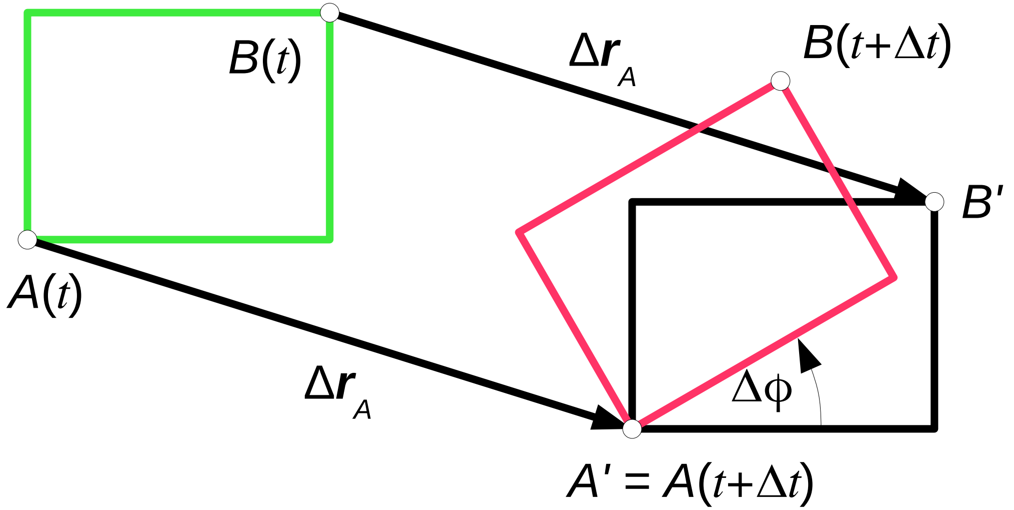
1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Die allgemeine ebene Bewegung eines starren Körpers setzt sich aus einer Translation und einer Rotation zusammen:

Zeitpunkt t : Zeitpunkt $t+\Delta t$:



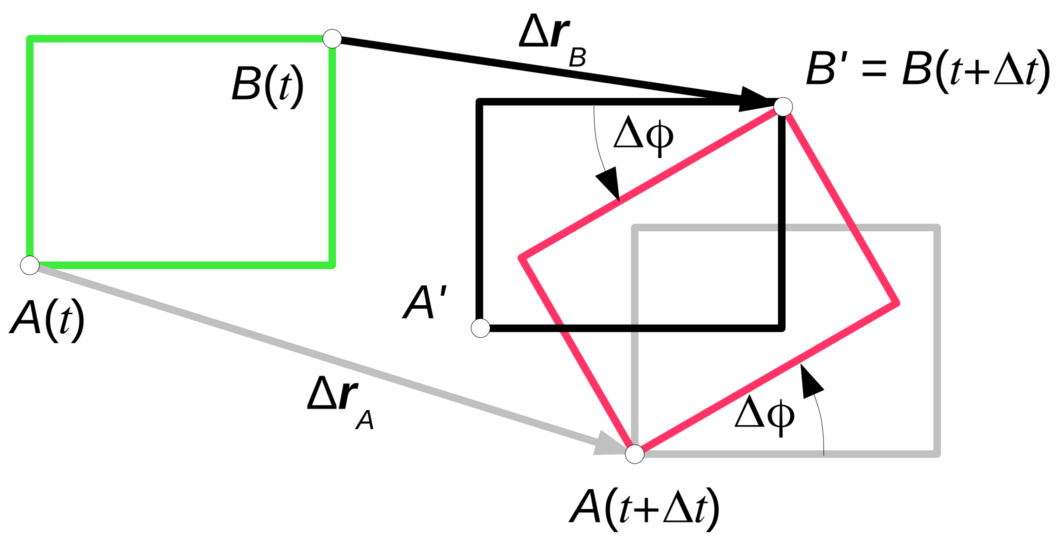
1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Bei der Translation wird jeder Punkt um den Vektor $\Delta \boldsymbol{r}_A$ verschoben. Der Bezugspunkt $A(t)$ wird auf den Punkt $A(t+\Delta t)$ abgebildet.
- Jeder andere Punkt $B(t)$ wird auf einen Punkt B' abgebildet, der noch nicht mit dem Punkt $B(t+\Delta t)$ übereinstimmt.
- Durch die Rotation um den Bezugspunkt A um den Winkel $\Delta\phi$ wird jeder Punkt B' auf den Punkt $B(t+\Delta t)$ abgebildet.

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Die Aufspaltung in eine Translation und eine Rotation hängt vom gewählten Bezugspunkt ab:

Zeitpunkt t :　　　Zeitpunkt $t + \Delta t$:



1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Der Vektor $\Delta \boldsymbol{r}_B$ stimmt nicht mit dem Vektor $\Delta \boldsymbol{r}_A$ überein.
- Der Winkel $\Delta\phi$ der Rotation um *B* ist der gleiche wie bei Rotation um *A*.
- Daraus folgt, dass die Winkelgeschwindigkeit

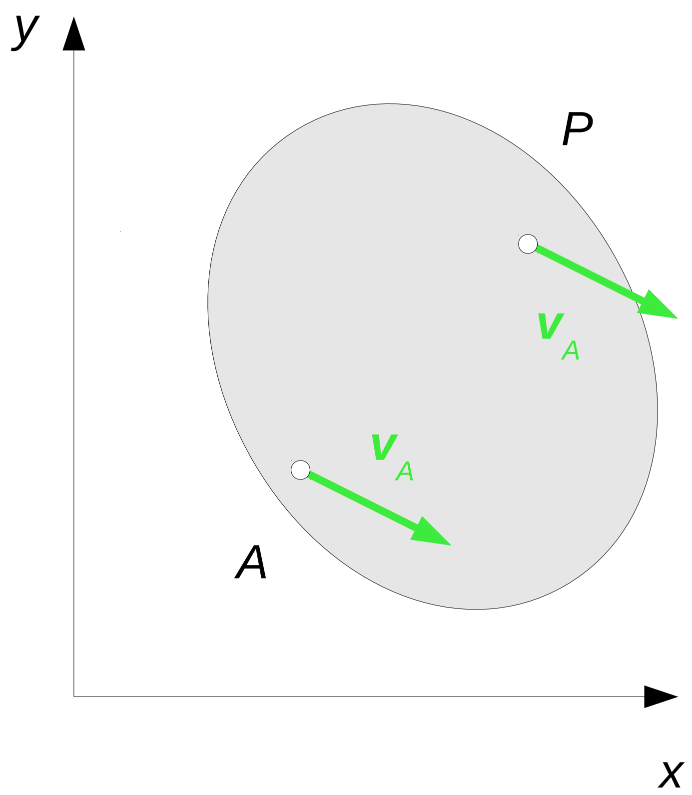
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \dot{\phi}$$

unabhängig vom gewählten Bezugspunkt ist.

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Geschwindigkeit:
  - Bei der Translation haben alle Punkte *P* des starren Körpers die gleiche Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_A$ wie der gewählte Bezugspunkt *A*:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_A \rightarrow \begin{matrix} v_{Px} = v_{Ax} \\ v_{Py} = v_{Ay} \end{matrix}$$

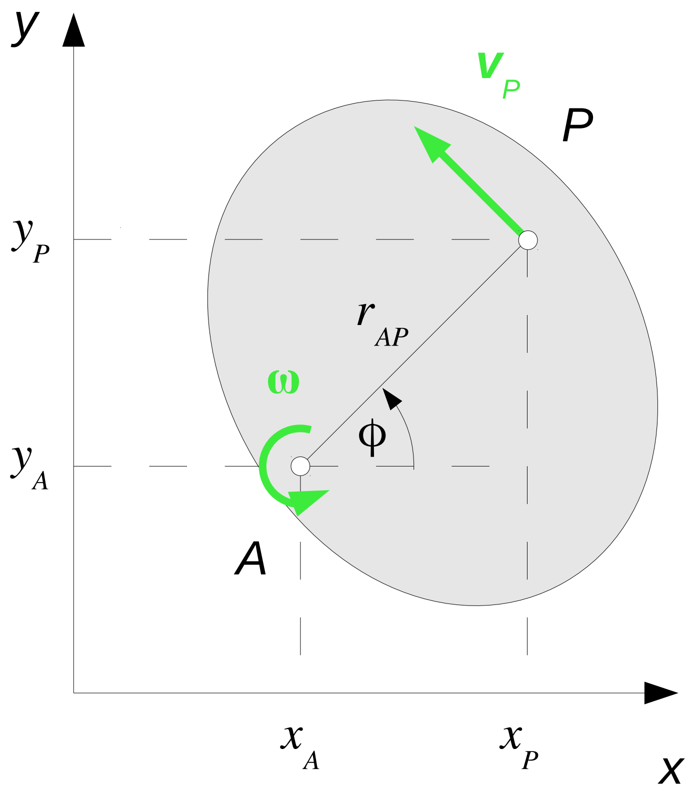


1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Bei der Rotation bewegen sich die Punkte des starren Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn um den gewählten Bezugspunkt *A*:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AP} \quad :$$

$$v_{Px} = -\omega\, r_{AP} \sin(\phi)$$
$$= -\omega (y_P - y_A)$$
$$v_{Py} = \omega\, r_{AP} \cos(\phi)$$
$$= \omega (x_P - x_A)$$



1. Grundlagen der ebenen Kinematik

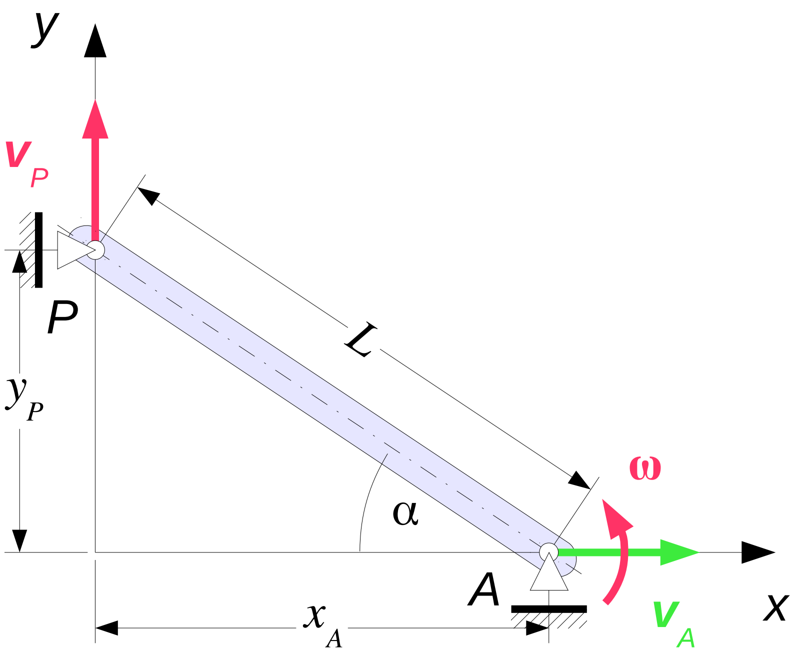
- Die gesamte Geschwindigkeit ergibt sich durch Addition der Geschwindigkeiten infolge der Translation und der Rotation:

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{AP} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} v_{Px} &= v_{Ax} - \omega\left(y_P - y_A\right) \\ v_{Py} &= v_{Ay} + \omega\left(x_P - x_A\right) \end{aligned}$$

- Wenn die Geschwindigkeitskomponenten v_{Ax} und v_{Ay} eines Bezugspunktes sowie die Winkelgeschwindigkeit ω bekannt sind, kann die Geschwindigkeit eines jeden Punktes des starren Körpers berechnet werden.

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

– Beispiel:



- Punkt *A* bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_A entlang der *x*-Achse.
- Punkt *P* bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_P entlang der *y*-Achse.
- Bekannt ist die Geschwindigkeit v_A.
- Gesucht ist die Winkelgeschwindigkeit ω und die Geschwindigkeit v_P.

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Mit $v_{Ax} = v_A$ und $y_A = 0$ folgt aus $v_{Px} = 0$:

$$0 = v_A - \omega\, y_P \;\rightarrow\; \omega = \frac{v_A}{y_P} = \frac{v_A}{L \sin(\alpha)}$$

- Mit $v_{Ay} = 0$ und $x_P = 0$ folgt:

$$v_P = v_{Py} = -\omega\, x_A = -v_A \frac{x_A}{y_P} = -v_A \cot(\alpha)$$

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Beschleunigung:
  - Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit.
  - Für die Komponenten der Beschleunigung gilt:

$$a_{Px} = \dot{v}_{Px} = \dot{v}_{Ax} - \dot{\omega}\, r_{AP} \sin(\phi) - \omega\, r_{AP} \cos(\phi)\,\dot{\phi}$$
$$a_{Py} = \dot{v}_{Py} = \dot{v}_{Ay} + \dot{\omega}\, r_{AP} \cos(\phi) - \omega\, r_{AP} \sin(\phi)\,\dot{\phi}$$

  - Mit $\dot{v}_{Ax} = a_{Ax}$, $\dot{v}_{Ay} = a_{Ay}$ und $\dot{\phi} = \omega$ folgt:

$$a_{Px} = a_{Ax} - \dot{\omega}\, r_{AP} \sin(\phi) - \omega^2 r_{AP} \cos(\phi)$$
$$a_{Py} = a_{Ay} + \dot{\omega}\, r_{AP} \cos(\phi) - \omega^2 r_{AP} \sin(\phi)$$

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Mit $r_{AP}\cos(\phi)=x_P-x_A$, $r_{AP}\sin(\phi)=y_P-y_A$ gilt auch:

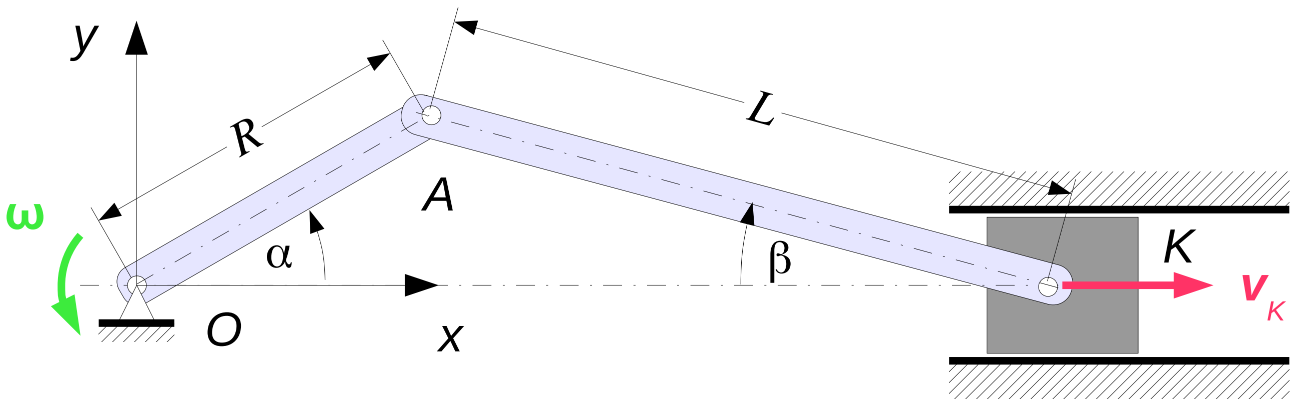
$$\boxed{\begin{aligned} a_{Px}&=a_{Ax}-\dot{\omega}(y_P-y_A)-\omega^2(x_P-x_A)\\ a_{Py}&=a_{Ay}+\dot{\omega}(x_P-x_A)-\omega^2(y_P-y_A)\end{aligned}}$$

- Aus der vektoriellen Darstellung der Geschwindigkeit folgt:

$$\boldsymbol{a}_P=\dot{\boldsymbol{v}}_P=\dot{\boldsymbol{v}}_A+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_{AP}+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_{AP}=\boldsymbol{a}_A+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_{AP}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{AP})$$

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Beispiel: Kurbeltrieb
  - Die Kurbel *OA* dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um den Punkt *O*.



  - Gegeben: $\alpha(t)=\omega t\,,R\,,L$
  - Gesucht: $\omega_{AK}\,,v_K\,,a_K=\dot{v}_K$

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Kurbel *OA*:
  - Als Bezugspunkt wird Punkt *O* gewählt. Seine Geschwindigkeit ist null.
  - Die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel ist ω.
  - Damit lassen sich die Komponenten der Geschwindigkeit von Punkt *A* berechnen:

$$v_{Ax} = -\omega\, y_A = -\omega\, R \sin(\omega\, t)$$
$$v_{Ay} = \omega\, x_A = \omega\, R \cos(\omega\, t)$$

- Pleuel *AK*:
  - Als Bezugspunkt wird Punkt *A* gewählt. Seine Geschwindigkeit wurde bereits ermittelt.

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Für die Geschwindigkeit von Punkt *K* gilt:

$$v_{Kx} = v_{Ax} - \omega_{AK}(y_K - y_A) = -\omega R \sin(\omega t) - \omega_{AK}(y_K - y_A)$$
$$v_{Ky} = v_{Ay} + \omega_{AK}(x_K - x_A) = \omega R \cos(\omega t) + \omega_{AK}(x_K - x_A)$$

- Die Winkelgeschwindigkeit wird aus der Bedingung ermittelt, dass die *y*-Komponente der Geschwindigkeit von Punkt *K* null sein muss:

$$0 = \omega R \cos(\omega t) + \omega_{AK}(x_K - x_A) \rightarrow \omega_{AK} = -\omega \frac{R \cos(\omega t)}{x_K - x_A}$$

- Mit $x_K - x_A = L \cos(\beta)$ folgt: $$\omega_{AK} = -\omega \frac{R}{L} \frac{\cos(\omega t)}{\cos(\beta)}$$

1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Für die Geschwindigkeit des Kolbens folgt:

$$v_{Kx} = -\omega R \sin(\omega t) + \omega R \cos(\omega t) \frac{y_K - y_A}{x_K - x_A}$$

$$= -\omega R \left(\sin(\omega t) + \cos(\omega t) \tan(\beta) \right) \qquad \left(\text{da } \frac{y_A - y_K}{x_K - x_A} = \tan(\beta) \right)$$

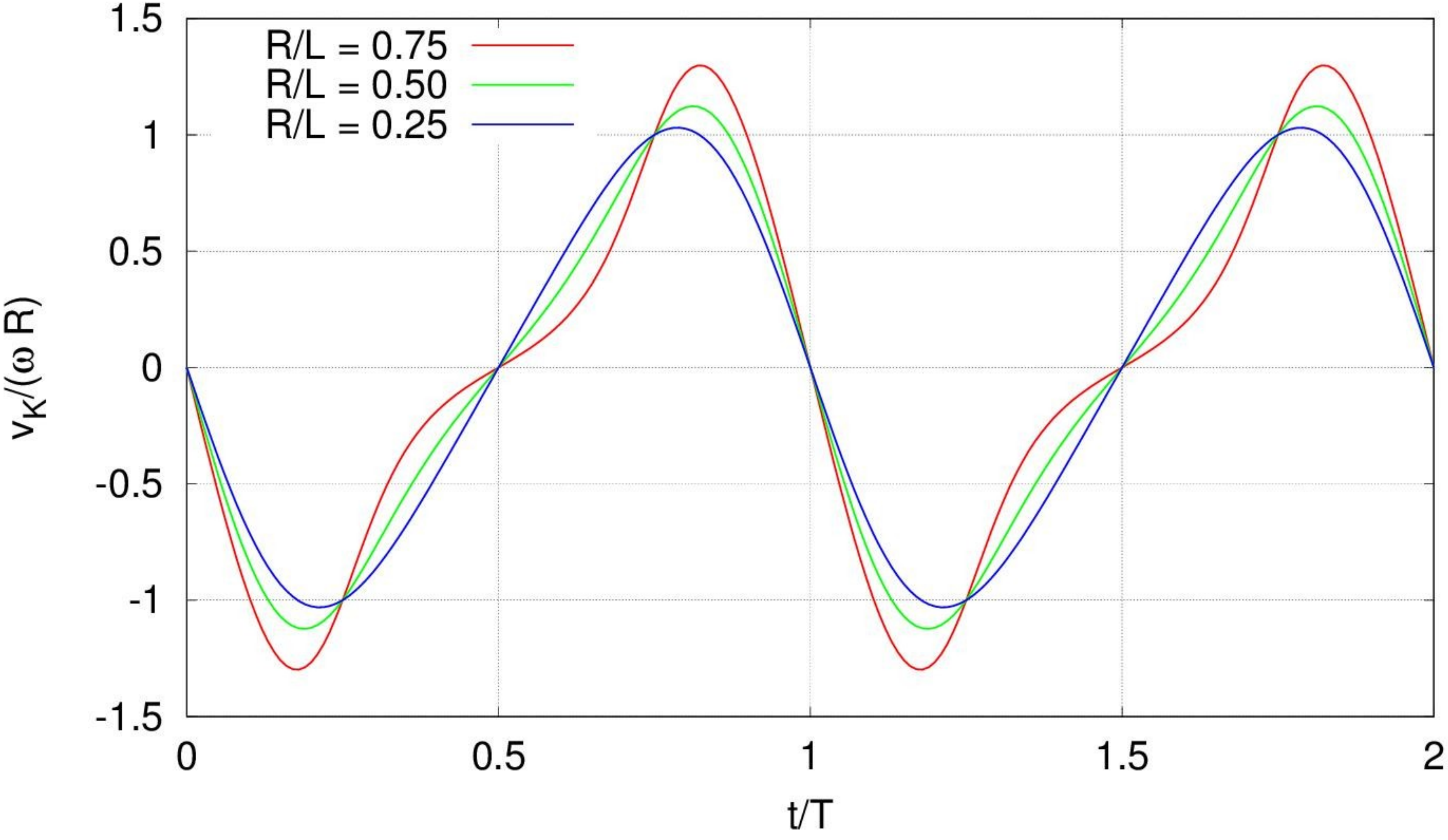
- Der Winkel β kann mit dem Sinussatz ermittelt werden:

$$\frac{\sin(\beta)}{R} = \frac{\sin(\omega t)}{L} \quad \rightarrow \quad \sin(\beta) = \frac{R}{L} \sin(\omega t)$$

$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L} \right)^2 \sin^2(\omega t)}$$

$$\tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{R}{L} \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{1 - (R/L)^2 \sin^2(\omega t)}}$$

1. Grundlagen der ebenen Kinematik



1. Grundlagen der ebenen Kinematik

- Für die Beschleunigung des Kolbens folgt zunächst:

$$a_{Kx}=\dot{v}_{Kx}=-\omega^2 R\left(\cos(\omega t)-\sin(\omega t)\tan(\beta)\right)-\omega R\frac{\cos(\omega t)}{\cos^2(\beta)}\frac{d\beta}{dt}$$

- Aus $\dfrac{d}{dt}\sin(\beta)=\cos(\beta)\dfrac{d\beta}{dt}=\omega\dfrac{R}{L}\cos(\omega t)$

  folgt: $\dfrac{d\beta}{dt}=\omega\dfrac{R}{L}\dfrac{\cos(\omega t)}{\cos(\beta)}=-\omega_{AK}$

- Damit gilt:

$$\begin{aligned} a_{Kx}&=-\omega^2 R\left(\cos(\omega t)-\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\sin(\omega t)+\frac{R}{L}\frac{\cos^2(\omega t)}{\cos^3(\beta)}\right)\\ &=-\omega^2 R\left(\cos(\omega t)-\frac{R}{L}\frac{\sin^2(\omega t)}{\cos(\beta)}+\frac{R}{L}\frac{\cos^2(\omega t)}{\cos^3(\beta)}\right)\end{aligned}$$

1. Grundlagen der ebenen Kinematik