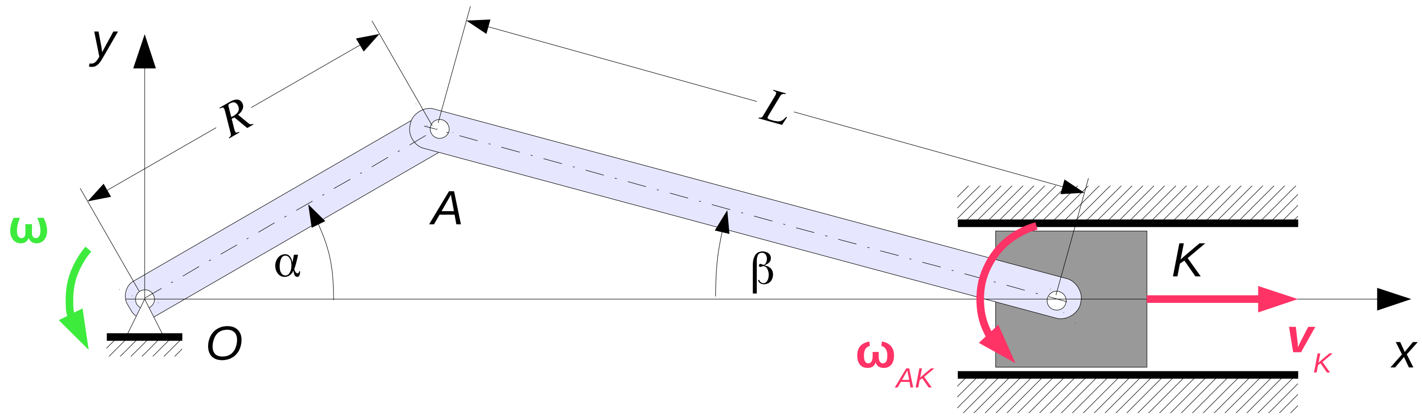
3. Analytische Kinematik

- Häufig lassen sich die kinematischen Beziehungen durch Ableiten der geometrischen Beziehungen gewinnen.
- Beispiel: Kurbeltrieb



  - Gegeben: $\alpha(t)=\omega t, R, L$
  - Gesucht: $\omega_{AK}, \dot{\omega}_{AK}, v_K, a_K$

3. Analytische Kinematik

- Sinussatz im Dreieck *OAK*:

$$\frac{\sin(\beta)}{R}=\frac{\sin(\alpha)}{L}$$

$$\rightarrow \quad \sin(\beta)=\frac{R}{L}\sin(\alpha), \quad \cos(\beta)=\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2\sin^2(\alpha)}$$

- Ableiten nach der Zeit ergibt:

$$\cos(\beta)\dot{\beta}=\frac{R}{L}\cos(\alpha)\dot{\alpha}=\omega\frac{R}{L}\cos(\alpha) \quad \rightarrow \quad \dot{\beta}=\omega\frac{R}{L}\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

$$\omega_{AK}=-\dot{\beta}=-\omega\frac{R}{L}\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

3. Analytische Kinematik

- Weiteres Ableiten führt auf die Winkelbeschleunigung des Pleuels:

$$\dot{\omega}_{AK} = -\ddot{\beta} = -\omega \frac{R}{L} \frac{-\sin(\alpha)\cos(\beta)\dot{\alpha} + \cos(\alpha)\sin(\beta)\dot{\beta}}{\cos^2(\beta)}$$

- Einsetzen von $\dot{\alpha} = \omega$ und $\dot{\beta} = \omega \frac{R}{L} \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$ ergibt:

$$\dot{\omega}_{AK} = \omega^2 \frac{R}{L} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)} - \omega^2 \left(\frac{R}{L}\right)^2 \frac{\cos^2(\alpha)\sin(\beta)}{\cos^3(\beta)}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\omega}_{AK} = -\omega^2 \frac{R}{L} \left(\frac{R}{L} \frac{\cos^2(\alpha)\sin(\beta)}{\cos^3(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)$$

3. Analytische Kinematik

- Für die *x*-Koordinate des Kolbens gilt: $x_K = R\cos(\alpha) + L\cos(\beta)$
- Ableiten führt auf die Geschwindigkeit:

$$v_K = \dot{x}_K = -R\sin(\alpha)\dot{\alpha} - L\sin(\beta)\dot{\beta}$$

$$= -\omega R\sin(\alpha) - \omega R\sin(\beta)\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}$$

$$= -\omega R\left(\sin(\alpha) + \tan(\beta)\cos(\alpha)\right)$$

- Für die Beschleunigung folgt:

$$a_K = \dot{v}_K = -\omega R\left(\cos(\alpha)\dot{\alpha} + \frac{\cos(\alpha)\dot{\beta}}{\cos^2(\beta)} - \tan(\beta)\sin(\alpha)\dot{\alpha}\right)$$

$$= -\omega^2 R\left(\cos(\alpha) + \frac{R}{L}\frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^3(\beta)} - \frac{R}{L}\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\beta)}\right)$$