punkt *B* bezeichnet.

3.2 Drall

- Beispiel: Pendel
  - Moment: $M^B = -r\sin(\phi)\,m\,g$
  - Drall: $L^B = m\,r^2\,\dot{\phi}$
  - Drallsatz:

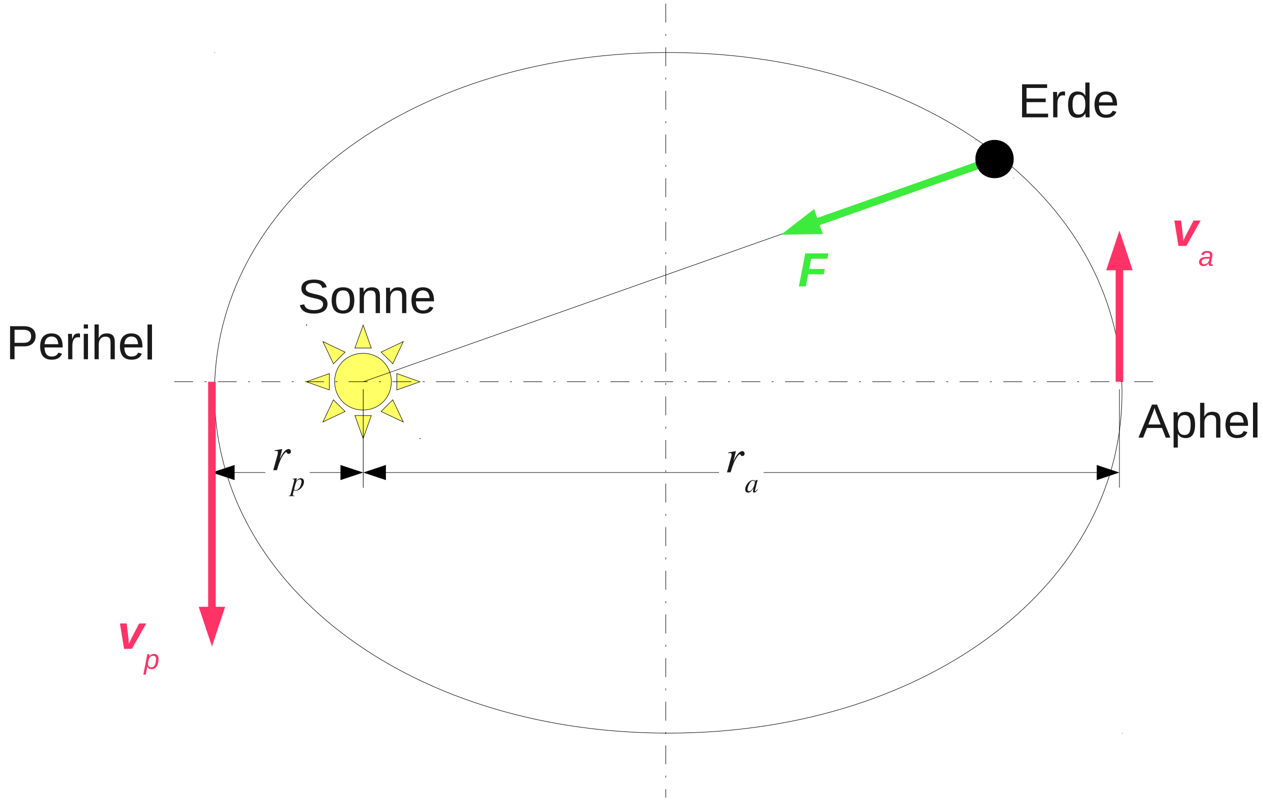
$$\dot{L}^B = m\,r^2\,\ddot{\phi} = -m\,g\,r\sin(\phi)$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\phi} + \frac{g}{r}\sin(\phi) = 0$$



3.2 Drall

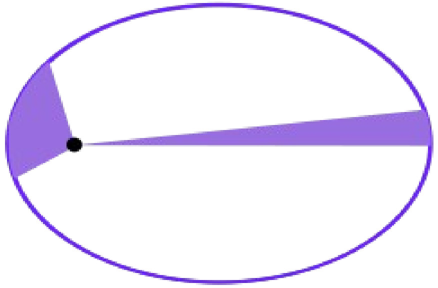
- Beispiel: 2. Keplersches Gesetz:



3.2 Drall

- Die Wirkungslinie der Anziehungskraft zwischen der Sonne und einem Planeten geht durch den Mittelpunkt der Sonne.
- Das Moment dieser Kraft in Bezug auf den Mittelpunkt der Sonne verschwindet daher.
- Deshalb ist der Drall des Planeten bezüglich der Sonne auf seiner Bahn um die Sonne konstant.
- Damit ist auch die Flächengeschwindigkeit konstant.
- Daraus folgt unmittelbar das 2. Keplersche Gesetz:

In gleichen Zeiten überstreicht der Fahrstrahl gleiche Flächen.



3.2 Drall

- Im Perihel und im Aphel ist der Geschwindigkeitsvektor senkrecht zum Ortsvektor.
- Für die Geschwindigkeiten folgt daraus: $m\,r_p v_p = m\,r_a v_a$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p}}$$

- Zahlenwerte:
  - Für die Erde ist $r_p = 147{,}1 \cdot 10^6$ km und $r_a = 152{,}1 \cdot 10^6$ km.
  - Damit gilt für die Geschwindigkeiten: $\frac{v_p}{v_a} = \frac{152{,}1}{147{,}1} = 1{,}034$

3.2 Drall

- Massenpunktsysteme:
  - Für ein System von Massenpunkten ist der Drall in Bezug auf einen ortsfesten Bezugspunkt *B* definiert durch

$$\boldsymbol{L}^B = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

  - Die Summe erstreckt sich über alle Massenpunkte des Systems.
  - Für die zeitliche Ableitung des Dralls gilt zunächst

$$\dot{\boldsymbol{L}}^B = \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i$$

3.2 Drall

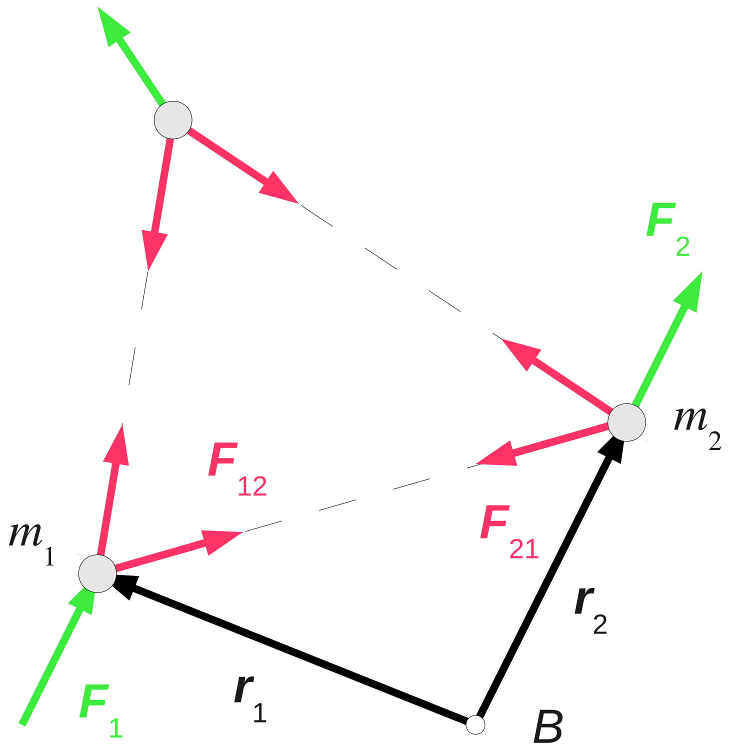
- Die erste Summe berechnet sich zu

$$\sum_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

- Mit dem Impulssatz für die einzelnen Massen folgt für die zweite Summe:

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \right)$$

$$= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_j \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij}$$



3.2 Drall

- Zu jeder inneren Kraft $\boldsymbol{F}_{ij}$ gibt es eine entgegengesetzt gleich große Kraft $\boldsymbol{F}_{ji}$, die die gleiche Wirkungslinie hat.
- Die Summe der Momente der inneren Kräfte ist daher null.
- Also gilt: $\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}^B$
- Dabei ist $\boldsymbol{M}^B$ das resultierende Moment der äußeren Kräfte.
- Damit ist die Gültigkeit des Drallsatzes für Massenpunkt-systeme gezeigt.

3.2 Drall

- Drallsatz für ein Massenpunktsystem:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}^B = \boldsymbol{M}^B}$$

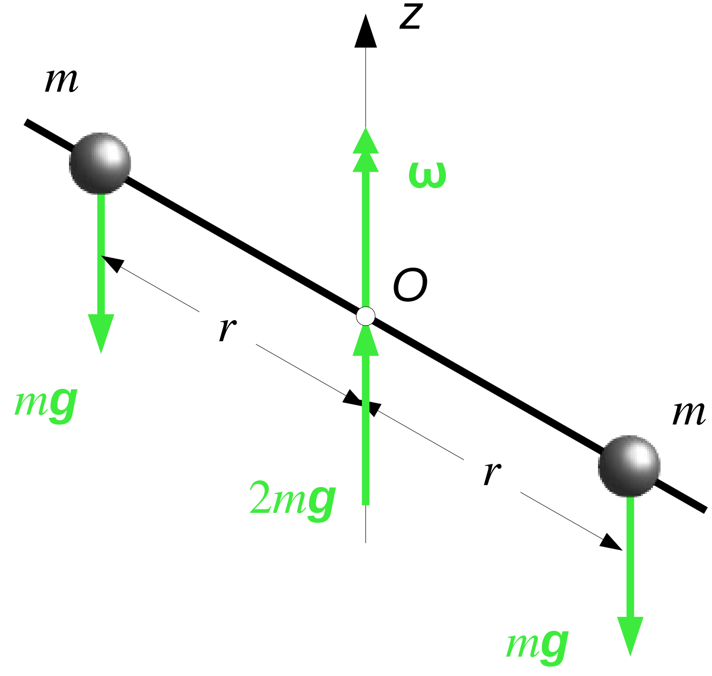
  - Die zeitliche Änderung des Dralls eines Massenpunktsystems in Bezug auf einen ortsfesten Bezugspunkt *B* ist gleich dem resultierenden Moment der äußeren Kräfte bezüglich desselben Punktes.

- Drallerhaltungssatz für ein Massenpunktsystem:
  - Wenn das resultierende Moment der äußeren Kräfte verschwindet, dann ist der Drall konstant.

$$\boldsymbol{M}^B = \boldsymbol{0} \;\rightarrow\; \boldsymbol{L}^B(t_1) = \boldsymbol{L}^B(t_2)$$

3.2 Drall

- Beispiel:
  - Zwei Massenpunkte der Masse m sind verschiebbar auf einer starren Stange angebracht, die sich um die z-Achse dreht.
  - Wie ändert sich die Winkelgeschwindigkeit, wenn der Abstand der Massen von r_A auf r_B verändert wird?



3.2 Drall

- Zustand *A*: $L_{zA}^{O} = 2\,m\,r_A^2\,\omega_A$
- Zustand *B*: $L_{zB}^{O} = 2\,m\,r_B^2\,\omega_B$
- Die *z*-Komponente des Moments der äußeren Kräfte um Punkt *O* ist null.
- Drallerhaltungssatz:

$$L_{zA}^{O} = L_{zB}^{O} \; : \quad 2\,m\,r_A^2\,\omega_A = 2\,m\,r_B^2\,\omega_B$$

- Winkelgeschwindigkeiten:

$$\left(\frac{r_A}{r_B}\right)^2 = \frac{\omega_B}{\omega_A}$$

- Arbeit der inneren Kräfte:
  - Die Arbeit der äußeren Kräfte ist null.
  - Damit lautet der Arbeitssatz:

$$E_B^K - E_A^K = W_{AB}^{(I)}$$

3.2 Drall

- Kinetische Energie im Zustand *A*:

$$E_A^K = \frac{1}{2} m v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m v_{2A}^2$$
$$= m \omega_A^2 r_A^2$$

- Kinetische Energie im Zustand *B*:

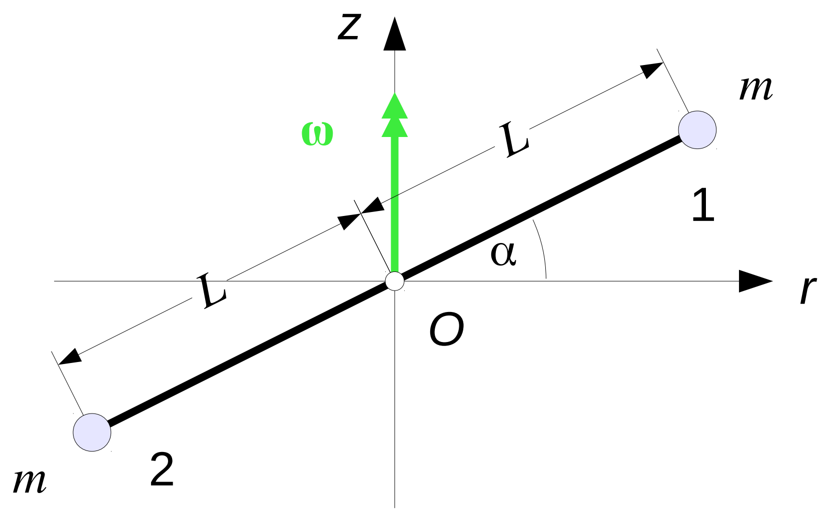
$$E_B^K = \frac{1}{2} m v_{1B}^2 + \frac{1}{2} m v_{2B}^2$$
$$= m \omega_B^2 r_B^2$$

- Arbeitssatz: $W_{AB}^{(I)} = m\left(r_B^2 \omega_B^2 - r_A^2 \omega_A^2\right)$

$$= m r_A^2 \omega_A^2 \left(\frac{r_B^2 \omega_B^2}{r_A^2 \omega_A^2} - 1 \right) = m r_A^2 \omega_A^2 \left[\frac{r_B^2}{r_A^2} \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^4 - 1 \right]$$
$$= m r_A^2 \omega_A^2 \left[\left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 - 1 \right] = E_A^K \left[\left(\frac{r_A}{r_B} \right)^2 - 1 \right]$$

3.2 Drall

- Beispiel:
  - Zwei durch eine masselose starre Stange verbundene Massen drehen sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die durch den Schwerpunkt verlaufende *z*-Achse.
  - Welches Moment muss dazu an der Stange angreifen?



- Ortsvektoren:

$$\boldsymbol{r}_1 = L\left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_r + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{e}_z\right)$$

$$\boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{r}_1 \;\rightarrow\; \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1$$

3.2 Drall

- Für den Drallvektor gilt:

$$\boldsymbol{L}^O = \boldsymbol{r}_1 \times m\,\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times m\,\boldsymbol{v}_2 = m\,\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = 2\,m\,\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1$$

- Der Drallsatz lautet:

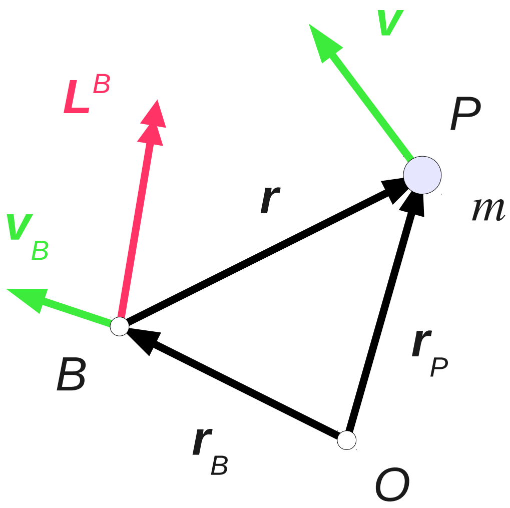
$$\boldsymbol{M}^O = \dot{\boldsymbol{L}}^O = 2\,m\,\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + 2\,m\,\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{a}_1 = 2\,m\,\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{a}_1$$

- Mit der Zentripetalbeschleunigung $\boldsymbol{a}_1 = -\omega^2 L \cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_r$ folgt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}^O &= 2\,m\,L\left(\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_r + \sin(\alpha)\,\boldsymbol{e}_z\right) \times \left(-\omega^2 L \cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_r\right)\\ &= -2\,m\,\omega^2 L^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r\\ &= -m\,\omega^2 L^2 \sin(2\,\alpha)\,\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}$$

3.2 Drall

- Drall bezüglich eines be-weglichen Bezugspunkts *B*:



$$\boldsymbol{L}^B = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$$

- Für die zeitliche Ableitung des Dralls gilt:

$$\dot{\boldsymbol{L}}^B = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}}$$

- Aus $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_B$ folgt nun:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_P - \dot{\boldsymbol{r}}_B = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_B$$

- Mit $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$ und $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$ folgt weiter:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{L}}^B &= \left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_B\right) \times m\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\\ &= -\boldsymbol{v}_B \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{M}^B\end{aligned}$$

3.2 Drall

- Damit lautet der Drallsatz bezüglich eines beweglichen Bezugspunkts:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}^B + \boldsymbol{v}_B \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{M}^B}$$

- Für ein System von Massenpunkten gilt

$$\dot{\boldsymbol{L}}^B = \frac{d}{dt} \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \times \boldsymbol{p}_i + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_i \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_B \right) \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{M}^B$$

$$= -\boldsymbol{v}_B \times \sum_i \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{M}^B = -\boldsymbol{v}_B \times \boldsymbol{p}_S + \boldsymbol{M}^B$$

mit dem Gesamtimpuls $\boldsymbol{p}_S = \sum_i \boldsymbol{p}_i$ des Massenpunktsystems.

3.2 Drall

- Damit ist gezeigt:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}^B + \boldsymbol{v}_B \times \boldsymbol{p}_S = \boldsymbol{M}^B}$$

- Wird als Bezugspunkt der Schwerpunkt *S* gewählt, dann vereinfacht sich der Drallsatz des Massenpunktsystems zu

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{L}}^S = \boldsymbol{M}^S}$$

3.2 Drall

- Beispiel:
  - Wird eine Hantel, bestehend aus zwei starr verbundenen Massenpunkten, geworfen, dann beschreibt der Schwerpunkt eine Wurfparabel.
  - Das Moment der Schwerkraft bezüglich des Schwerpunkts ist null. Daher bleibt der Drall bezüglich des Schwerpunkts konstant.