

4. Stoßvorgänge

- Stoßvorgänge sind Vorgänge von sehr kurzer Dauer, bei denen zwischen den beteiligten Körpern große Kräfte auftreten.
- Gesucht wird ein Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten vor dem Stoß und den Geschwindigkeiten nach dem Stoß.
- Der genaue zeitliche Verlauf der Kräfte ist nicht bekannt.
- Stoßvorgänge werden daher mithilfe des integrierten Impulssatzes beschrieben.
- Dabei müssen Annahmen zum Kraftstoß getroffen werden.

4. Stoßvorgänge

4.1 Idealisierungen

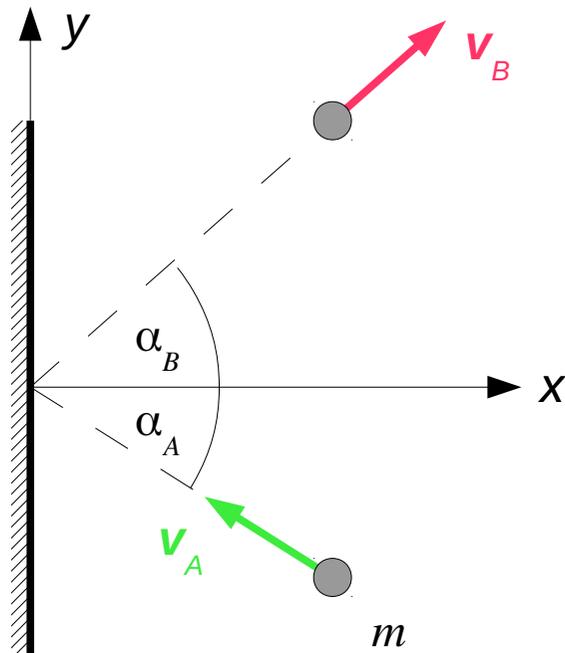
4.2 Stoß eines Massenpunktes

4.3 Stoß zwischen zwei Massenpunkten

4.1 Idealisierungen

- Idealisierungen sind vereinfachende Annahmen, die bei der Modellbildung getroffen werden, damit ein Problem rechnerisch untersucht werden kann.
- Bei Stoßvorgängen werden folgende Annahmen getroffen:
 - Die Stoßdauer t_s ist so klein, dass Lageänderungen der beteiligten Körper während der Stoßdauer vernachlässigt werden können.
 - Es müssen nur die durch den Stoß verursachten Kraftstöße berücksichtigt werden. Wegen der sehr kleinen Stoßdauer sind die Kraftstöße aller anderen Kräfte vernachlässigbar.
 - Die beteiligten Körper können als Massenpunkte betrachtet werden.

4.2 Stoß eines Massenpunktes



- Ein Massenpunkt trifft schräg auf eine starre glatte Wand.
 - Gegeben:
 - Masse m
 - Geschwindigkeit v_A , α_A vor dem Auftreffen
 - Gesucht:
 - Geschwindigkeit v_B , α_B nach dem Auftreffen

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Geometrie: $v_{Ax} = -v_A \cos(\alpha_A)$, $v_{Ay} = v_A \sin(\alpha_A)$
 $v_{Bx} = v_B \cos(\alpha_B)$, $v_{By} = v_B \sin(\alpha_B)$
- Integrierter Impulssatz in y -Richtung:
 - Da die Wand glatt ist, werden keine Kräfte in y -Richtung übertragen.
 - Damit gilt: $m v_{By} - m v_{Ay} = 0 \rightarrow v_{By} = v_{Ay}$
- Integrierter Impulssatz in x -Richtung:
 - Der Stoßvorgang wird in zwei Phasen unterteilt, die *Kompressionsphase* und die *Restitutionsphase*.

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Kompressionsphase:

- Der Massenpunkt wird zusammengedrückt, bis die Geschwindigkeit senkrecht zur Wand null ist.
- Dazu muss auf den Massenpunkt der Kraftstoß \hat{F}_K wirken:

$$m \cdot 0 - m v_{Ax} = \hat{F}_K \rightarrow -m v_{Ax} = \hat{F}_K$$

- Restitutionsphase:

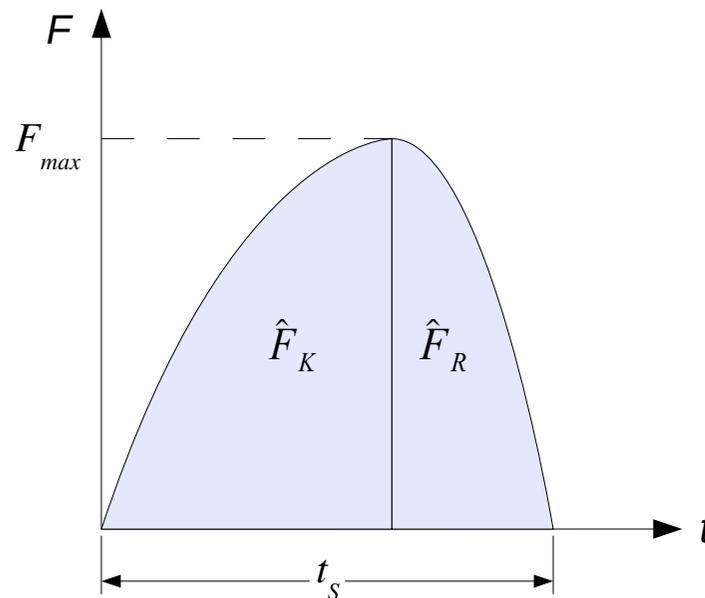
- Während der Restitutionsphase bildet sich die Verformung ganz oder teilweise zurück.
- Dabei nimmt die von der Wand auf den Massenpunkt ausgeübte Kraft ab und ist am Ende der Restitutionsphase null.

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Für den Kraftstoß \hat{F}_R während der Restitutionsphase gilt:

$$m v_{Bx} - m \cdot 0 = \hat{F}_R \rightarrow m v_{Bx} = \hat{F}_R$$

- Zeitlicher Verlauf der Kraft auf den Massenpunkt:



4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Stoßhypothese:

- Mit $-m v_{Ax} = \hat{F}_K$, $m v_{Bx} = \hat{F}_R$

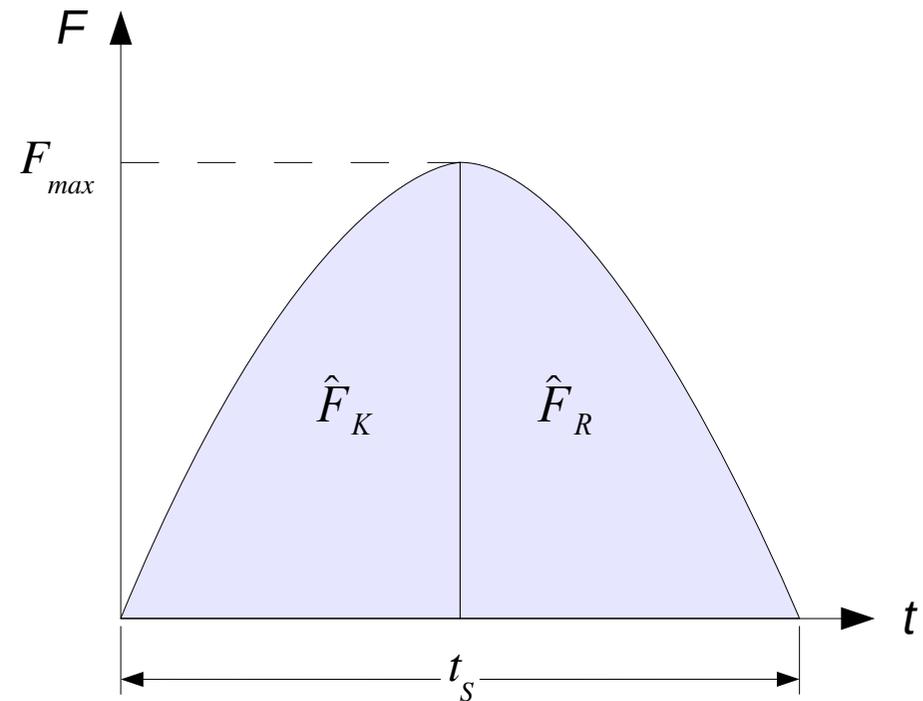
stehen zwei Gleichungen zur Ermittlung der drei Unbekannten v_{Bx} , \hat{F}_K , \hat{F}_R zur Verfügung.

- Zur Lösung wird noch eine Hypothese über das Verformungsverhalten des Körpers benötigt, der durch den Massenpunkt abgebildet wird.
 - Diese Hypothese stellt einen Zusammenhang zwischen den beiden Kraftstößen her.

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Vollkommen elastischer Stoß:
 - Verformungen und Kräfte in der Restitutionsphase verlaufen spiegelbildlich zur Kompressionsphase.
 - Nach dem Stoßende hat der Körper wieder seine ursprüngliche Form.
 - Für die Kraftstöße gilt:

$$\hat{F}_R = \hat{F}_K$$



4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Damit folgt:
$$\begin{aligned} -m v_{Ax} &= \hat{F}_K \\ m v_{Bx} &= \hat{F}_K \end{aligned} \rightarrow m v_{Ax} + m v_{Bx} = 0$$

- Ergebnis:
$$\begin{aligned} v_{Bx} &= -v_{Ax} \\ v_{By} &= v_{Ay} \end{aligned} \rightarrow \begin{array}{l} v_B = v_A \\ \alpha_B = \alpha_A \end{array}$$

- Vollkommen plastischer Stoß:

- Die gesamte Verformung bleibt erhalten.
- Der Kraftstoß während der Restitutionsphase verschwindet:

$$\hat{F}_R = 0$$

- Damit folgt: $v_{Bx} = 0$

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Mit $v_{Bx} = v_B \cos(\alpha_B)$, $v_{By} = v_B \sin(\alpha_B)$ und $v_{By} = v_{Ay}$ folgt weiter:

$$\alpha_B = 90^\circ, \quad v_B = v_{By} = v_{Ay} = v_A \sin(\alpha_A)$$
- Der Massenpunkt rutscht an der Wand entlang.
- Teilelastischer Stoß:
 - Die Verformungen bilden sich teilweise zurück.
 - Für die Kraftstöße gilt: $\hat{F}_R = k \hat{F}_K$
 - Die dimensionslose Konstante k wird als *Stoßzahl* bezeichnet.
 - Der Wert der Stoßzahl liegt zwischen 0 (vollkommen plastischer Stoß) und 1 (vollkommen elastischer Stoß).

4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Damit folgt:
$$\begin{aligned} -m v_{Ax} &= \hat{F}_K \\ m v_{Bx} &= k \hat{F}_K \end{aligned} \rightarrow k m v_{Ax} + m v_{Bx} = 0$$

- Ergebnis:
$$v_{Bx} = -k v_{Ax}$$

$$\tan(\alpha_B) = \frac{v_{By}}{v_{Bx}} = \frac{v_{Ay}}{-k v_{Ax}} = \frac{1}{k} \tan(\alpha_A)$$

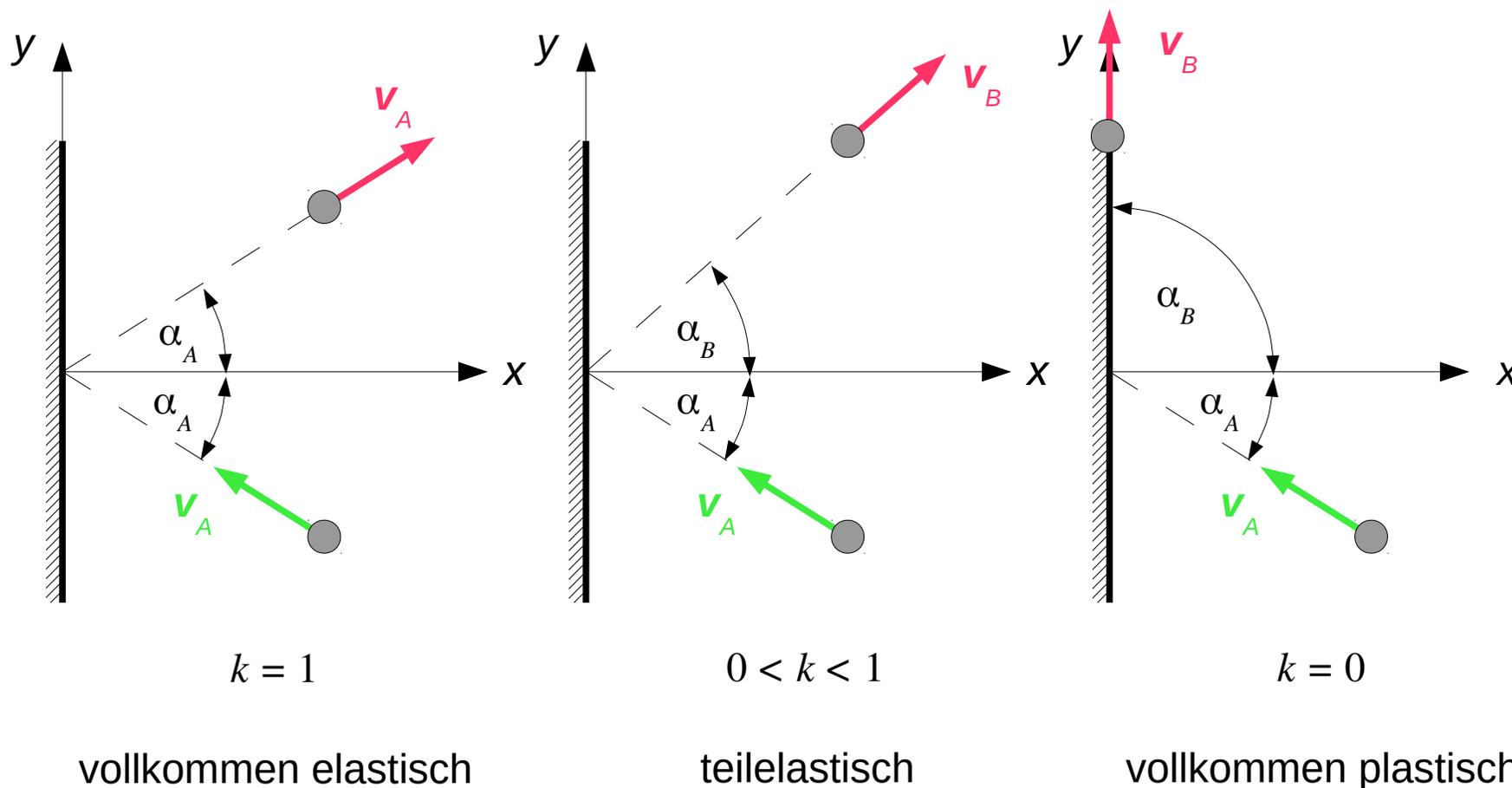
- Wegen $k < 1$ gilt: $\tan(\alpha_B) > \tan(\alpha_A) \rightarrow \alpha_B > \alpha_A$

- Die Stoßzahl gibt das Verhältnis der Geschwindigkeiten an:

$$k = -\frac{v_{Bx}}{v_{Ax}}$$

- Die Stoßzahl hängt von den Eigenschaften des Körpers und von den Eigenschaften der Wand ab.

4.2 Stoß eines Massenpunktes



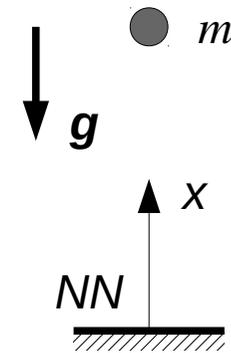
4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Bestimmung der Stoßzahl im Fallversuch:
 - Ein Massenpunkt fällt aus der Höhe h_A senkrecht auf eine waagerechte Unterlage.
 - Nach dem Stoß erreicht er die Höhe h_B .
 - Energieerhaltungssatz für die Fallphase:

$$m g h_A = \frac{1}{2} m v_A^2 \rightarrow v_A = -\sqrt{2 g h_A}$$

- Energieerhaltungssatz für die Steigphase:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = m g h_B \rightarrow v_B = \sqrt{2 g h_B}$$



4.2 Stoß eines Massenpunktes

- Daraus folgt für die Stoßzahl: $k = -\frac{v_B}{v_A} = \sqrt{\frac{h_B}{h_A}}$

- Typische Werte der Stoßzahl:

- Glas auf Glas: 0,94

- Stahl auf Stahl: 0,8

- Holz auf Holz: 0,5

- Kork auf Kork: 0,56

- Außer vom Material hängt die Stoßzahl auch von der Geometrie des Körpers und von der Größe des Kraftstoßes ab.

4.3 Stoß zwischen zwei Massenpunkten

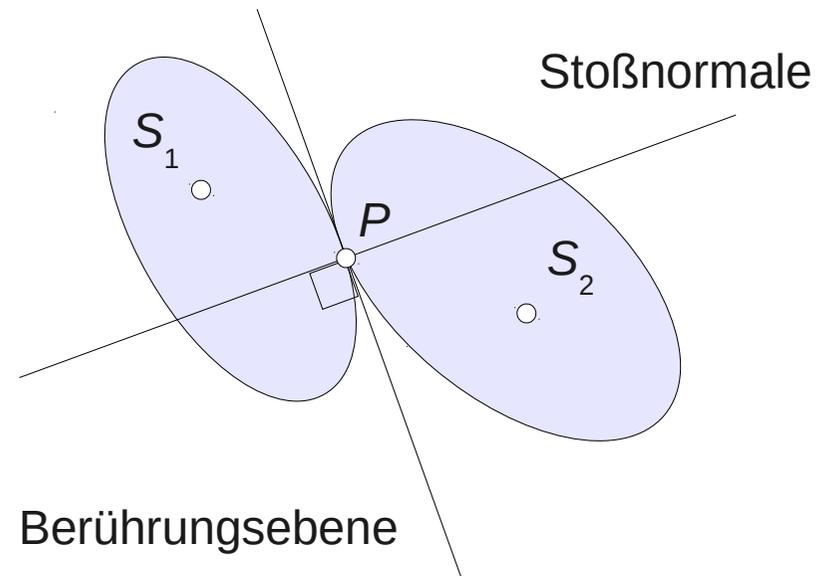
4.3.1 Definitionen

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

4.3.1 Definitionen

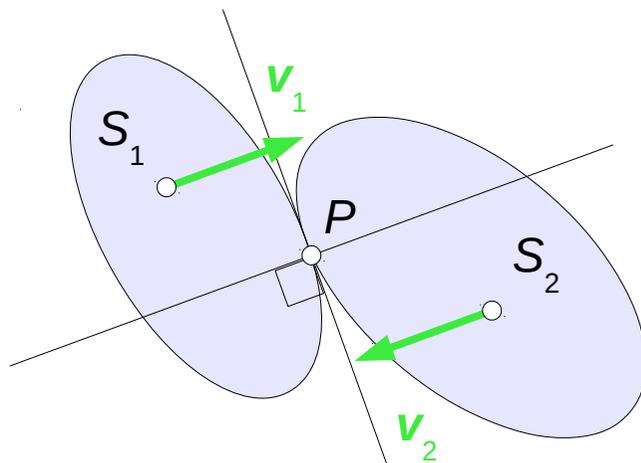
- Berührungsebene und Stoßnormale:
 - Die *Berührungsebene* liegt tangential zu den beiden Körpern.
 - Der *Stoßpunkt* P liegt in der Berührungsebene.
 - Die *Stoßnormale* geht durch den Stoßpunkt P und steht senkrecht auf der Berührungsebene.



4.3.1 Definitionen

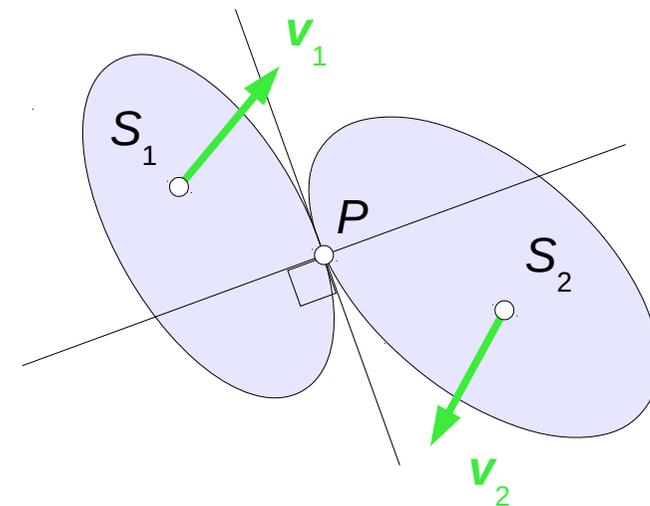
- Gerader Stoß:

- Die Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß haben die Richtung der Stoßnormalen.



- Schiefer Stoß:

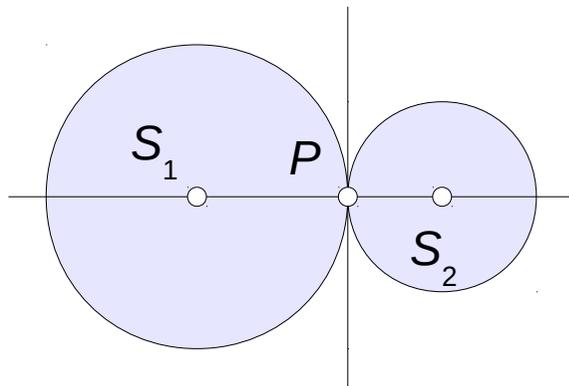
- Die Richtungen der Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß stimmen nicht mit der Stoßnormalen überein.



4.3.1 Definitionen

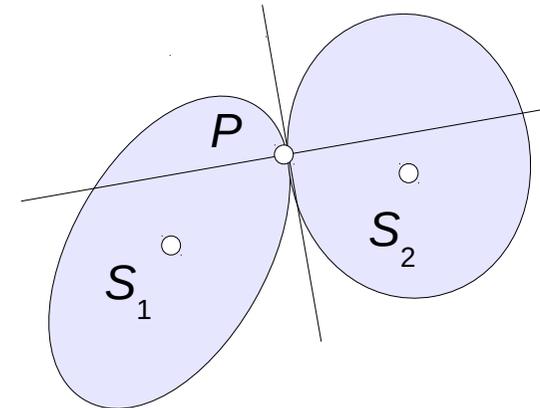
- Zentrischer Stoß:

- Die Stoßnormale geht durch die beiden Schwerpunkte.



- Exzentrischer Stoß:

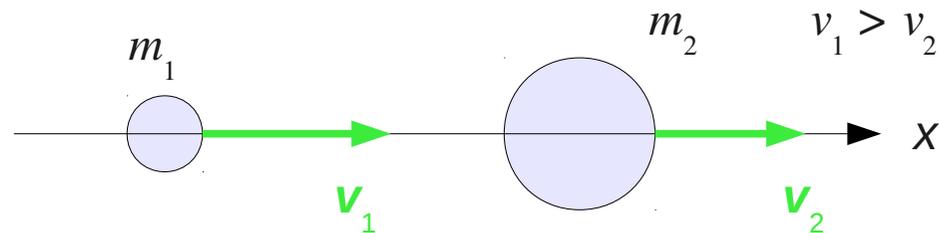
- Die Stoßnormale geht nicht durch die beiden Schwerpunkte.



- Nur beim zentrischen Stoß können die beteiligten Körper als Massenpunkte betrachtet werden.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Vor dem Stoß:



- Die Massenpunkte m_1 und m_2 bewegen sich mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 entlang einer Geraden, die mit der Stoßnormalen übereinstimmt.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Während des Stoßes:



- Zum Zeitpunkt $t = 0$ treffen die beiden Massenpunkte aufeinander.
- Sie üben eine Kraft $F(t)$ aufeinander aus.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Kompressionsphase:
 - Während der Kompressionsphase werden die beiden Körper zusammengedrückt.
 - Am Ende der Kompressionsphase (Zeitpunkt t_0) haben die beiden Massenpunkte die gleiche Geschwindigkeit v_0 .
 - Die Kontaktkraft $F(t)$ erreicht zum Ende der Kompressionsphase ihr Maximum.
 - Für den Kraftstoß während der Kompressionsphase gilt:

$$\hat{F}_K = \int_0^{t_0} F(t) dt$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Restitutionsphase:

- Während der Restitutionsphase bilden sich die Verformungen teilweise oder vollkommen zurück.
- Dabei fällt die Kontaktkraft $F(t)$ ab und ist am Ende (Zeitpunkt t_s) null.
- Für den Kraftstoß während der Restitutionsphase gilt:

$$\hat{F}_R = \int_{t_0}^{t_s} F(t) dt$$

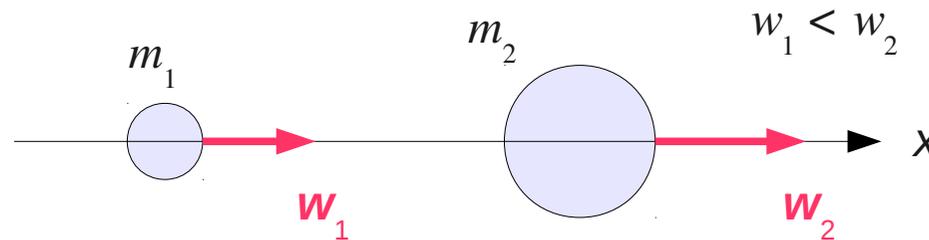
- Stoßhypothese:

- Zwischen den Kraftstößen besteht die Beziehung

$$\hat{F}_R = k \hat{F}_K$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Nach dem Stoß:



- Die Massenpunkte m_1 und m_2 bewegen sich mit den Geschwindigkeiten w_1 und w_2 entlang einer Geraden, die mit der Stoßnormalen übereinstimmt.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Geschwindigkeiten nach dem Stoß:
 - Der integrierte Impulssatz für jeden der beiden Massenpunkte während der Kompressionsphase lautet:

$$m_1(v_0 - v_1) = -\hat{F}_K, \quad m_2(v_0 - v_2) = \hat{F}_K$$

- Der integrierte Impulssatz für jeden der beiden Massenpunkte während der Restitutionsphase lautet:

$$m_1(w_1 - v_0) = -k \hat{F}_K, \quad m_2(w_2 - v_0) = k \hat{F}_K$$

- Damit stehen vier Gleichungen zur Verfügung, mit denen die vier Unbekannten w_1 , w_2 , v_0 und \hat{F}_K berechnet werden können.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Addition der beiden Gleichungen für die Kompressionsphase ergibt:

$$m_1(v_0 - v_1) + m_2(v_0 - v_2) = 0 \quad \rightarrow \quad v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

- Damit folgt für den Kraftstoß:

$$\begin{aligned} \hat{F}_K &= m_2(v_0 - v_2) = m_2 \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 \right) \\ &= m_2 \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 + m_2) v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \end{aligned}$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Aus den Gleichungen für die Restitutionsphase folgt:

$$w_1 = v_0 - k \frac{\hat{F}_K}{m_1} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - k \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$w_2 = v_0 + k \frac{\hat{F}_K}{m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + k \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

- Ergebnis:

$$w_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$w_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + k m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Spezialfälle:

- Ideal plastischer Stoß: $k = 0$ \rightarrow $w_1 = w_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$
- Ideal elastischer Stoß: $k = 1$

$$w_1 = \frac{2 m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}, \quad w_2 = \frac{2 m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$$

- Gleich große Massen: $m_1 = m_2$

$$w_1 = \frac{1}{2} [(1 - k) v_1 + (1 + k) v_2], \quad w_2 = \frac{1}{2} [(1 + k) v_1 + (1 - k) v_2]$$

- Ideal elastisch mit gleich großen Massen: $w_1 = v_2, \quad w_2 = v_1$
- Ideal plastisch mit gleich großen Massen: $w_1 = w_2 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Impulserhaltung:

- Da wegen der sehr kurzen Stoßzeit der Kraftstoß der äußeren Kräfte auf das Gesamtsystem vernachlässigbar ist, muss der Impuls des Gesamtsystems erhalten bleiben.
- Addition der integrierten Impulssätze für die Kompressionsphase ergibt:

$$m_1(v_0 - v_1) + m_2(v_0 - v_2) = 0$$

- Addition der integrierten Impulssätze für die Restitutionsphase ergibt:

$$m_1(w_1 - v_0) + m_2(w_2 - v_0) = 0$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Addition dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$m_1(w_1 - v_1) + m_2(w_2 - v_2) = 0$$

- Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ = m_1 v_1 + m_2 v_2 \end{aligned}$$

- Diese Beziehung gilt unabhängig von der Stoßzahl.

- Stoßbedingung:

- Für die Geschwindigkeitsdifferenz $w_2 - w_1$ folgt:

$$\begin{aligned} w_2 - w_1 \\ = \frac{k m_1 (v_1 - v_2) + k m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \\ = k (v_1 - v_2) \end{aligned}$$



$$k = - \frac{w_1 - w_2}{v_1 - v_2}$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Die Stoßzahl ist gleich dem Verhältnis von relativer Trennungsgeschwindigkeit zu relativer Annäherungsgeschwindigkeit.
- Mit Impulserhaltungssatz und Stoßbedingung stehen zwei Gleichungen zur Verfügung, die nach w_1 und w_2 oder nach v_1 und v_2 aufgelöst werden können.

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Energiebilanz:

- Die mechanische Energie, die dem System durch Verformung und Erwärmung verloren geht, berechnet sich aus der Differenz der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß:

$$\Delta E = E_v^K - E_n^K = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2} (m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2)$$

- Daraus folgt zunächst:

$$\begin{aligned} 2 \Delta E &= m_1 (v_1^2 - w_1^2) + m_2 (v_2^2 - w_2^2) \\ &= m_1 (v_1 - w_1)(v_1 + w_1) + m_2 (v_2 - w_2)(v_2 + w_2) \end{aligned}$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Mit $m_2(v_2 - w_2) = -m_1(v_1 - w_1)$ folgt weiter:

$$\begin{aligned}
 2 \Delta E &= m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1) - m_1(v_1 - w_1)(v_2 + w_2) \\
 &= m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1 - v_2 - w_2) \\
 &= m_1(v_1 - w_1)(v_1 - v_2 - k(v_1 - v_2)) \\
 &= m_1(v_1 - w_1)(1 - k)(v_1 - v_2)
 \end{aligned}$$

- Aus den Stoßgleichungen folgt:

$$\begin{aligned}
 v_1 - w_1 &= \frac{(m_1 + m_2)v_1 - m_1v_1 - m_2v_2 + km_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \\
 &= \frac{m_2(v_1 - v_2) + km_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1 + k)(v_1 - v_2)
 \end{aligned}$$

4.3.2 Gerader zentrischer Stoß

- Damit folgt:
$$2 \Delta E = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1+k)(v_1 - v_2)(1-k)(v_1 - v_2)$$

- Ergebnis:

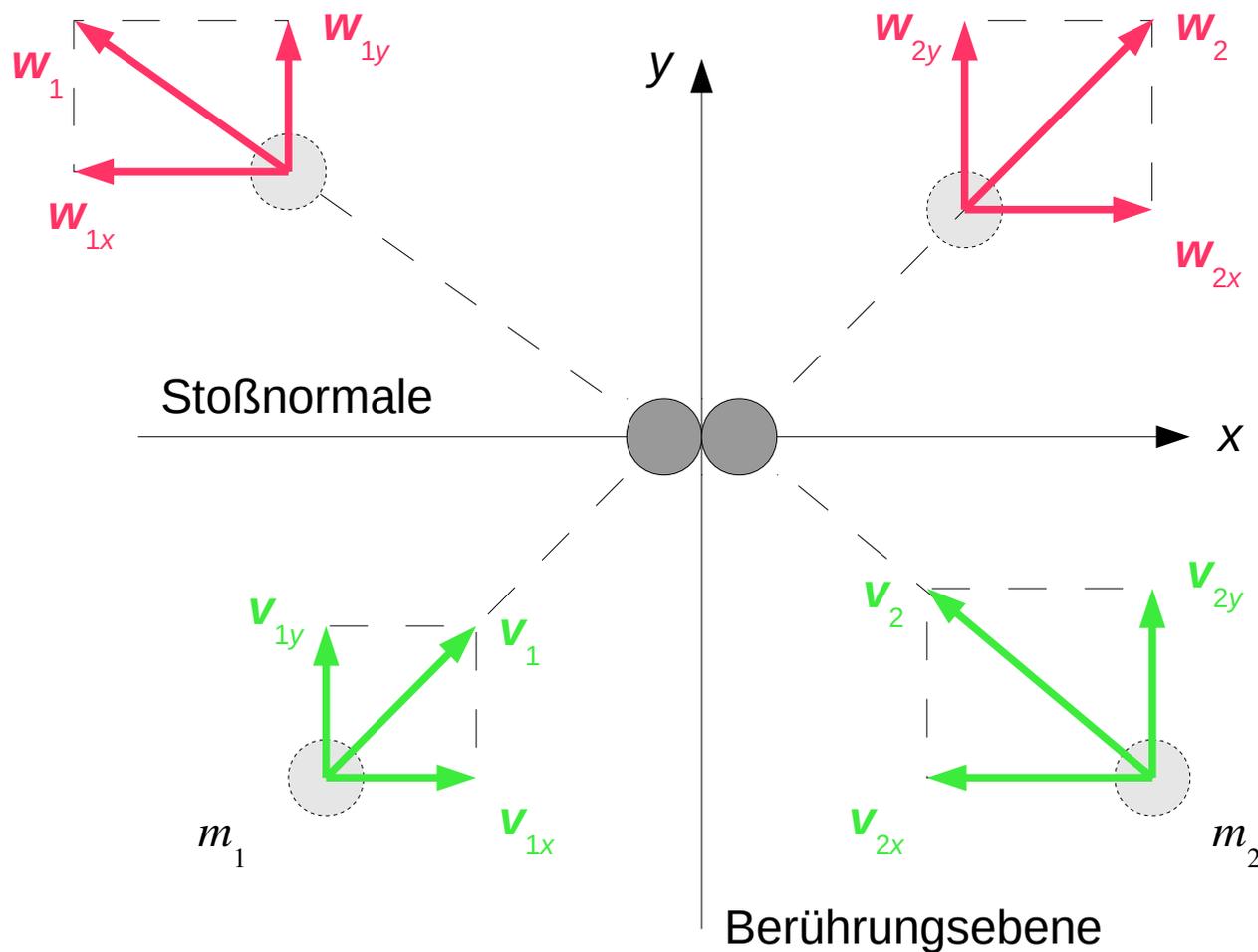
$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2)(v_1 - v_2)^2$$

- Beim ideal elastischen Stoß ist wegen $k = 1$ der Energieverlust null.
- Beim ideal plastischen Stoß ist wegen $k = 0$ der Energieverlust am größten.

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

- Betrachtet wird nur der schiefe zentrische Stoß zweier Massenpunkte in der Ebene, d. h. die Stoßnormale und die beiden Geschwindigkeitsvektoren vor dem Stoß liegen in einer Ebene.
- Dabei wird angenommen, dass die Oberflächen der stoßenden Massenpunkte glatt sind.

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß



Geschwindigkeiten entgegen der x -Achse sind negativ.

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

- Impulserhaltungssatz in y -Richtung:
 - Da die Oberflächen der beiden Körper als glatt vorausgesetzt werden, werden in der Berührungsebene keine Kräfte übertragen.
 - Der Impulserhaltungssatz in y -Richtung für jeden der beiden Massenpunkte liefert:

$$m_1 v_{1y} = m_1 w_{1y} \rightarrow v_{1y} = w_{1y}$$

$$m_2 v_{2y} = m_2 w_{2y} \rightarrow v_{2y} = w_{2y}$$

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

- Integrierter Impulssatz in x-Richtung:
 - In Richtung der Stoßnormalen liegen die gleichen Verhältnisse vor wie beim geraden zentrischen Stoß.
 - Der über die gesamte Stoßzeit t_S integrierte Impulssatz für jeden der beiden Massenpunkte lautet:

$$m_1 w_{1x} - m_1 v_{1x} = -\hat{F}, \quad m_2 w_{2x} - m_2 v_{2x} = \hat{F}$$

$$\hat{F} = \hat{F}_K + \hat{F}_R$$

- Zusätzlich muss die Stoßbedingung erfüllt sein:

$$k = -\frac{w_{1x} - w_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}$$

4.3.3 Schiefer zentrischer Stoß

- Damit stehen drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten w_{1x} , w_{2x} und \hat{F} zur Verfügung.
- Wie beim geraden zentrischen Stoß folgt:

$$w_{1x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} - k m_2 (v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2}$$

$$w_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + k m_1 (v_{1x} - v_{2x})}{m_1 + m_2}$$

- Geschwindigkeiten entgegen der x-Achse sind negativ.