2. Momentanpol

- Aufgabenstellung:
  - Für die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes *P* eines starren Körpers gilt:

$$v_{Px} = v_{Ax} - \omega \left(y_P - y_A \right), \quad v_{Py} = v_{Ay} + \omega \left(x_P - x_A \right)$$

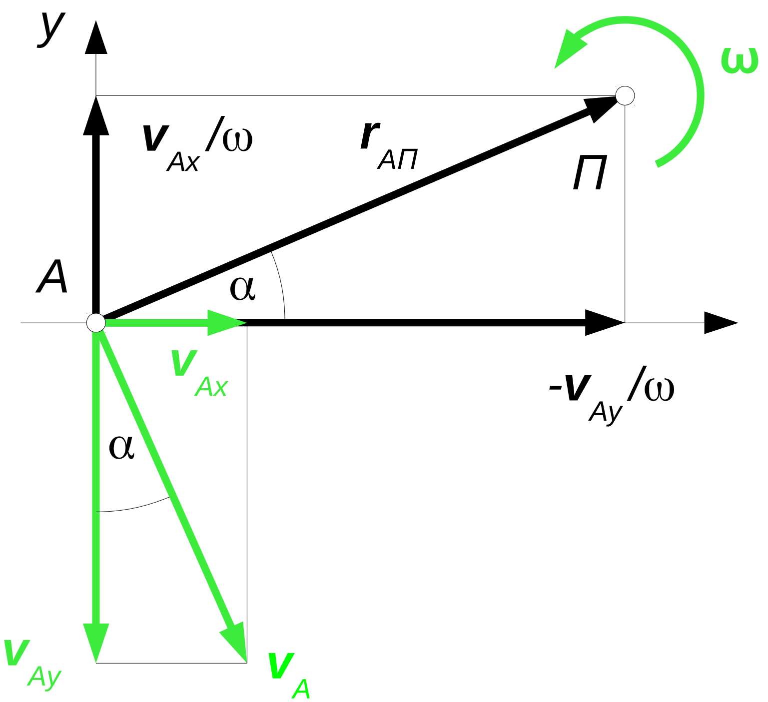
  - Gesucht ist der Punkt *Π,* dessen momentane Geschwindigkeit null ist.
- Lösung:
  - Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= v_{\Pi x} = v_{Ax} - \omega \left(y_\Pi - y_A \right) \\ 0 &= v_{\Pi y} = v_{Ay} + \omega \left(x_\Pi - x_A \right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} y_\Pi - y_A &= \frac{v_{Ax}}{\omega} \\ x_\Pi - x_A &= -\frac{v_{Ay}}{\omega} \end{aligned}}$$

2. Momentanpol

- Der Vektor $\boldsymbol{r}_{A\Pi}$ steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}_A$:

$$\boldsymbol{r}_{A\Pi} \cdot \boldsymbol{v}_A$$
$$= (x_\Pi - x_A) v_{Ax} + (y_\Pi - y_A) v_{Ay}$$
$$= -\frac{v_{Ay}}{\omega} v_{Ax} + \frac{v_{Ax}}{\omega} v_{Ay} = 0$$



- Für den Betrag gilt:

$$r_{A\Pi} = \frac{\sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2}}{\omega} = \frac{v_A}{\omega} \rightarrow v_A = \omega\, r_{A\Pi}$$

2. Momentanpol

- Ergebnisse:
  - Die augenblickliche Bewegung ist eine reine Drehung um den Punkt *Π.* Dieser Punkt wird als *Momentanpol* bezeichnet.
  - Der Momentanpol kann sich außerhalb des Körpers befinden.
  - Der Momentanpol ist kein ortsfester Punkt. Die Bahn, die er durchläuft, wird als *Rastpolbahn* bezeichnet.
  - Bei einer reinen Translation ($\omega = 0$) liegt der Momentanpol im Unendlichen.

2. Momentanpol

- Zeichnerische Ermittlung des Momentanpols:
  - Der Geschwindigkeitsvektor in jedem Punkt P des starren Körpers ist senkrecht auf der Geraden durch den Momentanpol Π und den Punkt P.
  - Sind die Richtungen der Geschwindigkeiten an zwei Punkten des starren Körpers bekannt, dann ist der Momentanpol der Schnittpunkt der beiden Geraden durch diese Punkte, die senkrecht auf den Geschwindigkeiten stehen.

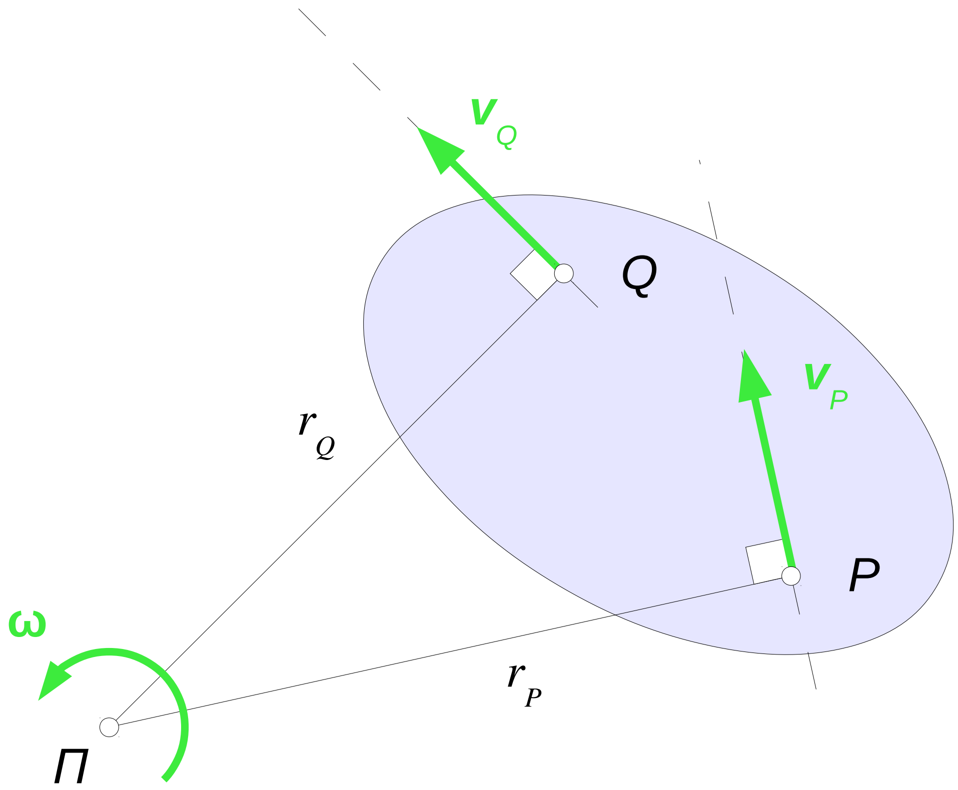
2. Momentanpol

- Für die Geschwindigkeiten gilt:

$$v_P = \omega r_P, \quad v_Q = \omega r_Q$$

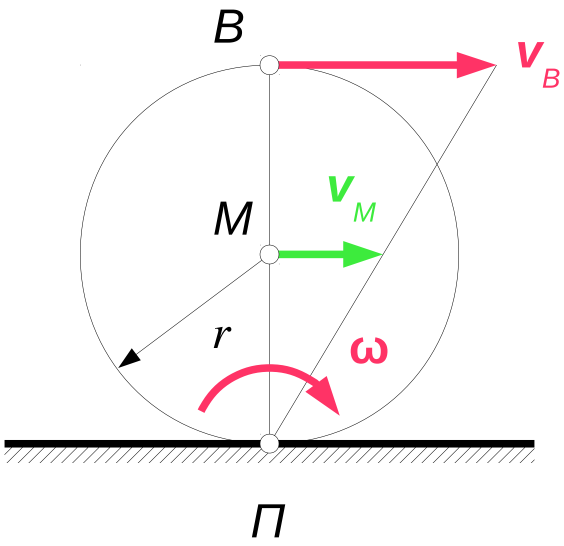
- Die Winkelgeschwindigkeit ω lässt sich ermitteln, wenn von einem der beiden Punkte auch der Betrag der Geschwindigkeit bekannt ist:

$$\omega = \frac{v_P}{r_P} = \frac{v_Q}{r_Q} \rightarrow \frac{v_P}{v_Q} = \frac{r_P}{r_Q}$$



2. Momentanpol

- Beispiel: Rollendes Rad
  - Der Mittelpunkt des Rades bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_M.
  - Der Punkt des Rades, der den Boden berührt, ist im Moment der Berührung in Ruhe.
  - Dieser Punkt ist der Momentanpol.



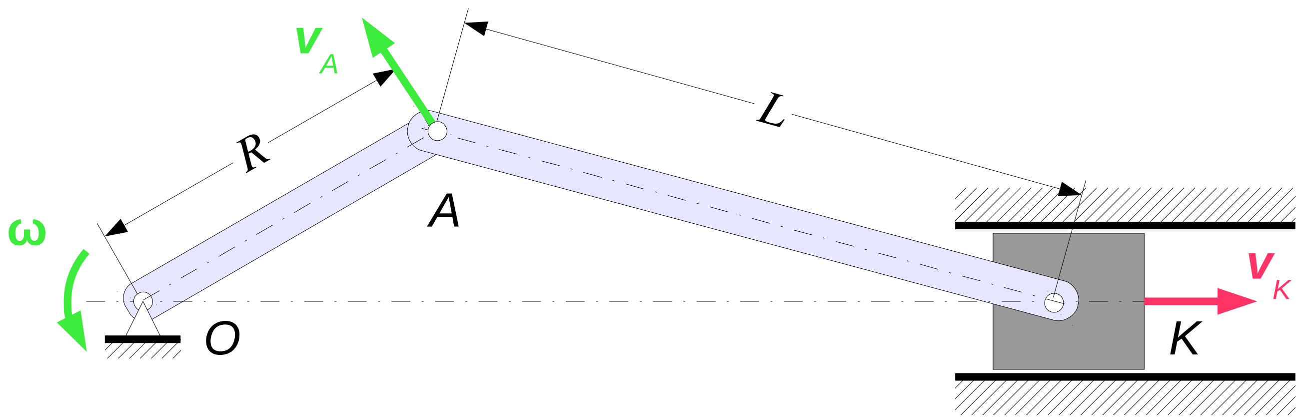
- Rollbedingung:

$$v_M = \omega r \;\rightarrow\; \omega = \frac{v_M}{r}$$

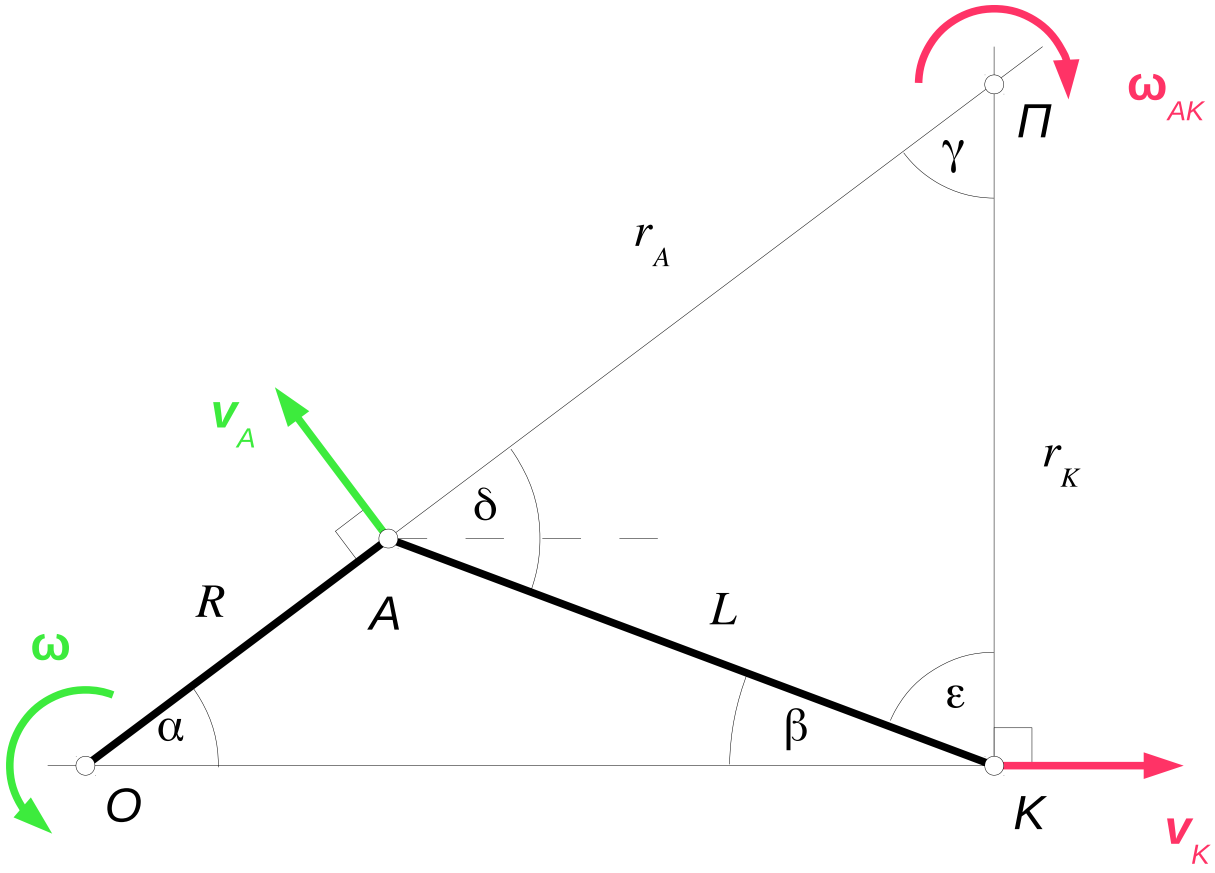
$$v_B = \omega \cdot 2r = 2 v_M$$

2. Momentanpol

- Beispiel: Kurbeltrieb
  - Bekannt ist die Geschwindigkeit $v_A = \omega R$ des Punktes *A* sowie die Richtung der Geschwindigkeit des Kolbens.
  - Damit lässt sich die Lage des Momentanpols des Pleuels zeichnerisch ermitteln.



2. Momentanpol



2. Momentanpol

- Winkel im Dreieck *KΠA*: $\varepsilon=90°-\beta,\quad \gamma=90°-\alpha,\quad \delta=\alpha+\beta$

- Sinussatz im Dreieck *KΠA*:

$$\frac{r_K}{\sin(\delta)}=\frac{r_A}{\sin(\varepsilon)} \rightarrow \frac{r_K}{r_A}=\frac{\sin(\delta)}{\sin(\varepsilon)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(90°-\beta)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\beta)}$$

- Geschwindigkeit des Kolbens:

$$\frac{-v_K}{v_A}=\frac{r_K}{r_A} \rightarrow v_K=-v_A\frac{r_K}{r_A}=-v_A\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\beta)}$$

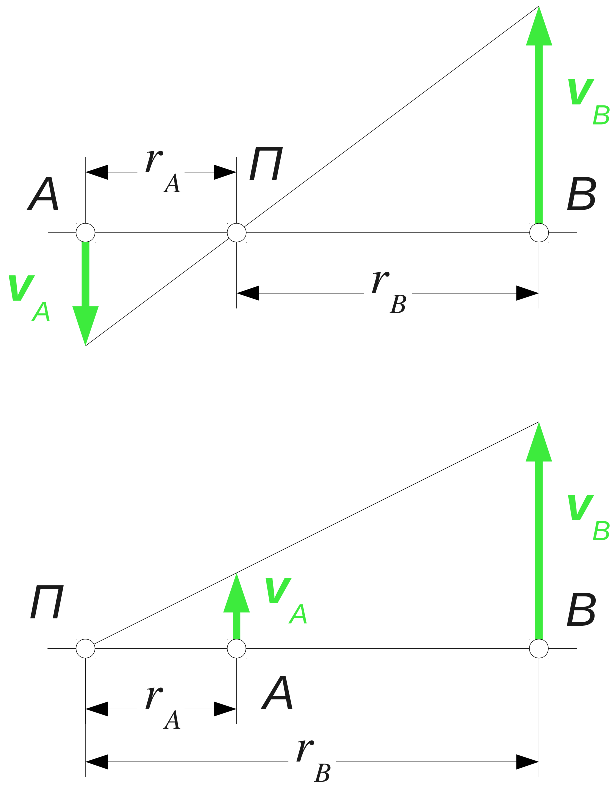
- Mit $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$ folgt:

$$v_K=-v_A\left(\sin(\alpha)+\cos(\alpha)\tan(\beta)\right)$$

2. Momentanpol

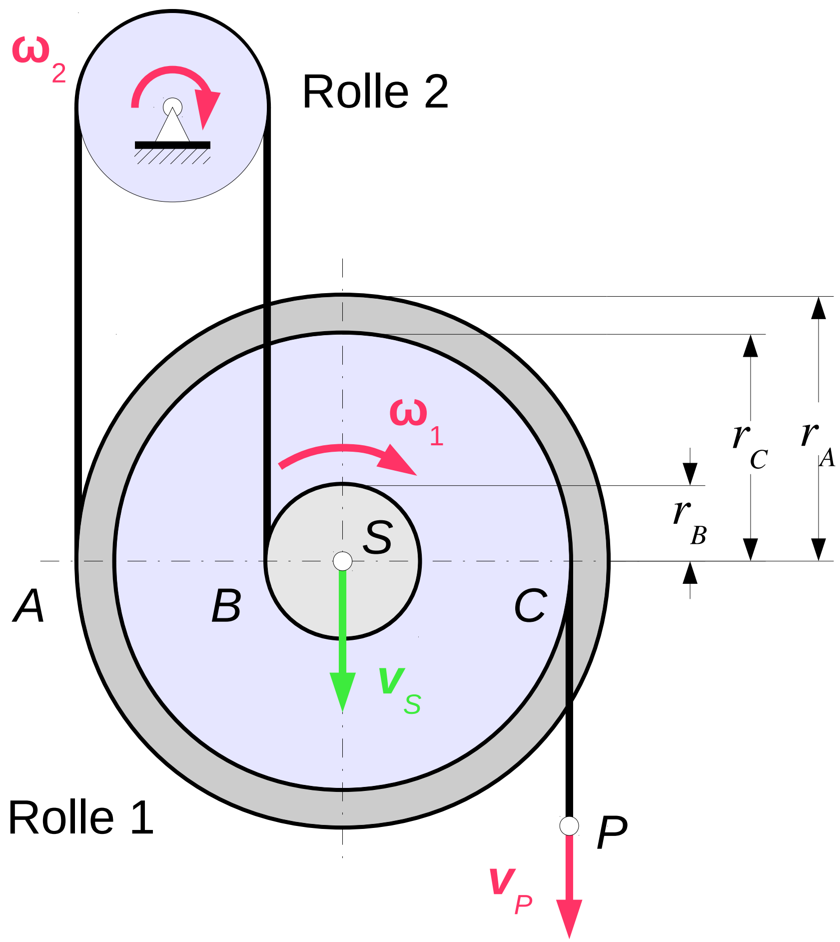
- Spezialfall:
  - Die Geschwindigkeitsvektoren stehen senkrecht auf der Geraden durch die beiden Punkte.
  - Dann liegt der Momentanpol auf dieser Geraden.
  - Es gilt:

$$v_A = \omega\, r_A \quad v_B = \omega\, r_B \;\rightarrow\; \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B}$$



2. Momentanpol

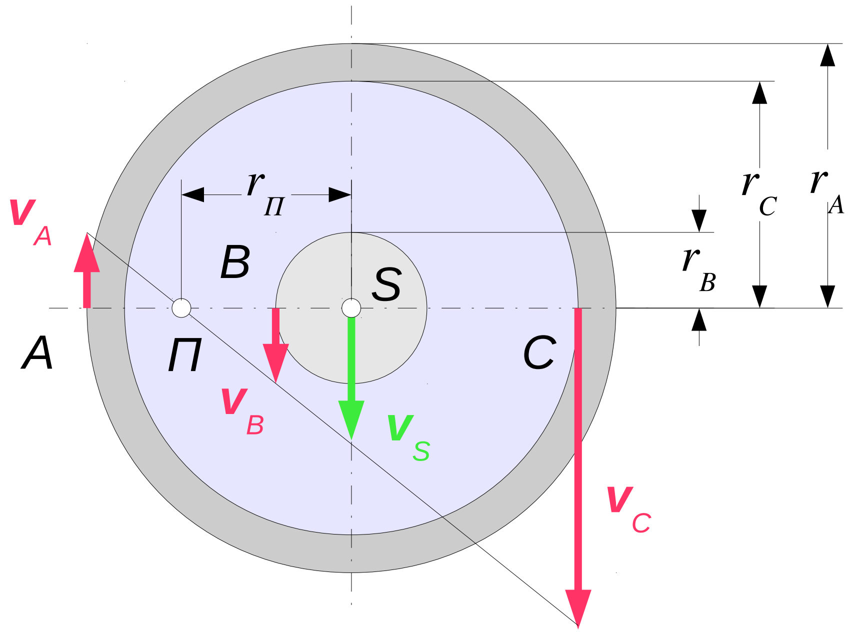
- Beispiel:
  - Die Rolle 1 ist von einem Seil umschlungen, das in den Punkten *A* und *B* abgespult wird und über die gelenkig gelagerte Rolle 2 umgelenkt wird.
  - Punkt *P* hängt an einem Seil, das im Punkt *C* von der Rolle 1 abgespult wird.
  - Beide Seile sind dehnstarr.



2. Momentanpol

- Gegeben:
  - Geschwindigkeit v_S
- Gesucht:
  - Momentanpol der Rolle 1
  - Geschwindigkeit v_P und Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2
- Geometrie:
  - Radius von Rolle 2:

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(r_A - r_B\right)$$



2. Momentanpol

- Rolle 2: $v_A = v_B = \omega_2 r_2$
- Rolle 1:
  - Der Momentanpol liegt in der Mitte zwischen den Punkten *A* und *B*. Daher gilt:

    $$r_\Pi = \frac{1}{2}\left(r_A + r_B\right)$$

  - Für die Geschwindigkeiten folgt:

    $$v_S = \omega_1 r_\Pi \rightarrow \omega_1 = \frac{2 v_S}{r_A + r_B}$$

$$v_P = v_C = \left(r_\Pi + r_C\right)\omega_1$$
$$= \frac{r_A + r_B + 2 r_C}{2} \cdot \frac{2 v_S}{r_A + r_B}$$
$$= \frac{r_A + r_B + 2 r_C}{r_A + r_B} v_S$$

$$v_B = \left(r_\Pi - r_B\right)\omega_1$$
$$= \frac{r_A - r_B}{2} \cdot \frac{2 v_S}{r_A + r_B} = \frac{r_A - r_B}{r_A + r_B} v_S$$

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r_2} = \frac{2 v_B}{r_A - r_B}$$
$$= \frac{2 v_S}{r_A + r_B} = \omega_1$$